

Elisa Ferreira Medeiros

**Uma introdução ao estudo das  
Equações Diferenciais Parciais  
usando o modelo de *Euler-Bernoulli* para a  
vibração transversal de uma barra flexível**

Rio Grande

2016

Elisa Ferreira Medeiros

**Uma introdução ao estudo das  
Equações Diferenciais Parciais  
usando o modelo de *Euler-Bernoulli* para a vibração  
transversal de uma barra flexível**

Trabalho submetido por Elisa Ferreira Medeiros como requisito parcial para conclusão do curso de Licenciatura em Matemática junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande – FURG  
Instituto de Matemática, Estatística e Física  
Curso de Matemática Licenciatura

Orientador: Dr. Leandro Sebben Bellicanta

Rio Grande  
2016

## Ficha catalográfica

M488i Medeiros, Elisa Ferreira.

Uma introdução ao estudo das Equações Diferenciais Parciais usando o modelo de *Euler-Bernoulli* para vibração transversal de uma barra flexível / Elisa Ferreira Medeiros. – 2016.  
57 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Graduação em Matemática Licenciatura, Rio Grande/RS, 2016.

Orientador: Dr. Leandro Sebben Bellicanta.

1. Equações Diferenciais Parciais 2. Teoria da Aprendizagem Significativa 3. Modelo de *Euler-Bernoulli* I. Bellicanta, Leandro Sebben II. Título.

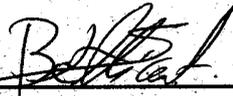
CDU 517.9

Elisa Ferreira Medeiros

**Uma introdução ao estudo das  
Equações Diferenciais Parciais  
usando o modelo de *Euler-Bernoulli* para a vibração  
transversal de uma barra flexível**

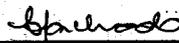
Trabalho submetido por Elisa Ferreira Medeiros como requisito parcial para conclusão do curso de Licenciatura em Matemática junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Trabalho aprovado Rio Grande, 15 de dezembro de 2016:



---

**Dr. Leandro Sebben Bellicanta**  
Orientador



---

**Dra. Celiane Costa Machado**  
Convidada - FURG



---

**Dr. Matheus Jatkoske Lazo**  
Convidado - FURG

Rio Grande  
2016

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por guiar meu caminho e dar a força que preciso para nunca desistir.

Agradeço à minha mãe Maria Helena Ferreira Medeiros por acreditar em mim e nos meus sonhos, por me amar incondicionalmente e por ser minha grande inspiração.

Agradeço à minha avó Vilma Antonia Ferreira Medeiros por compartilhar da sua fé comigo e por sua torcida infinita.

Agradeço aos meus familiares por todo o apoio e paciência nas horas das minhas angústias, principalmente ao meu namorado Rafael Borba Neves que acompanhou de perto essa caminhada e me fortaleceu.

Agradeço aos meus amigos pelas palavras de incentivo e por suportarem minhas incansáveis lamentações diárias.

Agradeço ao meu orientador Leandro Sebben Bellicanta por confiar no meu estudo, por toda a paciência e compromisso dedicados à mim. Por ser um grande exemplo de professor.

Agradeço aos professores Celiane Costa Machado e Matheus Jatkoske Lazo por aceitarem o convite para participar da banca de avaliação, além das sugestões oferecidas para a melhoria do trabalho.

Agradeço à Universidade Federal do Rio Grande pela acolhida e a todos os professores que contribuíram para a minha formação ao longo desses anos.

# Resumo

Este trabalho é uma breve introdução às Equações Diferenciais Parciais, através do estudo do modelo de Euler-Bernoulli para as vibrações transversais de uma barra flexível uniforme. No Capítulo 1 são apontados alguns fatos históricos relevantes ao surgimento e desenvolvimento das equações parciais bem como se discute a importância destas equações em outras áreas do conhecimento. No capítulo 2 estão expostos alguns tópicos da teoria de aprendizagem significativa de Ausubel que suporta a nossa metodologia de apresentação deste assunto relacionada a modelagem matemática como possível estratégia de ensino. O capítulo 3 apresenta os conceitos básicos de física e matemática necessários para entender a modelagem e solução da equação diferencial parcial de Euler-Bernoulli desenvolvidas no capítulo seguinte. No final do Capítulo 4 pode-se encontrar um exemplo montado com parâmetros reais, permitindo simulação numérica e uma interpretação gráfica do modelo.

**Palavras-chave:** Equações Diferenciais Parciais. Teoria da Aprendizagem Significativa. Modelo de Euler-Bernoulli.

# Abstract

This work is a brief introduction to Partial Differential Equations, through the study of the Euler-Bernoulli model for the transverse vibrations of a uniform flexible beam. In Chapter 1 are pointed out some historical facts relevant to the emergence and development of partial equations and discusses the importance of these equations in other areas of knowledge. In chapter 2 are exposed some topics of meaningful learning theory of Ausubel which supports our presentation methodology of this subject related mathematical modeling as a possible teaching strategy. Chapter 3 presents the basic concepts of physics and mathematics necessary to understand the modeling and solution of Euler-Bernoulli partial differential equation that are developed in the next chapter. At the end of Chapter 4 can find an example made with actual parameters, allowing for numerical simulation and a graphic interpretation of the model.

**Keywords:** Partial Differential Equations. Significant Learning Theory. Euler-Bernoulli model.

# Lista de símbolos

$a_n$	constantes
$A$	área da seção transversal, constante
$b_n$	constantes
$B$	constante
$C$	constante
$E$	espaço vetorial, módulo de elasticidade ou módulo de Young
$I$	momento de inércia de área
$l$	comprimento
$L$	comprimento da barra, operador linear
$M, M(x, t)$	momento fletor
$m$	massa
$O'$	centro de curvatura
$t$	tempo
$T(t)$	uma função de $t$
$P$	carga, força
$V, V(x, t)$	força de cisalhamento
$v$	vetor
$X(x)$	uma função de $x$
$w$	vetor, distância, deflexão na barra
$w(x, t)$	deslocamento transversal em $x$ com relação à $t$
$\alpha$	constante
$\delta_{ij}$	delta de Kronecker
$\theta$	deslocamento angular, ângulo de rotação

$\kappa$	constante, curvatura
$\lambda$	autovalor
$\rho$	raio de curvatura, densidade de massa

# Sumário

	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
<b>1</b>	<b>JUSTIFICATIVA</b>	<b>12</b>
1.1	Nota histórica	12
1.2	Importância nos dias de hoje	15
<b>2</b>	<b>ENSINO</b>	<b>17</b>
2.1	Aprendizagem Significativa	19
2.2	Modelagem Matemática	20
2.3	Modelagem e Aprendizagem Significativa	21
<b>3</b>	<b>DEFINIÇÕES IMPORTANTES</b>	<b>23</b>
<b>3.1</b>	<b>Conceitos básicos de Equações Diferenciais</b>	<b>23</b>
3.1.1	Classificações de equações diferenciais	24
3.1.2	Linearidade e Princípio da Superposição	27
3.1.3	Condições Iniciais e de contorno	27
3.1.4	Produto Interno	29
3.1.5	Funções Ortogonais	30
<b>3.2</b>	<b>Conceitos básicos de Física</b>	<b>31</b>
<b>4</b>	<b>A EQUAÇÃO DA BARRA</b>	<b>34</b>
4.1	Apresentação do problema	34
4.2	Análise da curva de deflexão da barra	35
4.3	Análise do equilíbrio das forças	40
4.4	Soluções da equação de <i>Euler-Bernoulli</i>	42
4.4.1	Soluções para a função $X(x)$	43
4.4.2	Soluções para a função $T(t)$	48
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>54</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>55</b>

# Introdução

Este trabalho surgiu a partir da disciplina de Equações Diferenciais, obrigatória no curso de Licenciatura em Matemática. Nas aulas aprendemos as equações ordinárias e algumas de suas aplicações despertando o interesse principalmente no que diz respeito a modelagem dos problemas. Para isso, sentimos a necessidade de conhecer as Equações Parciais e as ideias básicas que as envolvem. A partir desses interesses foi desenvolvido este trabalho de conclusão com o objetivo principal de apresentar os conceitos introdutórios de equações diferenciais parciais a partir da modelagem de um problema físico.

O trabalho está dividido em 4 partes. A primeira denominada *Justificativa* busca mostrar a importância do estudo das equações como ferramenta para as ciências contribuindo para os seus avanços. Para isso, trazemos um breve relato do surgimento das equações diferenciais ao longo da história baseado principalmente nas ideias de [Boyce e DiPrima \(1985\)](#), [Figueiredo \(2000\)](#) entre outros autores. Consideramos esta abordagem importante para o leitor a fim de que este compreenda a relação das equações com as outras áreas como Química, Biologia e Física principalmente, sendo fundamentais na modelagem dos seus sistemas.

A seguir abordamos a relação do ensino-aprendizagem com as Equações Diferenciais. Neste bloco a partir da análise feita acerca da dificuldade dos alunos em cálculo e conseqüentemente na disciplina de equações buscamos em autores como [Oliveira e Iglioni \(2013\)](#), [Borssoi \(2004\)](#) e [Bassanezi \(2015\)](#) alternativas que facilitem esse processo na sala de aula. Este trabalho então baseia-se na teoria de [Ausubel \(2003\)](#) sobre Aprendizagem Significativa e a possível aproximação desta com a Modelagem Matemática. Tendo em vista essa abordagem, apresentamos a modelagem segundo a teoria de *Euler-Bernoulli* para uma barra flexível resultando em uma equação diferencial parcial de quarta ordem na tentativa de proporcionar a aprendizagem sugerida com a representação de um problema.

No terceiro bloco denominado de *Definições Importantes* apontamos conceitos iniciais envolvendo a Matemática e a Física para o desenvolvimento da proposta apresentada. No que tange a matemática trazemos o conteúdo básico das equações diferenciais principalmente as parciais necessárias para a modelagem da barra com base nos autores [Íório \(2016\)](#), [Zill e Cullen \(2001\)](#), [Zill \(2003\)](#) e outros. É importante ressaltar neste momento que não temos a intenção de abordar toda a teoria clássica acerca do assunto, o que realmente pretendemos é apresentar as ideias necessárias que encadeadas irão proporcionar e facilitar o entendimento do problema. Além disso, a finalidade deste trabalho está em despertar o interesse do leitor motivando-o ao estudo aprofundado do conteúdo. O mesmo ocorre para a abordagem física apresentada através da literatura de [Hibbeler \(2006\)](#), [Rao \(2009\)](#)

e Gere (2003).

Na última parte, apresentamos a *Equação da Barra*. Nesta seção analisamos a curva de deflexão que a barra desenha, num primeiro momento de forma estática com base em Gere (2003) e Hibbeler (2006). Através do equilíbrio de forças, deduzimos a equação diferencial parcial que descreve o seu comportamento dinâmico. Os conceitos de física abordados anteriormente fornecem meios para essa construção. Para a resolução geral do problema nos apoiamos em Bellicanta e Gomes (2008) e Rao (2009) utilizando o método da separação de variáveis. Com o intuito de apresentar uma solução utilizamos de um exemplo com dados concretos possibilitando a representação gráfica para a solução do modelo.

# 1 Justificativa

As equações diferenciais são objetos de intensas atividades que envolvem tanto pesquisa científica quanto tecnológica justamente por apresentarem além de uma matemática rigorosa, uma diversidade quanto as suas aplicações. Para entender melhor o poder que reside nas equações é interessante ver a sua origem e como se desenvolveram ao longo do tempo. Além de terem surgido com a finalidade de descrever fenômenos de outras ciências, cada equação conta uma história e contribui para o desenvolvimento da matemática que vemos hoje. Nesta seção trazemos um breve resumo do surgimento das equações diferenciais com base nos autores [Boyce e DiPrima \(1985\)](#), [Roque \(2012\)](#), [Figueiredo \(2000\)](#), [Stewart \(2013\)](#) e [Simões \(2014\)](#).

## 1.1 Nota histórica

O estudo das Equações Diferenciais inicia-se com o estudo do Cálculo Diferencial e Integral, primeiramente, associado a problemas de mecânica e geometria. O destaque nesta época está para as três leis de Newton e a lei da gravitação universal que possibilitaram obter equações diferenciais ordinárias. Através do conhecimento que obteve em exprimir funções em termos de séries infinitas ao longo dos seus estudos, Isaac Newton (1642 - 1727) conseguiu desenvolver um método de resolução utilizando dessas séries para solucionar uma equação do tipo  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  em que  $f(x, y)$  é um polinômio em  $x$  e  $y$ .

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) dedicou-se a muitas áreas diferentes como teologia, direito, filosofia, desenvolvendo seu interesse em matemática quando estava com vinte e poucos anos. Seus estudos em cálculo foram publicados em 1684, apesar de Newton ter obtido os resultados anteriormente. Entre 1691 e 1694, Leibniz desenvolve o método da separação de variáveis e o método de resolução de equações lineares de primeira ordem. Também foi responsável pela notação matemática de derivada e integral, utilizadas nos dias de hoje. Como Leibniz viajava muito por ser conselheiro de muitas famílias reais germânicas, conseguia se corresponder com muitos matemáticos, principalmente os irmãos Bernoulli ([BOYCE; DIPRIMA, 1985](#)).

Esses avanços acabaram por estimular físicos e matemáticos da época a estudar mais e desenvolver modelos que representassem outros ramos da Física e da Mecânica Contínua. Assim, o século XVIII é marcado por intensas teorias acerca das equações diferenciais ([SIMÕES, 2014](#)). Resultado desses estudos estão as equações diferenciais parciais, e com elas muita dificuldade na sua resolução.

Os irmãos Jakob Bernoulli (1654 – 1705) e Johann Bernoulli (1667 – 1748) contri-

buíram para diversas áreas matemáticas. Através do cálculo, formularam problemas de mecânica em função de equações diferenciais e os solucionaram. Jakob escreveu equações para o movimento do planeta utilizando dos princípios de Newton, além de utilizar da expressão “integral” pela primeira vez em seu sentido atual. Johann em 1696 propôs o problema da *braquistocrona*<sup>1</sup>. Esse desafio foi solucionado pelos irmãos Bernoulli além de Leibniz e por Newton também. Outro Bernoulli que estudou as equações diferenciais, principalmente, parciais e suas aplicações foi Daniel, filho de Johann. Tamanho era seu interesse que seu nome ficou associado à famosa *equação de Bernoulli*<sup>2</sup> da mecânica dos fluidos.

Outro grande nome da matemática, o maior do século XVIII, é Leonhard Euler (1707 - 1783). O jovem possuía instrução ampla, além da matemática estudou teologia, medicina, astronomia, física e línguas orientais. Deixou uma grande contribuição à matemática cujas obras somam mais de 70 volumes (BOYCE; DIPRIMA, 1985). Suas áreas de interesse cobriam todas as áreas de matemática e muitas de aplicações. Contudo, no que tange a este trabalho, destacamos sua contribuição na formulação em linguagem matemática de problemas de mecânica e o desenvolvimento de métodos de resolução para estes como, por exemplo, a teoria dos fatores integrantes e a solução geral para equações lineares com coeficientes constantes. Segundo Rao (2009) as vibrações de vigas delgadas apoiadas e engastadas de várias maneiras foram estudadas pela primeira vez por Euler em 1744 e Daniel Bernoulli em 1751, ficando conhecida como a *teoria de Euler-Bernoulli* ou da viga delgada.

Joseph - Louis Lagrange (1736 - 1813) mostrou que a solução de uma equação diferencial linear homogênea de ordem  $n$  é uma combinação linear de  $n$  soluções independentes (SIMÕES, 2014). Além disso, desenvolveu por completo o método da variação de parâmetros.

O estudo de Jean Le Rond D’Alembert (1717 - 1783) com as equações diferenciais parciais foi relacionado a física matemática. Seu trabalho sobre esse assunto apareceu, pela primeira vez, em 1747, em um artigo que D’Alembert enviou para a Academia de Ciências da Prússia. Ali surgia a *equação das ondas*, também conhecida pela equação das cordas vibrantes.

Em 1746, Jean Le Rond D’Alembert seguiu o procedimento padrão, tratando a corda de violino em vibração como uma coleção de massas pontuais, mas em vez de resolver as equações e procurar um padrão quando o número de massas tendia ao infinito, ele estudou o que acontecia às equações em si. Ele deduziu uma equação que descrevia o formato das variações na corda ao longo do tempo. (STEWART, 2013, p.171)

<sup>1</sup> Este problema famoso consistia em dados dois pontos situados em um plano vertical, determinar o trajeto entre eles ao longo do qual um corpo desce em virtude da gravidade, no menor tempo possível.

<sup>2</sup> Equação que descreve o comportamento de um fluido que se move ao longo de um conduto.

Euler e D'Alembert chegaram à conclusão que as soluções para a equação da onda deveriam ser a sobreposição da propagação de duas funções em sentidos contrários mas com a mesma velocidade. Já Daniel Bernoulli, através dos estudos feitos por Euler sobre oscilações, chegou a uma expressão que representava a solução por séries trigonométricas. O que acontecia na época era que apesar das soluções de D'Alembert e Euler serem as mesmas, para cada um o significado de função era diferente (FIGUEIREDO, 2000).

Na época de Euler, havia duas classes de funções: as funções contínuas, que eram aquelas que podiam ser expressas por uma equação entre  $x$  e  $y$ , e as funções geométricas, que eram todas aquelas que podiam ser traçadas à mão livre. E se admitia que, se uma função contínua fosse dada por uma fórmula em um pequeno intervalo, então a função estaria determinada nos demais pontos fora desse intervalo. (Veja você a confusão da época: uma função com esta propriedade é de uma categoria muito restrita de funções, chamadas analíticas.) Admitia-se também que a classe das funções contínuas era menor que a das funções geométricas, porque uma linha quebrada não era uma função contínua, no sentido da época, e sim várias funções. (FIGUEIREDO, 2000, p.41)

Dessa forma, o problema das cordas vibrantes não foi apresentado em livros até o final do século XVIII, assim como definições mais gerais sobre funções surgiram bem mais tarde, sendo formalizado o seu conceito durante o século XIX. Assim, em 1759, Lagrange mostrou a solução da equação através da forma prevista por Euler, mas não percebeu que com alguns rearranjos desenvolveria a função em uma série de senos, cujos coeficientes são o que chamamos de *coeficientes de Fourier*.

Em 1807, Joseph Fourier (1768-1830) estudando a propagação do calor em corpos sólidos, dadas certas condições iniciais, desenvolveu suas séries e explicitou seus coeficientes. Surgia então a *equação do calor* e as ideias que a envolveram conduziram à criação de uma nova área da matemática.

Em um trabalho enviado à Academia de Ciência de Paris em 1807, Fourier afirmava que uma função qualquer pode ser expressa como soma de uma série trigonométrica. Essa possibilidade era admitida por Euler e Lagrange, mas somente para funções particulares. Fourier defendia que essa afirmação fosse válida para qualquer função. O comitê que avaliou esse trabalho era composto por Laplace, Lagrange, Lacroix e Monge e o relato foi escrito por outro matemático da época, S.D. Poisson. Nenhum desses matemáticos, já célebres, demonstrou entusiasmo pelos resultados. Pior - eles criticaram abertamente a falta de rigor de Fourier. (ROQUE, 2012, p. 394)

Dando continuidade ao trabalho de Fourier, Gustav Lejeune Dirichlet foi um dos primeiros a reconhecer que nem toda a função pode ser representada por uma série de Fourier, contribuindo para uma fundamentação mais rigorosa da matemática da época. Depois disso, vieram os trabalhos de Cauchy, Bolzano, Riemann entre outros nomes matemáticos que proporcionaram à Análise uma base sólida (FIGUEIREDO, 2000).

Assim, a explicação que se dava a um certo fenômeno físico, modelado por uma equação diferencial, passou a ser também explicado pela matemática.

Essa mudança teve consequências na física do século XIX, principalmente na separação da pesquisa matemática em relação aos problemas físicos que tinham exercido um papel central no desenvolvimento do cálculo infinitesimal. Veremos que essa dissociação se tornará definitiva com a constituição da matemática como “matemática pura” no século XIX. (ROQUE, 2012, p. 403)

Assim, muito da matemática surgiu em problemas práticos que envolvia alguma ciência, mas tão logo a matemática já desenvolvida passou a ser utilizada em novas situações servindo de ferramenta essencial.

## 1.2 Importância nos dias de hoje

O estudo das equações diferenciais nos últimos séculos foi alvo de curiosidade por muitos matemáticos. Ora como sendo o foco a modelagem de algum sistema ora a sua análise puramente matemática. É muito difícil falar de equações diferenciais sem associá-las a um problema. Afinal, elas foram criadas para representar situações reais. Assim, os mais variados modelos se fundamentam em equações diferenciais. Boyce e DiPrima (1985) nos dizem que

A importância das equações diferenciais está no fato de que mesmo as equações mais simples correspondem a modelos físicos úteis, como por exemplo o decaimento de substâncias radioativas, o comportamento de sistemas de massas e molas e o comportamento de circuitos elétricos. O conhecimento de sistemas naturais complexos é em geral conseguido através da combinação ou do refinamento de modelos mais simples e mais básicos. (BOYCE; DIPRIMA, 1985, p.ix)

Como as equações surgiram na ânsia de se descrever fenômenos naturais, é comum pensarmos em sua aplicação direta na física. Boyce e DiPrima (1985) exemplificam modelos representados por equações diferenciais ordinárias que são tipos mais fáceis de serem resolvidas e compreendidas. No entanto, elas também aparecem em diversos problemas que envolvem a Biologia e a Química. O que se vê são aplicações na dinâmica de desenvolvimento de tumores, no armazenamento de resíduos atômicos, na degradação de poluentes, no balanço de massa de droga no organismo, e muitos outros.

Agregado às equações ordinárias, modelos matemáticos aliados a modelos computacionais têm contribuído para o combate de doenças causadas pelo vírus HIV, por exemplo. Ou seja, a partir da análise de modelos presentes, onde os mais variados são fundamentados em equações diferenciais, pode-se descobrir ou prever como se comportarão no futuro (ARAÚJO, 2012).

Se as equações ordinárias, mais simples, modelam vários problemas conforme foi citado anteriormente, as equações parciais e suas aplicações estão em sistemas mais complexos representando com mais proximidade o que foi observado. Elas aparecem em problemas físicos como por exemplo no fluxo de água, na condução do calor, na propagação de ondas. Possuem uma ampla aplicação nas engenharias, seja na química, mecânica, civil, elétrica entre outras. Tanto que sua disciplina faz parte do currículo destes cursos, devida a sua tamanha importância. São exemplos de aplicações: equilíbrio de estruturas, estudos de vibração mecânica, flexão de vigas, cinética química, transferência de massa.

As equações diferenciais também contribuem na área da Economia ([ECONOMIA... , 2016](#)). Por exemplo, no mercado de opções, negocia-se o direito de comprar ou de vender um bem por um preço fixo numa data futura. Essa prática chamada de *derivativos* no mercado financeiro vem sendo usada amplamente como uma forma de proteção contra as flutuações dos valores de preços de produtos e bens. Um dos problemas que envolve o mercado de derivativos está na precificação. Este problema envolve análise estocástica, equações diferenciais parciais e otimização. Um modelo chamado Black-Scholes<sup>3</sup> tentou capturar esse problema mas após a quebra da bolsa em 1987 se mostrou muito simples e incapaz de prever essas questões do mercado financeiro. No entanto, uma nova área de pesquisa que combina equações diferenciais parciais, estatística e análise numérica vem sendo o foco de muitos pesquisadores matemáticos a fim de resolver o problema.

Fica simplesmente inegável a importância das equações diferenciais nas mais variadas áreas do conhecimento e o quanto ela contribui para o desenvolvimento e avanço das mesmas. Além disso, as equações vão além de modelar problemas basicamente físicos como um primeiro pensamento leigo nos faz ter.

Aplicar a matemática a questões de Biologia ou de Humanas, por exemplo, não é muito diferente do que tradicionalmente se tem feito com a Física. A matematização de uma realidade pode começar com o uso de modelos conhecidos modificados para se adaptar ao novo tema ou área, introduzindo variáveis ou hipóteses de acordo com as necessidades do novo desafio. ([BASSANEZI, 2015](#), p. 13)

É por essa multiplicidade de aplicações que o estudo de equações diferenciais se faz tão importante. Ela representa a dualidade do rigor matemático, com todas as suas definições e conceitos e a sua prática, com o estabelecimento de modelos que tendem a se aproximar do real. Assim, além de fazerem parte de alguns cursos de ciências exatas, elas servem como ferramenta de estudo em outras áreas buscando análise das suas próprias experiências.

---

<sup>3</sup> Modelo que compreende uma equação diferencial parcial parabólica que relaciona o preço de derivativos ao preço atual das ações subjacentes em termos de parâmetros de mercado. O complicado e mais importante é obter a volatilidade. O erro do modelo foi dizer que a volatilidade era constante.

## 2 Ensino

O conteúdo de Equações Diferenciais faz parte do currículo de cursos como Matemática, Física e Engenharias. Por ser uma extensão da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, exige também entendimento de conceitos bem estabelecidos que a envolve. Aqui cabe uma reflexão a respeito dessa disciplina e o efeito que causará no aprendizado de Equações Diferenciais.

Sabe-se, tradicionalmente, que em qualquer curso de exatas, o Cálculo é responsável por grandes índices de reprovação. Por abranger vários domínios do ensino médio como Álgebra, Geometria e Trigonometria por exemplo, o Cálculo acaba por se tornar uma matéria pesada e que precisa um pouco mais de atenção. Isso porque os alunos chegam às universidades com falhas na matemática básica e conseqüentemente carregam essa dificuldade no decorrer dessa disciplina. Assim, o Cálculo precisa desses conceitos que deveriam ser dominados pelos alunos para idealizar outros em um nível maior de aprofundamento.

Quando este aluno chega nas Equações Diferenciais, o desconforto aumenta por se deparar com a matemática estudada anteriormente aliada aos problemas da sua aplicação. Os alunos já têm dificuldade no conceito e isso se evidencia ainda mais na interpretação dos problemas, no momento da aplicação. [Oliveira e Iglioni \(2013, p.2\)](#) nos dizem que

Nossa experiência no ensino de Cálculo em Cursos de Engenharia e pesquisas na área de Educação Matemática revelam dificuldades no processo de aprendizagem dos alunos no estudo de Equações Diferenciais, tanto no uso de técnicas para resolução dessas equações, quanto na produção de significados e compreensão de conceitos. Essas dificuldades se evidenciam principalmente no momento em que são estudadas as aplicações em problemas contextualizados, envolvendo a Física, a Química, a Engenharia etc. Em muitas situações, os alunos dominam as técnicas de resolução, porém têm dificuldade em identificar como aplicar as Equações Diferenciais na resolução de problemas.

Uma segunda questão apontada pelas autoras é quando os alunos dominam os mecanismos de resolução mas não conseguem aplicá-los nos problemas. Isso pode ser resultado da forma como é abordado o conteúdo de Equações Diferenciais. Às vezes, o docente prioriza suas aulas basicamente para as soluções analíticas e manipulações algébricas conseqüentes. O aluno então se depara com um conteúdo “solto” sem conseguir relacioná-lo com problemas contextualizados.

Um exemplo desta situação ocorre muitas vezes nos cursos de ciências exatas. As turmas nesses casos geralmente são compostas por alunos de diferentes cursos, complicando a situação do professor que objetiva apresentar problemas específicos motivando o estudo das equações ([MUNIZ et al., 2000](#)). Ou seja, o docente acaba por concentrar suas aulas

na teoria de forma expositiva e focando na resolução de diferentes tipos de equações diferenciais.

Essa preocupação com a dificuldade dos alunos frente a uma aprendizagem efetiva de equações diferenciais é tema central de muitos trabalhos vinculados à Educação Matemática. O artigo de [Oliveira e Iglori \(2013\)](#) traz um levantamento bibliográfico de pesquisas relacionadas a dificuldade dos alunos na disciplina de Equações Diferenciais.

Ressaltam, ainda, que o próprio enfoque que vem sendo dado ao conteúdo não propicia a compreensão do mesmo, o que pode acarretar aos alunos dificuldade em conceber o que é uma Equação Diferencial e, por conseguinte, em sua aplicação em problemas contextualizados que exijam interpretação. Alguns trabalhos expressam a dificuldade que os estudantes têm para pensar simultaneamente de modo algébrico e gráfico. ([OLIVEIRA; IGLIORI, 2013](#), p.21)

Para tentar minimizar o problema, as autoras afirmam que em muitos trabalhos foi sugerido um ensino contextualizado a partir de situações - problemas, favorecendo uma abordagem analítica, gráfica e numérica a partir da Modelagem Matemática e da utilização de softwares.

Seguindo essa percepção, [ALVES \(2008\)](#) também aponta a necessidade de uma mudança na abordagem dessa disciplina, que ainda é bastante voltada ao algoritmo de resolução.

Na prática, o professor tecnicista trabalha a disciplina privilegiando o estudo dos algoritmos e técnicas de resolução de equações diferenciais, o que ocorreu também na minha prática educativa. Entretanto, o estudo das Equações Diferenciais compreende duas etapas. Uma que consiste na sua resolução e uma outra na sua aplicação, com resolução e formulação de problemas e, iniciação à modelagem de situação-problema em ciências e em Matemática. ([ALVES, 2008](#), p.11)

A efetiva aprendizagem se dá quando o aluno consegue analisar, justificar e estabelecer relações atribuindo significado e desenvolvendo um pensamento crítico sobre o que foi estudado. Assim, surge a necessidade de explicitar o conceito de aprendizagem significativa, o que faremos fundamentado na teoria desenvolvida por [Ausubel \(2003\)](#). [Borssoi \(2004\)](#) acredita que a Modelagem Matemática como estratégia de ensino contribui de forma efetiva para o alcance desta aprendizagem. Vamos considerar então esses dois pressupostos a fim de proporcionar novas ideias que possibilitem minimizar a dificuldade do ensino e estudo das Equações Diferenciais.

## 2.1 Aprendizagem Significativa

Para Ausubel<sup>1</sup> a aprendizagem significativa ocorre quando um novo conhecimento se relaciona a outro já existente. Ou seja, neste processo os conhecimentos prévios dos alunos são valorizados possibilitando construir estruturas mentais que viabilizem a aprendizagem em questão.

A essência do processo de aprendizagem significativa, tal como já se verificou, consiste no facto de que novas ideias expressas de forma simbólica (a tarefa de aprendizagem) se relacionam àquilo que o aprendiz já sabe (a estrutura cognitiva deste numa determinada área de matérias), de forma não arbitrária e não literal, e que o produto desta interacção activa e integradora é o surgimento de um novo significado, que reflecte a natureza substantiva e denotativa deste produto interactivo. (AUSUBEL, 2003, p.71)

Esta relação acontece sob três condições:

1. Existir predisposição do aluno em relacionar o material de maneira consistente;
2. O conteúdo ser potencialmente significativo, revelador.
3. O aluno deve dispor de conhecimentos prévios que permitam relacioná-los aos conhecimentos novos.

Com relação a primeira condição, nada se pode fazer quando o aluno opta por memorizar o conteúdo de forma arbitrária, resultando em uma aprendizagem mecânica. Uma das razões que fazem com que os alunos usem do mecanismo de memorização em conteúdos que poderiam gerar uma aprendizagem significativa está em suas experiências passadas com professores que não valorizam a criatividade, a criticidade e apenas buscam pela resposta correta e conforme. Além disso, por causa de fracassos anteriores, às vezes para muitos alunos é muito mais confortável decorar aquilo que não ficou de certa maneira compreendido do que encarar o fato e usar de um esforço maior para entender.

O ensino da matemática e das ciências, por exemplo, continua a basear-se muito na aprendizagem memorizada de fórmulas e de passos de procedimentos, no reconhecimento memorizado de “problemas tipo” estereotipados e na manipulação mecânica de símbolos. (AUSUBEL, 2003, p.167)

Para Borssoi e Almeida (2004) a aprendizagem significativa é um processo pelo qual o sujeito aprende relacionando de maneira não arbitrária e substantiva um novo conhecimento a um aspecto significativo de sua estrutura significativa.

<sup>1</sup> Pesquisador norte-americano David Paul Ausubel (1918-2008) famoso por ter proposto o conceito de aprendizagem significativa apresentada em 1963 na sua obra *The Psychology of Meaningful Verbal Learning*.

A estrutura cognitiva compreende um complexo organizado de informações na mente do sujeito que aprende, e a forma como se encontra organizada essa estrutura determina uma aprendizagem mais ou menos facilitada. A não-arbitrariedade indica que a nova informação deve se relacionar com um aspecto relevante da estrutura cognitiva de quem aprende e não com um aspecto arbitrário qualquer. A substantividade significa que é a essência da nova informação que deve ser interiorizada pela estrutura cognitiva, e não um conjunto de símbolos usados para expressá-la. (BORSSOI; ALMEIDA, 2004)

É por esse motivo que devemos ressaltar o papel do professor. Ele é o profissional qualificado para criar situações com potencial que favoreçam a aprendizagem. Para isso deve organizar o material de forma a identificar conceitos e mecanismos que possibilitem tornar o conteúdo significativo ao aluno.

Além disso, é importante o professor tentar trabalhar situações do interesse dos seus alunos principalmente na futura área em que eles atuarão. O conteúdo passará a fazer sentido pois conseguirão relacioná-los com outras disciplinas. É o que aponta Muniz et al. (2000) quando diz que “a apresentação de exemplos práticos do curso, além de aumentar a motivação para o estudo e de preparar melhor o aluno para as disciplinas subsequentes do curso, permite a ele conhecer melhor o curso que está fazendo (...)”.

## 2.2 Modelagem Matemática

A Modelagem Matemática procura um modelo, um padrão que permita representar um fenômeno, seja ele natural ou de qualquer área do conhecimento. Atualmente, é vista como um poderoso recurso no processo de ensino e aprendizagem sendo recomendada por diversos autores como Bassanezi, D’Ambrósio, Blum e Niss entre outros (BORSSOI, 2004). Através da modelagem, o professor pode trabalhar a interdisciplinaridade e a transversalidade, além de comprovar para o aluno que a Matemática tem aplicação.

Nesse sentido, a modelagem como estratégia de ensino faz a vinculação dos conceitos e de todo o formalismo matemático com uma situação real conhecida. Assim, a Matemática se torna aplicável e seus conteúdos significativos. D’ambósio (2002 apud BORSSOI, 2004) nos diz que:

... o ponto de vista que me parece de fundamental importância e que representa o verdadeiro espírito da Matemática é a capacidade de modelar situações reais, codificá-las adequadamente, de maneira a permitir a utilização das técnicas e resultados conhecidos em um outro contexto, novo. Isto é, a transferência de aprendizado resultante de uma certa situação para a situação nova é um ponto crucial do que se poderia chamar aprendizado da Matemática, e talvez o objetivo maior do seu ensino. (D’AMBÓSIO, 2002 apud BORSSOI, 2004, p.5)

Conteúdos já estudados anteriormente podem ser utilizados na resolução de problemas, fomentando o desenvolvimento de novos conceitos e reafirmando o entendimento de conceitos já dominados. Para [Bassanezi \(2015\)](#) a Modelagem Matemática pode servir com a finalidade de motivar os alunos na compreensão de certos conteúdos e nesse caso a validação dos modelos não se torna importante, ou por outro lado recai justamente na própria resolução do problema. Isso vai depender do objetivo principal do professor que se dispõe a trabalhar com este recurso.

O uso da modelagem no processo de ensino-aprendizagem propicia a oportunidade de exercer a criatividade não somente em relação às aplicações das habilidades matemáticas, mas principalmente, na formulação de problemas originais uma etapa tão estimulante quanto a da resolução. ([BASSANEZI, 2015](#), p.12)

A modelagem propicia motivação aos alunos pois eles acabam enxergando uma matemática significativa através das suas aplicações. E com isso, conseguem aprender com mais facilidade pois seus conteúdos se tornam conectados com outro assunto ou área de conhecimento. Assim, nossos alunos passam de sujeitos passivos em que apenas recebem o conteúdo, decoram e repetem na prova, a sujeitos ativos, capazes de analisar, problematizar e interpretar situações se desenvolvendo como seres mais críticos e reflexivos.

## 2.3 Modelagem e Aprendizagem Significativa

A partir do que foi dito anteriormente, reconhecemos a possibilidade de organizar atividades que promovam a ocorrência da aprendizagem significativa e a Modelagem Matemática pode ser a ferramenta que favoreça esse processo de ensino-aprendizagem.

Pensando em Equações Diferenciais, elas nasceram da necessidade de entender e analisar os fenômenos da nossa volta. Foi em busca de modelos que grandes matemáticos desenvolveram suas teorias. Falar em equações diferenciais é falar de alguma forma de modelagem. Para [Bassanezi \(1994\)](#) um modelo matemático “é quase sempre um sistema de equações ou inequações algébricas, diferenciais, integrais, etc., obtido através de relações estabelecidas entre as variáveis consideradas essenciais ao fenômeno em análise.”

Analisando esses três temas - Equações Diferenciais, Aprendizagem Significativa e Modelagem Matemática - e como se relacionam, buscamos examinar em algumas obras tradicionais de equações diferenciais como [Boyce e DiPrima \(1985\)](#), [Zill e Cullen \(2001\)](#), [Nagle, Saff e Snider \(2012\)](#) e [Zill \(2003\)](#) a forma como as Equações Diferenciais Parciais são abordadas e a possibilidade de tornar este conteúdo mais significativo para os alunos.

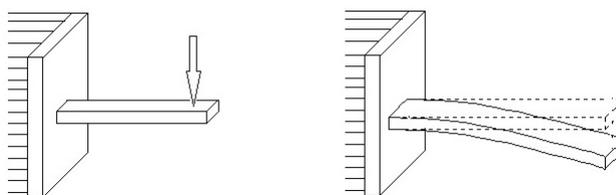
Em quase todos os livros, as Equações Diferenciais Parciais são abordadas através da resolução de um problema. Assim, à medida que se criam mecanismos para resolver o problema, o conteúdo vai se desenvolvendo também. Conceitos iniciais como ordem,

classificação, linearidade, soluções e outros são entendidas como já estudadas anteriormente por serem semelhantes as Equações Diferenciais Ordinárias sendo esta pré-requisito para a outra.

Os problemas abordados são em suma equações tradicionais como a equação da onda, equação do calor, equação de Laplace. O [Boyce e DiPrima \(1985, p.431\)](#) mostram a dedução das equações do calor e da onda a partir de análises físicas, modelando matematicamente o objeto em questão. Dependendo do objetivo da disciplina e o seu devido público, a modelagem pode ser uma estratégia para despertar o interesse motivando a aprendizagem conforme dito anteriormente. Às vezes mostrar ao aluno as hipóteses as quais foram geradas e a história por trás das equações pode facilitar a compreensão da própria equação em si e de seu método de resolução.

Entendemos a importância dessas equações no currículo dos alunos que estudam as Equações Diferenciais Parciais, afinal elas são resultados de uma longa história e seu método de resolução se mostra simples quando comparada a maioria das Equações Diferenciais Parciais. Assim, este trabalho tem a intenção de analisar uma outra equação muito pouco abordada nos livros e que por seu movimento ser visível pode ser uma alternativa a mais a ser tratada como complemento em aula. Estamos falando da equação de *Euler-Bernoulli* que modela o movimento transversal de uma barra flexível. Quando na extremidade livre da barra é aplicado uma força, ela entra em movimento vertical.

Figura 1: Barra flexível estática e em movimento



A representação deste movimento é muito simples, percebível ao aluno e mais próximo do conhecido, podendo simbolizar a viga de um edifício, uma ponte, ou até o movimento de um régua presa em uma extremidade. Dessa forma sua análise pode ser facilitada tornando o conteúdo mais significativo e propiciando o desenvolver da sua aprendizagem. Traremos a seguir algumas definições e conceitos que julgamos importantes para o encadeamento das ideias tornando possível a proposta de modelagem matemática e a resolução do problema.

## 3 Definições Importantes

Este capítulo apresenta algumas definições importantes para o entendimento e desenvolvimento da proposta de modelagem de uma barra flexível. Além de conceitos relacionados às equações diferenciais, nos preocuparemos com conceitos físicos relevantes para a dedução da equação em estudo.

### 3.1 Conceitos básicos de Equações Diferenciais

A palavra *equações* nos faz lembrar de incógnitas, variáveis e soluções enquanto que a palavra *diferenciais* nos remete à ideia de derivadas. E é isso que a expressão equações diferenciais quer dizer. De maneira intuitiva, uma equação pode ser pensada como uma igualdade envolvendo incógnitas. Resolver uma equação, significa encontrar as incógnitas que, quando substituídas na equação tornam a igualdade verdadeira.

No caso das equações diferenciais, as incógnitas são funções e as chamaremos de *variáveis dependentes*. Chamaremos de *variáveis independentes* os elementos pertencentes ao conjunto domínio destas funções. Utilizando da definição de Zill (2003) temos que “uma equação que contém derivadas (ou diferenciais) de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de **equação diferencial**”. Resolver uma equação diferencial consiste em encontrar funções que a satisfaçam.

**Exemplo 1.** A equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y \quad (3.1)$$

é uma equação simples mas muito importante. Neste caso,  $y = y(x)$  representa uma função real, de variável real que é a incógnita da equação e, portanto, é a variável dependente. A variável  $x$  é a variável independente.

A função  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = Ce^x$  onde  $C$  é uma constante real qualquer é uma solução da equação 3.1 pois

$$\frac{df}{dx} = Ce^x$$

e, portanto, a igualdade

$$\frac{df}{dx} = f$$

é válida para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$$

onde  $x$  é a variável dependente e  $t$  a variável independente.

**Exemplo 3.**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

onde  $u = u(x, y, z)$  é uma função (variável dependente) e  $x, y, z$  variáveis independentes.

**3.1.1 Classificações de equações diferenciais**

Existem duas classes importantes de equações diferenciais: as equações diferenciais ordinárias e as equações diferenciais parciais.

**Definição 1.** *Equação diferencial ordinária* (EDO) é aquela que envolve somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes em relação a apenas uma variável independente.

As equações ordinárias aparecem naturalmente em modelos com um número finito de graus de liberdade.

**Exemplo 4.**

$$y'' - y' + 6y = 0$$

**Exemplo 5.**

$$\frac{dy}{dx} = y - 2$$

Nos exemplos 4 e 5, a variável independente pôde ser omitida, isto é, a equação não depende explicitamente da variável independente. Quando isto ocorre chamamos a equação de autônoma.

Podemos representar uma EDO de maneira genérica como segue:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = g(x) \quad (3.2)$$

onde  $g$  é uma função que depende apenas da variável independente  $x$  e  $F = F(x, y, \dots, y_n)$  função conhecida de valores reais de  $n + 2$  variáveis.

**Definição 2.** *Equação diferencial parcial* (EDP) é aquela que envolve derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes.

Usando as palavras de [Lório \(2016\)](#) podemos dizer que uma EDP “é uma equação envolvendo duas ou mais variáveis independentes  $x, y, z, t, \dots$  e derivadas parciais de uma função (variável dependente)  $u = u(x, y, z, t, \dots)$ ”.

**Exemplo 6.** Em física, a equação do calor é um modelo matemático para a difusão de calor em sólidos. Este modelo consiste em uma equação de derivadas parciais que muitas vezes é também chamada de equação da difusão (térmica). Existem diversas variações

da equação do calor. Na sua forma mais conhecida, ela modela a condução de calor em um sólido homogêneo, isotrópico e que não possua fontes de calor, e é escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.3)$$

Aqui,  $u = u(x, y, z, t)$ , representa o campo de temperaturas e é a função incógnita enquanto  $k$  é o coeficiente de difusão térmica. Na presença de fontes de calor, a equação toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + g(x, y, z, t) \quad (3.4)$$

**Exemplo 7.** A equação diferencial parcial

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.5)$$

será estudada com detalhes no capítulo 4 e modela o comportamento dinâmico de uma barra flexível.

Uma EDP com  $n$  variáveis independentes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pode ser denotada de maneira genérica como:

$$F \left( x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k} \right) = g(x_1, \dots, x_n) \quad (3.6)$$

onde  $k$  denota a ordem da derivada mais alta presente na equação e  $g(x_1, \dots, x_n)$  é o termo da equação que só depende das variáveis independentes.

As equações diferenciais podem ser classificadas também quanto a sua **ordem**. A *ordem de uma equação diferencial* é determinada pela ordem da derivada mais alta presente na equação. Por exemplo, as equações 3.3 e 3.4 são de ordem 2 (ou de segunda ordem) e a equação 3.5 é de ordem 4 (ou de quarta ordem).

Além disso, uma equação diferencial pode ser classificada quanto à sua **linearidade**. A equação diferencial ordinária 3.2 é *linear* se  $F$  é uma função linear da variável dependente  $y$  e suas derivadas,  $y', \dots, y^{(n)}$ , podendo ser representada por

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = g(x) \quad (3.7)$$

onde teremos os coeficientes  $a_0, \dots, a_n$  dependendo quando muito da variável  $x$ .

**Exemplo 8.** A EDO linear

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0,$$

é conhecida como *equação do oscilador harmônico simples*, onde  $m$  é a massa da partícula e  $k$  uma constante. Esta é uma EDO de segunda ordem linear (ZILL, 2003).

**Exemplo 9.** A EDO não linear

$$\theta'' + \frac{g}{l}\text{sen}(\theta) = 0,$$

é uma equação que descreve o movimento de um pêndulo simples de comprimento  $l$ , massa  $m$  e de ângulo  $\theta$  formado com a linha vertical. É uma EDO de segunda ordem não linear pois apresenta o termo  $\text{sen}(\theta)$ .

Já a EDP representada pela equação 3.6 é dita *linear* se  $F$  é linear em  $u$  e em todas as derivadas parciais de  $u$  que ocorrem na equação; caso contrário, ela será dita **não linear**.

**Exemplo 10.** As EDP 3.3 e 3.5 são ambas lineares.

**Exemplo 11.** A EDP

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \cos(u) \quad (3.8)$$

é de primeira ordem e não linear pois apresenta o termo  $\cos(u)$  que não é do primeiro grau em  $u$ .

Uma equação diferencial linear é dita **homogênea** quando o termo que não contém a variável dependente é identicamente nulo. No caso da EDO representada pela equação 3.7, quando  $g(x) \equiv 0$ , e no caso da EDP representada por 3.6 quando,  $g(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$ , teremos equações homogêneas; caso contrário diremos que a equação é **não-homogênea**.

Observe que a função identicamente nula é sempre solução de qualquer equação diferencial linear homogênea.

Existem equações não-lineares que são conhecidas como equações **semilineares**. Isso porque a parte principal dessas Equações Diferenciais Parciais - parte da equação que contém as derivadas de maior ordem - é linear (IÓRIO, 2016). Neste trabalho vamos tratar apenas de equações lineares.

Os problemas que descrevem fenômenos que não dependem do tempo são chamados **estacionários**. Um exemplo deste caso está na equação 3.8. Já os problemas que dependem do tempo são chamados **não-estacionários** e podem ser exemplificados através das equações 3.3 e 3.5.

A expressão a esquerda da igualdade 3.6 descreve uma série de manipulações na função  $u(x)$  as quais podemos denotar simplesmente por  $L[u]$ . Desta forma, no caso das equações lineares, fica conveniente representar a equação por

$$L[u] = g(x)$$

onde  $L[u]$  representa a parte da  $F$  que é linear em relação a  $u$  e todas as derivadas de  $u$  enquanto  $g(x)$  é a parte de  $F$  que só depende da variável independente  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

**Exemplo 12.** A equação do calor 3.4 pode ser escrita como  $L[u] = g$ , onde

$$L[u] = \frac{\partial u}{\partial t} - k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

e  $g = g(x, y, z, t)$ .

**Exemplo 13.** A equação 3.5 pode ser escrita como  $L[w] = 0$ , onde

$$L[w] = EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

É possível pensar  $L[\cdot]$  como sendo um operador que transforma uma função  $u(x)$  em outra função  $L[u](x)$ . O operador  $L$  é um exemplo do que se chama de *operador diferencial*.

### 3.1.2 Linearidade e Princípio da Superposição

Dada uma EDP linear não homogênea  $L[u] = g(x)$ , a EDP homogênea  $L[u] = 0$  será chamada de *equação homogênea associada*.

Utilizando da linearidade do operador  $L$ , podemos perceber que qualquer combinação linear de soluções da equação  $L[u] = 0$  também é solução desta equação, ou seja, dados  $u_1 = u_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $u_2 = u_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  soluções da equação homogênea  $L[u] = 0$  temos que,

$$L[u_1 + \alpha u_2] = L[u_1] + \alpha L[u_2] = 0 + \alpha 0 = 0. \quad (3.9)$$

Dessa forma, sendo  $u_1, u_2, \dots, u_n$  soluções de  $L[u] = 0$  e  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  escalares então o *Princípio da Superposição* diz que

$$u = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$$

também é uma solução de  $L[u] = 0$ .

Baseado no princípio da superposição, o método de resolução chamado de **método de separação de variáveis** é uma técnica clássica e bastante eficaz na solução de várias EDPs e será utilizada na solução do exemplo proposto no capítulo 4.

### 3.1.3 Condições Iniciais e de contorno

Quando descrevemos matematicamente um fenômeno físico, precisamos enunciar condições suficientes para a determinação unívoca do processo.

Tanto as equações diferenciais ordinárias quanto as equações diferenciais parciais possuem, em geral, uma infinidade de soluções. Por isso, no caso em que um problema físico se reduz a uma equação diferencial, para a caracterização unívoca do processo é necessário agregar à equação certas condições complementares.

Sob hipóteses bastante gerais, para uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, a solução unívoca pode ser determinada pelas condições iniciais, ou seja, fixando os valores da função e da sua derivada primeira no valor “inicial” do argumento. O problema de se encontrar a solução de uma equação diferencial que satisfaça as condições iniciais é chamado de *problema de valor inicial* ou Problema de Cauchy. Existem também outras formas de se definir estas condições complementares como, por exemplo, quando se fixa os valores da função em dois pontos. O problema que resulta neste caso é chamado de *problema de valor de contorno*.

**Exemplo 14.** Determine uma solução do problema de valor de contorno (PVC)

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0, & y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \end{cases}$$

sabendo que a solução geral é

$$y(x) = A \sin(2x) + B \cos(2x)$$

**Solução:** Note que

$$\begin{aligned} y\left(\frac{\pi}{8}\right) &= A \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) + B \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}A + \frac{\sqrt{2}}{2}B \\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) &= A \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + B \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}A + \frac{1}{2}B \end{aligned}$$

Além disso, para satisfazer as condições de contorno  $y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$  e  $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$  devemos ter

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2}A + \frac{\sqrt{2}}{2}B &= 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A + \frac{1}{2}B &= 1 \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos

$$A = -B = \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$$

Para uma equação diferencial parcial também são possíveis diversos tipos de condições complementares, sendo as condições iniciais e de contorno as mais usadas.

Os exemplos a seguir trazem Equações Diferenciais Parciais bem conhecidas associadas com algumas condições iniciais e de contorno.

**Exemplo 15.**

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (3.10)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (3.11)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \quad (3.12)$$

A equação 3.10 controla o fluxo de calor em uma barra de seção reta uniforme (área é muito pequena quando comparada ao seu comprimento) de comprimento  $L$ . Neste problema temos duas condições complementares. A primeira se refere a equação 3.11 que diz respeito a condição de contorno onde a temperatura nas extremidades da barra  $x = 0$  e  $x = L$  é mantida a temperatura  $0^\circ\text{C}$  para todo  $t$ . A segunda está relacionada a 3.12 configurando a condição inicial, ou seja, a distribuição inicial de temperatura  $f(x)$  (NAGLE; SAFF; SNIDER, 2012, p.453).

**Exemplo 16.**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (3.13)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (3.14)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L, \quad (3.15)$$

Neste exemplo, apresentamos um modelo para a dinâmica de uma corda vibrante com comprimento  $L$ , presa nas pontas, vibrando em um plano vertical. A equação (3.13) é a equação da onda. A equação (3.14) representa as condições de fronteira (de contorno) em que suas extremidades  $x = 0$  e  $x = L$  são mantidas fixas. As equações dadas por 3.15 especificam o deslocamento inicial  $f(x)$  e a velocidade inicial  $g(x)$  de cada ponto na corda. Como esta equação é de segunda ordem em relação à variável  $t$ , são necessárias duas condições iniciais (IÓRIO, 2016, p.15).

### 3.1.4 Produto Interno

Um conceito importante que existe no  $\mathbb{R}^3$  é o *produto escalar* (se  $v = (a_1, b_1, c_1)$  e  $w = (a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$ , então  $v \cdot w = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$ ) que é usado para definir a condição de ortogonalidade ( $v \cdot w \in \mathbb{R}^3$  são ortogonais se  $v \cdot w = 0$ ).

O conceito que generaliza o produto escalar para um espaço vetorial de funções é o conceito de *produto interno*, que permitirá trabalhar com a noção de perpendicularidade também entre funções.

**Definição 3.** Seja  $E$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ . Um *produto interno* sobre  $E$  é uma aplicação  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  tal que valem as seguintes propriedades:

- i)  $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle$
- ii)  $\langle \mathbf{k}\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \mathbf{k} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ ,  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}$  é um escalar

iii)  $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$  se  $\mathbf{u}_1 = 0$  e  $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle > 0$  se  $\mathbf{u} \neq 0$

iv)  $\langle \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \rangle + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$

**Exemplo 17.** Sejam  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . Então

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

defina um produto interno em  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 18** (Produto Interno de funções). Sejam  $f$  e  $g$  funções reais contínuas definidas em um intervalo  $[a, b]$ <sup>1</sup> O produto interno das funções  $f$  e  $g$  em  $[a, b]$  é o número

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx. \quad (3.16)$$

A integral definida do produto de funções contínuas  $f$  e  $g$  satisfaz as propriedades da [definição 3](#) determinando então um **produto interno entre funções** (ZILL; CULLEN, 2001).

### 3.1.5 Funções Ortogonais

Da mesma forma que dois vetores  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$  são ortogonais quando o produto interno entre eles é zero, podemos definir as **funções ortogonais**.

**Definição 4.** As funções contínuas  $f$  e  $g$  são *ortogonais* em um intervalo  $[a, b]$  se

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Diremos ainda que a função  $f$  está *normalizada* quando o produto interno de  $f$  com ela mesma for igual a 1, isto é,

$$\int_a^b f(x)f(x)dx = 1.$$

**Definição 5.** Um conjunto de funções contínuas com valores reais  $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots\}$  é *ortogonal* em um intervalo  $[a, b]$  se

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0, \quad i \neq j.$$

Quando esse conjunto de funções, além de ser ortogonal, possui todas os elementos normalizados, dizemos que o conjunto é ortonormal.

<sup>1</sup> Pode ser qualquer intervalo até mesmo  $(-\infty, +\infty)$ , desde que a integral [3.16](#) convirja.

**Definição 6.** Um conjunto de funções contínuas  $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots\}$  é dito *ortonormal* em  $[a, b]$  quando

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \delta_{ij}$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j, \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

## 3.2 Conceitos básicos de Física

A fim de tornar a leitura deste trabalho autossuficiente, revisaremos alguns conceitos da física que usaremos no próximo capítulo, com o objetivo de facilitar a compreensão das hipóteses matemáticas a serem estabelecidas.

### Barras

São elementos onde o comprimento longitudinal é bem maior que sua dimensão transversal, suportando carregamentos aplicados perpendicularmente. Exemplos: vigas e pilares. São classificadas de acordo com a forma com que estão apoiadas e a localização desses suportes. Por exemplo: uma viga simplesmente apoiada é suportada por um apoio fixo e outro móvel, uma viga em balanço é uma extremidade engastada e outra livre como é o caso da barra que será apresentada neste trabalho. Conforme essa classificação, cada barra apresentará as condições de contorno que representam essa configuração.

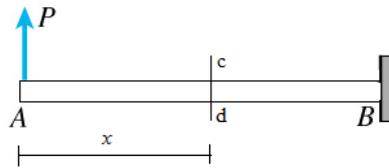
Quando uma força é aplicada, a barra desenvolve uma força de cisalhamento ( $V$ ) e um momento fletor ( $M$ ). O momento fletor, vulgarmente, é um esforço que tende a curvar uma barra e a força de cisalhamento tende a fazer um corte no objeto. Assim, são criadas tensões e deformações em seu interior. [Hibbeler \(2006\)](#) diz que “o comportamento de qualquer barra deformável sujeita a um momento fletor provoca o alongamento do material na parte inferior da barra e a compressão do material na porção superior da barra.”

Para determinarmos essas tensões e deformações é necessário primeiramente encontrar as forças e os momentos que atuam nas seções transversais da barra. Para isso, vamos analisar uma barra em balanço em que uma força  $P$  é aplicada na sua extremidade livre conforme [Figura 2](#).

Analisando as duas partes da barra quando é feito um corte na seção transversal  $cd$ , observamos que ela se mantém em equilíbrio devido a força  $P$  e as tensões que agem nesta seção.

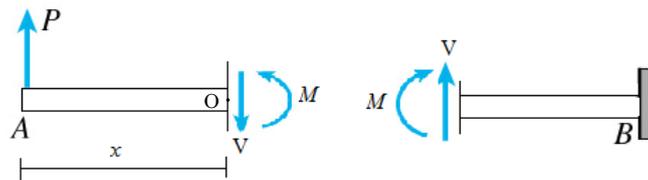
Para que tal corpo seja mantido em equilíbrio é necessário que a resultante dessas tensões mantenha essa situação. As resultantes de tensão podem ser calculadas a partir das equações de equilíbrio da estática. Segundo [Hibbeler \(2006, p. 2\)](#), “o equilíbrio de um corpo

Figura 2: Barra sofrendo ação de P



Fonte: Adaptado de Gere (2003)

Figura 3: Corte na seção transversal cd da barra com força de cisalhamento V e o momento fletor M



Fonte: Adaptado de Gere (2003)

exige um **equilíbrio de forças**, para impedir a translação ou um movimento acelerado do corpo ao longo de uma trajetória reta ou curva, e um **equilíbrio de momentos**, para impedir que o corpo gire.”

Assim, para o equilíbrio do corpo é necessário que  $\sum F = 0$  e  $\sum M_O = 0$ , sendo  $\sum F$  a soma de todas as forças que agem sobre o objeto e  $\sum M_O$  a soma dos momentos em torno do ponto  $O$  dentro ou fora do corpo. De acordo com o eixo em que as forças atuarão podemos reescrever as equações da seguinte maneira:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

De acordo com a [Figura 3](#), fazemos a somatória de forças atuantes no eixo de  $y$  e dos momentos na seção de corte  $cd$ , obtendo

$$\sum F_y = 0 \quad P - V = 0 \Rightarrow P = V$$

$$\sum M = 0 \quad M - Px = 0 \Rightarrow M = Px$$

em que  $x$  é a distância da extremidade livre da barra à seção  $cd$  em que  $V$  e  $M$  serão determinados. Os sinais das tensões e momentos serão abordados mais adiante na dedução da equação da barra.

A partir dessas resultantes de tensão, é possível analisar o comportamento estático da barra quando nesta é aplicada um carregamento, fazendo-a curvar. Essa **deflexão** da

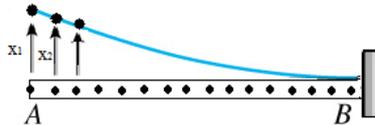
barra “em qualquer ponto ao longo do seu eixo é o deslocamento desse ponto em relação à sua posição original, medida na direção de  $y$ ” (GERE, 2003, p.227).

Contudo, podemos também estudar a dinâmica da barra em relação ao tempo. Ou seja, quando nesta barra há um carregamento e depois um descarregamento, ela tende a retornar a sua posição de equilíbrio, iniciando um movimento de vibração. Para Rao (2009, p.6) “qualquer movimento que se repita após um intervalo de tempo é denominado *vibração*. O balançar de um pêndulo e o movimento de uma corda dedilhada são exemplos típicos de vibração.”

Nesse momento é importante esclarecermos a diferença de sistemas discretos e contínuos na física. *Sistemas discretos* são aqueles sistemas que possuem um número finito de graus de liberdade - número mínimo de variáveis independentes necessárias para determinar as posições de todas as partes de um sistema. Por exemplo, o movimento do pêndulo simples pode ser determinado em termos do ângulo  $\theta$  formado com a linha vertical.

Já os *sistemas contínuos* são os que possuem uma infinidade de graus de liberdade. A barra mostrada na Figura 4 possui infinitos pontos de massa, assim será necessário uma infinidade de coordenadas para determinar sua deflexão. Dessa forma, consideramos que a barra apresenta infinitos graus de liberdade. Observe a figura:

Figura 4: Barra: sistema contínuo com número infinito de graus de liberdade



Assim fica fácil entender porque a modelagem da barra é equacionada por uma equação diferencial parcial, pois nesse sistema temos de considerar a distribuição contínua da massa e supor que cada elemento entra em movimento. Já sistemas discretos são modelados por equações diferenciais ordinárias.

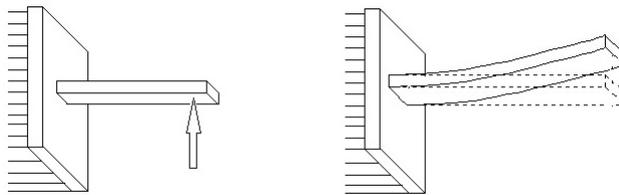
## 4 A equação da barra

### 4.1 Apresentação do problema

Neste capítulo apresentaremos o modelo de *Euler - Bernoulli*<sup>1</sup> para as vibrações transversais de uma barra homogênea e flexível. No caso que estudaremos, a barra de comprimento  $L$  está engastada em uma extremidade e livre na outra. Denotaremos por  $w(x, t)$  a distância, no instante  $t$ , do ponto  $x \in [0, L]$  até a posição de equilíbrio da barra.

Quando na sua extremidade livre é aplicada uma força para cima, a barra sofre um deslocamento desenhando uma curva em relação a sua posição de equilíbrio. A partir deste perfil de posição, saindo do repouso a barra descreverá um movimento de vibração.

Figura 5: Barra com uma força aplicada em sua extremidade livre.



Na dedução da equação de Euler - Bernoulli, são usadas as seguintes hipóteses (HIBBELER, 2006):

- Consideremos elementos retos (prismas) cujo comprimento é muito maior que outras medidas;
- Os materiais são homogêneos lineares elásticos regidos pela Lei de Hooke<sup>2</sup> ;
- O plano  $xy$  é um plano de simetria da barra e todos os carregamentos atuam nesse plano (plano de flexão);
- A seção transversal da barra possui pelo menos um eixo de simetria, coincidente com o eixo vertical;
- A barra possui um eixo central reto coincidente com o eixo do  $x$ ;

<sup>1</sup> Denominada também de *teoria clássica das vigas* é uma equação diferencial parcial de quarta ordem que retorna características de deflexão de uma viga quando aplicada uma carga sobre ela. Assim, considera somente os efeitos do momento fletor. Jacob Bernoulli determinou que a curvatura é proporcional ao momento. No entanto, sua constante de proporcionalidade estava errada. Euler e Daniel Bernoulli, com base em seus estudos, foram os primeiros a unificar essas descobertas em uma só teoria.

<sup>2</sup> O material é elástico retornando às suas dimensões originais durante o descarregamento (GERE, 2003) e linear.

- Consideramos somente deformações devido à flexão pura, assim quaisquer deformações cortantes foram desprezadas;
- As seções perpendiculares ao eixo  $x$  permanecem planas após a deformação;

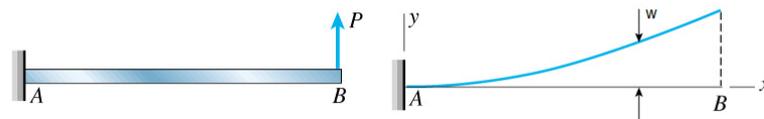
Em um primeiro momento, começaremos descrevendo a equação da curva de deflexão desta barra de forma estática e depois através da análise das equações de equilíbrio de um elemento infinitesimal chegaremos na equação proposta.

## 4.2 Análise da curva de deflexão da barra

Quando uma barra com alinhamento reto é carregada por uma força atuando para cima ou para baixo na sua extremidade livre, ela sofre um deslocamento nesta mesma direção desenhando uma curva. Esta é denominada *curva de deflexão*<sup>3</sup> e pode ser encontrada através de equações diferenciais. Para isso temos que expressar a deflexão que chamaremos de  $w(x, t)$  primeiramente em função de  $x$ , sob a ótica da estática.

Seguindo o desenvolvimento de Gere (2003), como ponto de referência usaremos um sistema de eixos coordenados com a origem na extremidade engastada da barra e o eixo das abscissas coincidindo com a posição de equilíbrio da barra. A deflexão  $w$  da barra em qualquer ponto ao longo do seu eixo será dada pelo deslocamento desse ponto na direção  $y$  com relação à sua posição de equilíbrio.

Figura 6: Barra com uma carga aplicada  $P$  e sua curva de deflexão



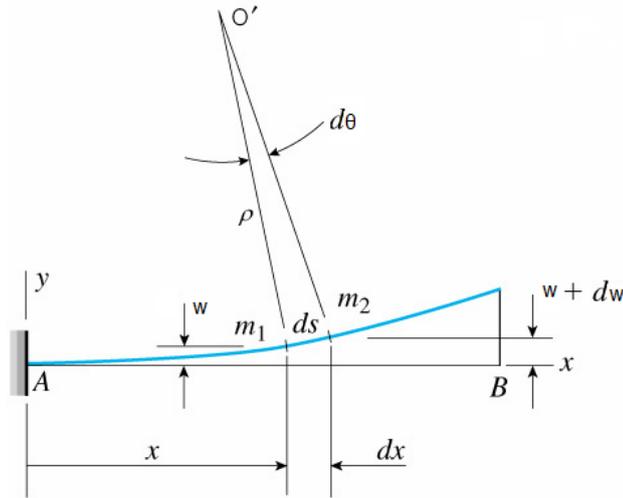
Fonte: Adaptado de Gere (2003)

Os pontos  $m_1$  e  $m_2$  são pontos da curva de deflexão em que  $m_1$  está localizado a uma distância  $x$  da origem estabelecida e o  $m_2$  a uma distância  $ds$  ao longo da curva e  $x + dx$  ao longo do eixo. Analisando a deflexão nestes pontos, vemos que em  $m_1$  temos  $w$  e em  $m_2$  temos  $w + dw$ , sendo  $dw$  o incremento na deflexão quando percorrermos  $m_1$  em direção a  $m_2$ .

O ponto  $O'$  é denominado centro de curvatura e é obtido através da intersecção entre as normais traçadas com relação as tangentes de  $m_1$  e  $m_2$  à curva de deflexão. O raio de curvatura  $\rho$  é dado pela distância entre o centro de curvatura  $O'$  e o ponto  $m_1$ .

<sup>3</sup> Euler obteve a equação diferencial da curva de deflexão de uma viga e utilizou-a para resolver muitos problemas, tanto de pequenas como de grandes deflexões.

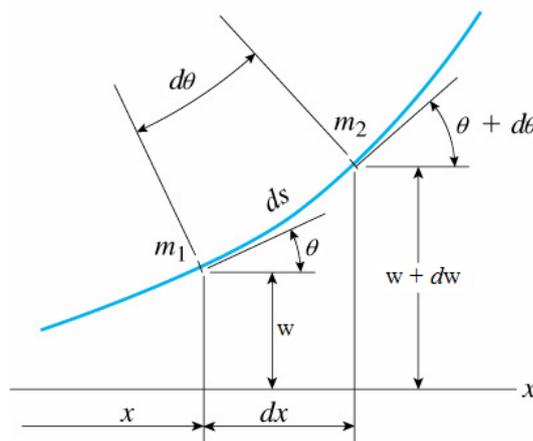
Figura 7: Curva de deflexão de uma barra



Fonte: Gere (2003)

Quando a barra é flexionada, linhas longitudinais se tornam curvas e linhas transversais sofrem rotação apesar de continuarem retas. Assim, não há somente deflexão ao longo do eixo mas também uma rotação. O ângulo de rotação  $\theta$  é o ângulo entre o eixo  $x$  e a tangente à curva de deflexão. Analisando a Figura 8 percebe-se que o ângulo de rotação em  $m_2$  é  $\theta + d\theta$ . Assim,  $d\theta$  é o ângulo infinitesimal entre as normais traçadas com relação às tangentes dos pontos.

Figura 8: Análise da curva de deflexão da barra



Fonte: Gere (2003)

Pelo triângulo obtido em  $O'm_1m_2$  na Figura 7 temos que

$$\rho d\theta = ds \tag{4.1}$$

em que  $ds$  é a distância infinitesimal entre  $m_1$  e  $m_2$  ao longo da curva de deflexão e  $d\theta$  é medido em radianos.

Outro ponto a ser analisado na barra é a sua curvatura  $\kappa$ . Se a força aplicada a barra for muito pequena, a barra sofrerá uma deformação mínima e assim ficará praticamente reta. Seu raio de curvatura será muito grande e a curvatura será muito pequena. Caso contrário, a flexão será maior por conta de uma força maior e então teremos um raio de curvatura menor e a curvatura maior. Percebemos então que a curvatura é definida como o inverso do raio de curvatura e é dada pela equação abaixo.

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \quad (4.2)$$

Dessa forma, podemos escrever a equação 4.1 em termos de 4.2 e assim obter

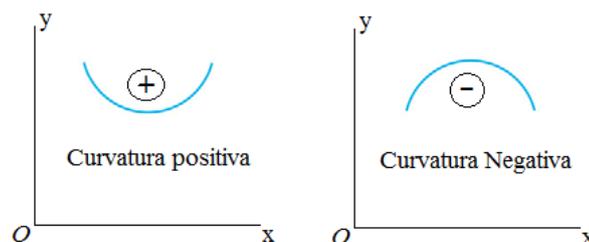
$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \quad (4.3)$$

Como convenção dos sinais para o momento fletor, força de cisalhamento e curvatura, utilizamos a mesma tratada em Gere (2003).

Figura 9: Convenção de Sinais para  $M$  e  $V$



Figura 10: Convenção de sinais para curvatura



Importante ressaltar que a deflexão é geralmente muito pequena se comparada ao comprimento de uma barra. Assim, conseqüentemente a curva de deflexão será quase horizontal e a distância  $ds$  ao longo da curva pode ser considerada aproximadamente igual à  $dx$  (HIBBELER, 2006, p.425). Nesses termos, podemos escrever então

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx} \quad (4.4)$$

Como a inclinação da curva de deflexão é dada pela primeira derivada  $\frac{dw}{dx}$  e  $dw$  e  $dx$  são infinitesimais temos que

$$\frac{dw}{dx} = \tan \theta \Rightarrow \theta = \arctan \frac{dw}{dx} \quad (4.5)$$

E como a curva de deflexão é quase horizontal então o ângulo de rotação  $\theta$  é um valor muito pequeno e com isso podemos aproximar  $\tan \theta$  por  $\theta$ . Assim, assumimos que o ângulo de rotação  $\theta$  é igual a  $\frac{dw}{dx}$  (GERE, 2003, p.451).

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{dw}{dx} \quad (4.6)$$

Derivando a equação 4.6 em relação à  $x$  obtemos

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2w}{dx^2} \quad (4.7)$$

Usando as equações 4.4 e 4.7 obtemos uma relação entre a curvatura  $\kappa$  e a sua deflexão, válida para qualquer barra desde que as rotações sejam pequenas.

$$\kappa = \frac{d^2w}{dx^2} \quad (4.8)$$

No início deste capítulo, propomos que o material da barra estudada fosse elástico linear e regido pela Lei de Hooke (HIBBELER, 2006). Assim, a curvatura  $\kappa$  é

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (4.9)$$

em que  $M$  é o momento fletor,  $EI$  é a rigidez de flexão.

Analisando as equações 4.8 e 4.9 obtemos a equação da curva de deflexão básica de uma barra.

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (4.10)$$

A partir dessa configuração, a barra entra em movimento e teremos a deflexão da curva em relação ao tempo conforme Rao (2009) apresenta. Assim, a equação 4.10 será reescrita como

$$EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = M(x, t) \quad (4.11)$$

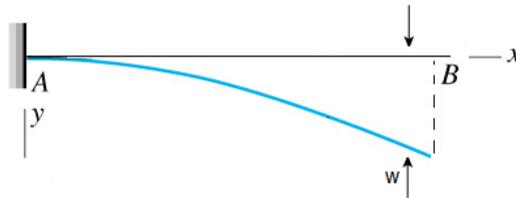
**Exemplo 19.** Uma barra homogênea de comprimento  $L$  suporta uma carga  $P$  na sua extremidade livre no sentido negativo (Figura 11). Determine a equação da curva de deflexão para a barra sabendo que a sua outra extremidade é fixa e  $EI$  é constante.

Figura 11: Barra sofrendo ação da carga  $P$  apontada para baixo



**Solução:** A barra em balanço mostrada na [Figura 11](#) está sujeita a uma força vertical em sua extremidade livre que provocará um deslocamento em relação ao seu eixo de equilíbrio. Iremos determinar a equação da curva de deflexão para a figura, considerando apenas  $w$  em relação à  $x$  visto que o processo neste caso é estático.

Figura 12: Curva de deflexão da barra quando esta sofre a ação da carga  $P$



De acordo com [Whitney \(1999\)](#) o momento fletor  $M$  agindo na direção positiva será dado por  $M = -P(L - x)$ . Substituindo na equação [4.10](#) obteremos

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -P(L - x). \quad (4.12)$$

Para resolver a equação diferencial acima iremos utilizar do **método das integrações sucessivas**, onde integraremos a primeira vez para obter a inclinação  $w'$  e depois para obter a deflexão  $w$ . Assim, integrando a equação [4.12](#) a primeira vez teremos

$$EI \frac{dw}{dx} = -PLx + \frac{Px^2}{2} + C_1 \quad (4.13)$$

Integrando novamente

$$EIw = -\frac{PLx^2}{2} + \frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2 \quad (4.14)$$

Nestas integrações aparecem as constantes  $C_1$  e  $C_2$ , as quais serão obtidas através das condições de contorno relacionadas à extremidade fixa da barra.

Em  $x = 0$ , ou seja, no suporte da barra, tanto a deflexão  $w$  quanto a inclinação  $w'$  são zero. Então, a condição de contorno  $w'(0) = 0$  quando substituída na equação [4.13](#) nos retornará o coeficiente de integração  $C_1$ .

$$-PLx + \frac{Px^2}{2} + C_1 = 0$$

Assim, obtemos imediatamente  $C_1 = 0$ . Do mesmo modo, o coeficiente  $C_2$  será encontrado a partir da condição de contorno  $w(0) = 0$  não existindo deflexão no suporte da barra.

$$-\frac{PLx^2}{2} + \frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2 = 0$$

Quando essa condição é aplicada na equação 4.14 obtemos  $C_2 = 0$ . Portanto, a equação da curva é dada por

$$w = -\frac{Px^2}{6EI}(3L - x) \quad (4.15)$$

e seu deslocamento máximo ocorre na sua extremidade livre, ou seja,  $x = L$ .

$$w = -\frac{PL^3}{3EI}$$

### 4.3 Análise do equilíbrio das forças

Nesta seção iremos analisar o comportamento dinâmico da barra. Através das equações de equilíbrio de um elemento infinitesimal da barra  $dx$  é possível obter a equação que a modela.

Figura 13: Barra sofrendo ação de uma força distribuída

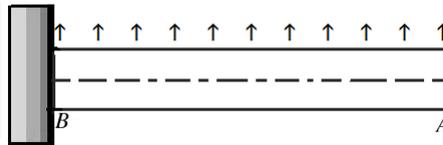
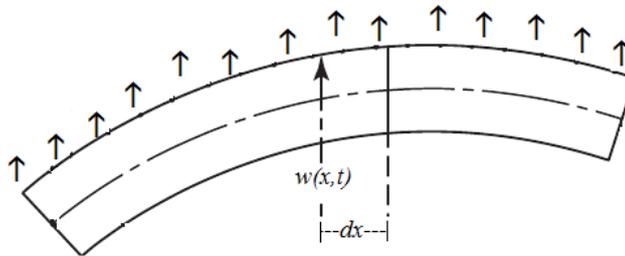


Figura 14: Curva de deflexão da barra



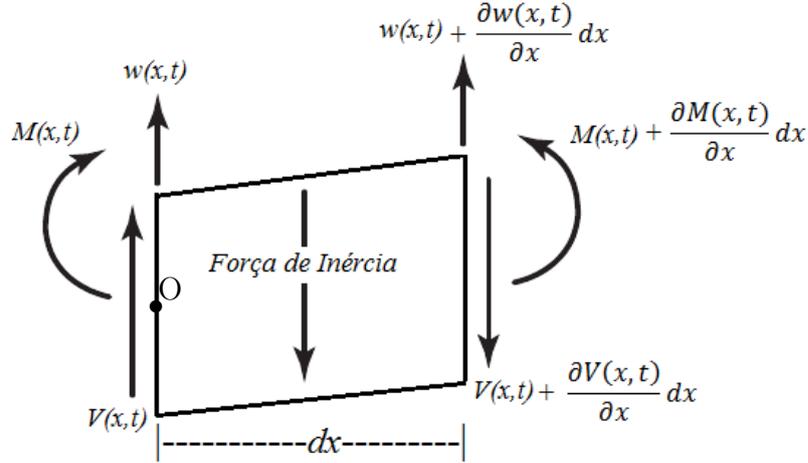
Com base na Figura 15, temos que,  $M(x, t)$  é o momento fletor que atua em uma seção transversal da barra,  $V(x, t)$  a força de cisalhamento,  $f(x, t)$  a força externa por unidade de comprimento da barra e  $w(x, t)$  o deslocamento transversal em  $x$  com relação à  $t$ . Podemos estabelecer as equações de equilíbrio de forças e momentos de um elemento infinitesimal  $dx$  da barra através da análise do somatório de forças e de momentos dados por  $\sum F$  e  $\sum M$  seguindo o desenvolvimento de Rao (2009).

Analisando o equilíbrio das forças na direção vertical, teremos a seguinte equação:

$$V(x, t) - \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} dx - V(x, t) - \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx + f(x, t) dx = 0 \quad (4.16)$$

em que

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} dx$$

Figura 15: Análise do equilíbrio de forças em um elemento  $dx$  da barra


é a força de inércia no elemento da barra,  $\rho$  é a densidade da massa e  $A(x)$  é a área da seção transversal da barra.

A equação do  $\sum M$  em relação ao ponto  $O$  resulta:

$$M(x, t) + \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx - \left( V(x, t) + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} dx \right) dx + f(x, t) dx \frac{dx}{2} - M(x, t) = 0 \quad (4.17)$$

Se desprezarmos os termos que envolvem potências ao quadrado de  $dx$  (RAO, 2009) e fazendo algumas simplificações, as equações 4.16 e 4.17 podem ser escritas como

$$-\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (4.18)$$

$$V(x, t) = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} \quad (4.19)$$

A equação 4.19 pode ser substituída na 4.18 e obteremos

$$-\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (4.20)$$

Conforme foi visto na seção anterior, a equação da curva de deflexão em relação ao momento fletor é dada por 4.11. Assim, teremos

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (4.21)$$

Como estamos analisando a barra uniforme,  $EI$  e  $\rho A(x)$  são constantes, além de  $f(x, t) = 0$ . Podemos então reescrever a equação acima como

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.22)$$

resultando na equação desejada para modelar a dinâmica da barra flexível engastada em uma extremidade e livre na outra.

As condições de contorno estão relacionadas às deflexões e inclinações nos suportes da barra e ao momento fletor e força de cisalhamento na extremidade livre, sendo representados pela segunda e terceira derivada parcial respectivamente. Neste trabalho, a barra está engastada em uma extremidade e livre na outra, dessa forma, teremos duas condições de contorno para cada extremidade da barra. Logo,

$$w(0, t) = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0 \qquad (4.23)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L, t) = 0 \qquad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(L, t) = 0 \qquad (4.24)$$

Essas condições de contorno possibilitam encontrar as constantes de integração que aparecerão na solução da equação.

Já as condições iniciais revelam as configurações de posição e velocidade da barra em  $t = 0$ .

$$w(x, 0) = f(x) \qquad (4.25)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = g(x) \qquad (4.26)$$

Note que  $w(x, 0) = f(x)$  representa a posição de partida da barra, e  $\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = g(x)$  é a sua velocidade no instante inicial. No exemplo que apresentaremos no final deste capítulo, escolheremos a função  $f(x)$  relacionada com o perfil encontrado na [Equação 4.15](#) e a função  $g(x)$  será tomada identicamente nula, representando que a barra partirá do repouso.

## 4.4 Soluções da equação de *Euler-Bernoulli*

Um método bastante utilizado para resolver equações diferenciais parciais é o chamado *método de separação de variáveis* ([NAGLE; SAFF; SNIDER, 2012](#)). Para a equação que estamos estudando, esta técnica pressupõe que as soluções  $w(x, t)$  possam ser escritas como um produto de duas funções  $X(x)$  e  $T(t)$ , cada uma dependendo apenas de uma das variáveis independentes, isto é

$$w(x, t) = X(x)T(t). \qquad (4.27)$$

Afim de substituir a expressão [4.27](#) na equação [4.21](#), inicialmente, vamos determinar as derivadas parciais de  $w$ . Assim, teremos

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = X^{(4)}(x)T(t) \qquad (4.28)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = X(x)T''(t). \qquad (4.29)$$

Fazendo a substituição de 4.28 e 4.29 em 4.21 obteremos

$$EIX^{(4)}(x)T(t) + \rho AX(x)T''(t) = 0$$

e depois de algumas manipulações algébricas, a equação será

$$\frac{T''(t)}{\left(\frac{EI}{\rho A}\right)T(t)} = -\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)}. \quad (4.30)$$

As funções do lado direito dependem apenas de  $x$  e as do lado esquerdo apenas de  $t$  e ainda assim são iguais. Isso só é possível se os dois membros são iguais a uma constante. Assim,

$$\frac{T''(t)}{\left(\frac{EI}{\rho A}\right)T(t)} = -\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = -\lambda$$

onde  $\lambda = \text{constante}$ .

Em lugar da equação diferencial parcial, obteremos duas equações diferenciais ordinárias que seguem:

$$\begin{cases} X^{(4)}(x) = \lambda X(x) & (4.31) \\ T''(t) = -\left(\frac{EI}{\rho A}\right)\lambda T(t) & (4.32) \end{cases}$$

Para resolver as equações ordinárias acima iremos utilizar de algumas definições do capítulo anterior. Apresentaremos as soluções para a função  $X$  e  $T$  separadamente para um melhor entendimento e desenvolvimento dos cálculos.

#### 4.4.1 Soluções para a função $X(x)$

A equação 4.31 é uma equação diferencial ordinária homogênea de quarta ordem com quatro condições de contorno que decorrem das condições de contorno 4.23 e 4.24 estudadas anteriormente.

De acordo com a primeira condição de contorno em que  $w(0, t) = 0$  temos que  $w(0, t) = X(0)T(t) = 0$  e como o tempo  $t$  está variando então  $T(t) \neq 0$ . Logo, para a equação fazer sentido então  $X(0) = 0$ . Faremos o mesmo para encontrarmos as outras condições de contorno para a equação  $X(x)$ . Teremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) &= X'(x)T(t) \\ \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) &= X'(0)T(t) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) &= X''(x)T(t) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L, t) &= X''(L)T(t) = 0 \Rightarrow X''(L) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x, t) &= X'''(x)T(t) \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(L, t) &= X'''(L)T(t) = 0 \Rightarrow X'''(L) = 0\end{aligned}$$

Assim, obtemos a equação

$$X^{(4)}(x) - \lambda X(x) = 0$$

com condições de contorno

$$X(0) = X'(0) = X''(L) = X'''(L) = 0.$$

Para resolvê-la utilizaremos da equação auxiliar  $r^4 - \lambda = 0$  que pode ser escrita da forma  $(r^2 - \sqrt{\lambda})(r^2 + \sqrt{\lambda}) = 0$  e como solução supomos  $X(x) = Ce^{rx}$ . Como raízes da equação teremos duas raízes reais distintas e duas raízes complexas

$$\begin{aligned}r_{1,2} &= \pm \sqrt[4]{\lambda} \\ r_{3,4} &= \pm i \sqrt[4]{\lambda}\end{aligned}$$

Por consequência, a solução (complexa) segundo [Rao \(2009, p.283\)](#) será dada por

$$X(x) = \bar{A}e^{ix\sqrt[4]{\lambda}} + \bar{B}e^{-ix\sqrt[4]{\lambda}} + Ce^{x\sqrt[4]{\lambda}} + De^{-x\sqrt[4]{\lambda}} \quad (4.33)$$

onde  $\bar{A}, \bar{B}, C, D$  são constantes.

Usando constantes  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  adequadas, a equação [4.33](#) pode ser expressada como uma função real de variável real da seguinte forma:

$$X(x) = A \cosh(\sqrt[4]{\lambda}x) + B \sinh(\sqrt[4]{\lambda}x) + C \cos(\sqrt[4]{\lambda}x) + D \sin(\sqrt[4]{\lambda}x) \quad (4.34)$$

Utilizando as condições de contorno

$$X(0) = 0, X'(0) = 0, X''(L) = 0, X'''(L) = 0$$

iremos determinar os coeficientes. Quando  $X(0) = 0$  obteremos

$$X(0) = A \cosh(0) + B \sinh(0) + C \cos(0) + D \sin(0)$$

o que implica

$$C = -A. \quad (4.35)$$

Substituindo  $X'(0) = 0$  temos

$$X'(0) = A \sinh(0) + B \cosh(0) - C \sin(0) + D \cos(0)$$

o que implica

$$D = -B$$

$X''(L) = 0$  resulta em

$$A \cosh(\sqrt[4]{\lambda}L) + B \sinh(\sqrt[4]{\lambda}L) - C \cos(\sqrt[4]{\lambda}L) - D \sin(\sqrt[4]{\lambda}L) = 0 \quad (4.36)$$

Substituindo 4.35 na equação 4.36 ela resultará

$$A(\cosh(\sqrt[4]{\lambda}L) + \cos(\sqrt[4]{\lambda}L)) + B(\sinh(\sqrt[4]{\lambda}L) + \sin(\sqrt[4]{\lambda}L)) = 0 \quad (4.37)$$

Utilizando a última condição de contorno  $X'''(L) = 0$  e substituindo  $D = -B$  teremos

$$A(\sinh(\sqrt[4]{\lambda}L) - \sin(\sqrt[4]{\lambda}L)) + B(\cosh(\sqrt[4]{\lambda}L) + \cos(\sqrt[4]{\lambda}L)) = 0 \quad (4.38)$$

Dessa forma obteremos um sistema homogêneo de equações dado por 4.37 e 4.38:

$$\begin{cases} A (\cosh(\sqrt[4]{\lambda}L) + \cos(\sqrt[4]{\lambda}L)) + B (\sinh(\sqrt[4]{\lambda}L) + \sin(\sqrt[4]{\lambda}L)) \\ A (\sinh(\sqrt[4]{\lambda}L) - \sin(\sqrt[4]{\lambda}L)) + B (\cosh(\sqrt[4]{\lambda}L) + \cos(\sqrt[4]{\lambda}L)) \end{cases} = 0$$

Como estamos interessados em soluções não triviais, o determinante deste sistema deverá ser nulo. Assim,

$$\det = \begin{vmatrix} \cosh(\sqrt[4]{\lambda}L) + \cos(\sqrt[4]{\lambda}L) & \sinh(\sqrt[4]{\lambda}L) + \sin(\sqrt[4]{\lambda}L) \\ \sinh(\sqrt[4]{\lambda}L) - \sin(\sqrt[4]{\lambda}L) & \cosh(\sqrt[4]{\lambda}L) + \cos(\sqrt[4]{\lambda}L) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.39)$$

O determinante 4.39 resultará na equação

$$\cosh(\mu) \cos(\mu) = -1. \quad (4.40)$$

onde  $\mu = \sqrt[4]{\lambda}L$ .

A equação 4.40 tem infinitas raízes que denotaremos  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$

As primeiras quatro raízes desta equação são dadas abaixo conforme Rao (2009)

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{\lambda_1}L &= 1.875104, \\ \sqrt[4]{\lambda_2}L &= 4.694091, \\ \sqrt[4]{\lambda_3}L &= 7.854757, \\ \sqrt[4]{\lambda_4}L &= 10.995541, \end{aligned}$$

Dessa forma para cada  $n \in \mathbb{N}$  teremos:

$$X^{(4)}(x) - \lambda_n X(x) = 0 \quad (4.41)$$

$$T'''(t) + \frac{EI}{\rho A} \lambda_n T(t) = 0 \quad (4.42)$$

As soluções de  $X_n(x)$  são chamadas de autofunções e são conhecidas como modo normal ou função característica (RAO, 2009, p.283), possui a forma a seguir

$$X_n(x) = A_n(\cosh(\sqrt[4]{\lambda_n}x) - \cos(\sqrt[4]{\lambda_n}x)) + B_n(\sinh(\sqrt[4]{\lambda_n}x) - \sin(\sqrt[4]{\lambda_n}x)) \quad (4.43)$$

As constantes  $A_n$  e  $B_n$  serão obtidas através das soluções das equações 4.37 e 4.38

$$A_n(\cosh(\sqrt[4]{\lambda_n}L) + \cos(\sqrt[4]{\lambda_n}L)) + B_n(\sinh(\sqrt[4]{\lambda_n}L) + \sin(\sqrt[4]{\lambda_n}L)) = 0$$

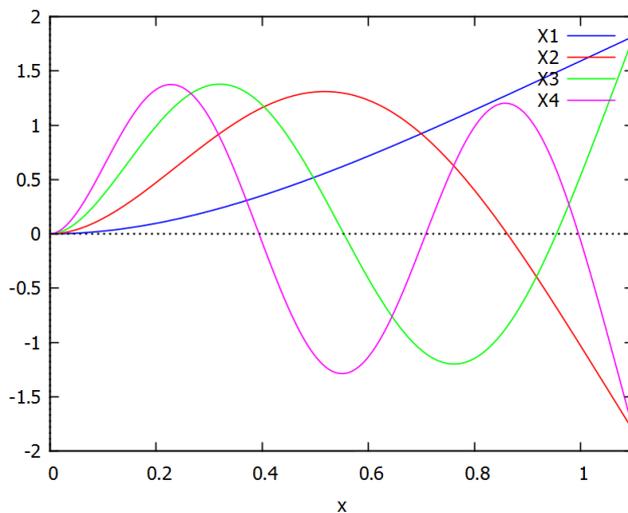
$$A_n(\sinh(\sqrt[4]{\lambda_n}L) - \sin(\sqrt[4]{\lambda_n}L)) + B_n(\cosh(\sqrt[4]{\lambda_n}L) + \cos(\sqrt[4]{\lambda_n}L)) = 0$$

O sistema acima é um sistema possível e indeterminado que resulta em

$$B_n = A_n \frac{\sin(\sqrt[4]{\lambda_n}L) - \sinh(\sqrt[4]{\lambda_n}L)}{\cos(\sqrt[4]{\lambda_n}L) + \cosh(\sqrt[4]{\lambda_n}L)} \quad (4.44)$$

Assim, substituindo a equação 4.44 de  $B_n$  em 4.43 teremos as possíveis funções características ou autofunções  $X_n$ . Na Figura 16 podemos ver o gráfico das primeiras quatro autofunções com  $A_n = 1/\sqrt{L}$  e  $L = 1,1$  metros.

Figura 16: Primeiras quatro autofunções da equação 4.41 para  $L = 1,1$  metros.



Para seguir adiante na nossa solução vamos utilizar das relações de ortogonalidade. Para isso iremos mostrar que as autofunções  $X(x)$  são ortogonais.

### Ortogonalidade das autofunções $X_n(x)$

Sejam  $X_i$  e  $X_j$  as autofunções que correspondem a  $\lambda_i$  e  $\lambda_j$  com  $i \neq j$ . Como  $X_i$  e  $X_j$  são soluções da equação

$$X^{(4)} - \lambda X = 0$$

então podemos escrever:

$$X_i^{(4)} - \lambda_i X_i = 0 \quad (4.45)$$

e

$$X_j^{(4)} - \lambda_j X_j = 0 \quad (4.46)$$

Multiplicando a equação 4.45 por  $X_j$  e a equação 4.46 por  $X_i$  e subtraindo as equações resultantes uma da outra obtemos

$$X_i^{(4)} X_j - X_j^{(4)} X_i - X_i X_j (\lambda_i - \lambda_j) = 0 \quad (4.47)$$

Integrando a equação acima de 0 a  $L$

$$\begin{aligned} \int_0^L (X_i^{(4)} X_j - X_i X_j^{(4)}) dx &= (\lambda_i - \lambda_j) \int_0^L X_i X_j \\ \int_0^L X_i X_j &= \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \int_0^L (X_i^{(4)} X_j - X_i X_j^{(4)}) dx \\ \int_0^L X_i X_j &= \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \left( \int_0^L X_i^{(4)} X_j - \int_0^L X_i X_j^{(4)} dx \right) \end{aligned} \quad (4.48)$$

Fazendo integração por partes no lado direito da equação em  $\int_0^L X_i^{(4)} X_j$  acima teremos

$$\begin{aligned} \int_0^L X_i X_j dx &= \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \left( X_j X_i''' - \int_0^L X_i''' X_j' dx - \int_0^L X_i X_j^{(4)} dx \right) \\ \int_0^L X_i X_j dx &= \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \left( X_j X_i''' - X_j' X_i'' + \int_0^L X_i'' X_j'' dx - \int_0^L X_i X_j^{(4)} dx \right) \\ &= \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \left( X_j X_i''' - X_j' X_i'' + X_j'' X_i' - \int_0^L X_i' X_j''' dx - \int_0^L X_i X_j^{(4)} dx \right) \\ &= \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \left( X_j X_i''' - X_j' X_i'' + X_j'' X_i' - X_j''' X_i + \int_0^L X_i X_j^{(4)} dx - \int_0^L X_i X_j^{(4)} dx \right) \\ \int_0^L X_i X_j dx &= \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \left( X_j X_i''' - X_j' X_i'' + X_j'' X_i' - X_j''' X_i \right) \Big|_0^L \end{aligned} \quad (4.49)$$

Analisando as condições de contorno, podemos notar que o lado direito da equação acima será zero para qualquer combinação de condições de extremidade livre e engastada. Para uma extremidade livre, o momento fletor e o esforço cortante são iguais a zero, de modo que

$$X'' = 0$$

e

$$X''' = 0.$$

Para uma extremidade fixa, a deflexão e a inclinação são zero

$$X = 0$$

e

$$X' = 0.$$

Assim, cada termo da equação é zero em  $x = 0$  e  $x = L$  para qualquer condição de contorno (RAO, 2009). Portanto a equação reduz-se a

$$\int_0^L X_i X_j dx = 0 \quad (4.50)$$

provando a ortogonalidade das autofunções  $X_n$ .

Assim, usaremos  $A_n = \frac{1}{\sqrt{L}}$  para que as autofunções  $X_n$  fiquem ortonormais (BELLICANTA; GOMES, 2008), ou seja,

$$\int_0^L X_i(x) X_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (4.51)$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j, \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

#### 4.4.2 Soluções para a função $T(t)$

Para resolver a equação

$$T'' + \frac{EI}{\rho A} \lambda_n T = 0 \quad (4.52)$$

com condições iniciais

$$w(x, 0) = f(x) \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (4.53)$$

iremos utilizar da equação auxiliar  $r^2 + \frac{EI}{\rho A} \lambda_n = 0$  que terá como raízes  $r = \pm \sqrt{\frac{EI \lambda_n}{\rho A}} i$ . Assim, para cada  $n \in \mathbb{N}$  teremos as soluções

$$T_n(t) = a_n \cos\left(\sqrt{\frac{EI \lambda_n}{\rho A}} t\right) + b_n \sin\left(\sqrt{\frac{EI \lambda_n}{\rho A}} t\right) \quad (4.54)$$

Dado que a EDP 4.22 é linear e homogênea, a soma de soluções continua sendo solução. Suporemos então que a solução da equação 4.22 que satisfaz as condições de contorno 4.23, 4.24 e as condições iniciais 4.25 e 4.26 possa ser escrita da seguinte forma:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x). \quad (4.55)$$

Assim, o que resta é, a partir das condições iniciais, encontrar os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ .

Primeiramente, vamos utilizar da equação que envolve o deslocamento inicial da barra, ou seja,

$$w(x, 0) = f(x) \quad (4.56)$$

Substituindo  $t = 0$  na equação 4.55 e igualando a  $f(x)$  teremos:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(0) + b_n \operatorname{sen}(0) X_n(x) \quad (4.57)$$

ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x). \quad (4.58)$$

Para que a igualdade 4.58 faça sentido, precisamos supor que o perfil de deslocamento inicial possa ser expandido como uma série nas autofunções  $X_n$ .

Como as autofunções  $X_i(x)$  e  $X_j(x)$  se  $i \neq j$  correspondem a autovalores distintos, elas são ortonormais em relação ao produto interno então

$$\langle f(x), X_n \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k, X_n \right\rangle = \langle a_n X_n, X_n \rangle = a_n, \quad (4.59)$$

ou seja,

$$a_n = \int_0^L f(x) X_n \quad (4.60)$$

Para encontrar  $b_n$  usaremos a condição inicial que diz respeito a velocidade inicial, dada por  $g(x) = \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0)$ . Assim,

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(0) X_n(x) \\ g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( b_n \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \sqrt{\lambda_n} \right) X_n(x). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Novamente, supondo que  $g(x)$  possa ser expandida como uma série nas autofunções  $X_n$  e usando a relações de ortonormalidade destas autofunções teremos

$$\langle g(x), X_n \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \left( b_k \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \sqrt{\lambda_k} \right) X_k(x), X_n \right\rangle = \left\langle b_n \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \sqrt{\lambda_n} X_n, X_n \right\rangle = b_n \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \sqrt{\lambda_n}, \quad (4.62)$$

ou seja,

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \sqrt{\lambda_n}} \int_0^L g(x) X_n. \quad (4.63)$$

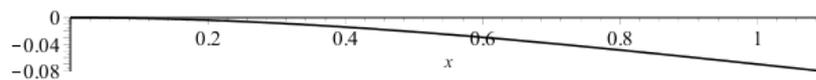
**Exemplo 20.** Neste exemplo resolveremos a equação 4.22 considerando parâmetros que simulam um caso real. Esses dados foram obtidos no laboratório de pesquisa NUMA pertencente ao IMEF - FURG. Assim, usaremos  $L = 1,1$  metros,  $\rho A = 0,1$  Kg/m e

$EI = 2,2N.m^2$ . Nas condições iniciais, usaremos como perfil inicial de deslocamento uma curva obtida a partir da curva de deflexão deduzida na equação 4.15 considerando a carga na extremidade livre da barra como sendo  $P = 0,4$  N. Substituindo  $P, L$  e  $EI$  em  $f(x) = -\frac{Px^2}{6EI}(3L - x)$  obteremos

$$f(x) = -\frac{1}{33}x^2(3,3 - x) \quad (4.64)$$

O gráfico da função 4.64 pode ser visto na Figura 17.

Figura 17: Gráfico do perfil inicial de deslocamento da barra sob uma carga de 0,4 N na extremidade livre.



Neste trabalho não discutiremos a questão se a função 4.64 admite ou não uma expansão do tipo 4.58 nas autofunções  $X_n$ . Entretanto, para finalizar os cálculos neste caso concreto, usaremos como perfil inicial de deslocamento apenas os quatro primeiros termos da série formal 4.58 com os coeficientes  $a_n$  calculados pela fórmula 4.60. Sendo assim, como perfil inicial de deslocamento usaremos

$$w(x, 0) = \bar{f}(x) \quad (4.65)$$

onde

$$\bar{f}(x) = a_1 X_1(x) + a_2 X_2(x) + a_3 X_3(x) + a_4 X_4(x) \quad (4.66)$$

Usando  $L = 1,1$  e um sistema de computação algébrica como o Maxima para calcular as

raízes da equação 4.40 obtemos

$$\begin{aligned}
 X_1(x) &= -0,953462 \cos(1,70464x) + 0,953462 \cosh(1,70464x) \\
 &\quad + 0,699929 \sin(1,70464x) - 0,699929 \sinh(1,70464x) \\
 X_2(x) &= -0,953462 \cos(4,26735x) + 0,953462 \cosh(4,26735x) \\
 &\quad + 0,971072 \sin(4,26735x) - 0,971072 \sinh(4,26735x) \\
 X_3(x) &= -0,953462 \cos(7,14069x) + 0,953462 \cosh(7,14069x) \\
 &\quad + 0,952722 \sin(7,14069x) - 0,952722 \sinh(7,14069x) \\
 X_4(x) &= -0,953462 \cos(9,99591x) + 0,953462 \cosh(9,99591x) \\
 &\quad + 0,953491 \sin(9,99591x) - 0,953491 \sinh(9,99591x)
 \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \int_0^L f(x)X_1 = -0,041062 \\
 a_2 &= \int_0^L f(x)X_2 = 0,001045 \\
 a_3 &= \int_0^L f(x)X_3 = -0,000133 \\
 a_4 &= \int_0^L f(x)X_4 = 0,000034
 \end{aligned}$$

A função  $\bar{f}(x)$  fica bastante parecida com a função  $f(x)$  como pode ser constatado na figura 18(a), na qual o gráfico das duas funções estão plotadas no mesmo sistema de coordenadas. Note que, visualmente, não se distingue uma função da outra. A diferença entre as funções  $f(x)$  e  $\bar{f}(x)$  pode ser melhor percebida na figura 18(b) onde está o gráfico de  $|f(x) - \bar{f}(x)|$ .

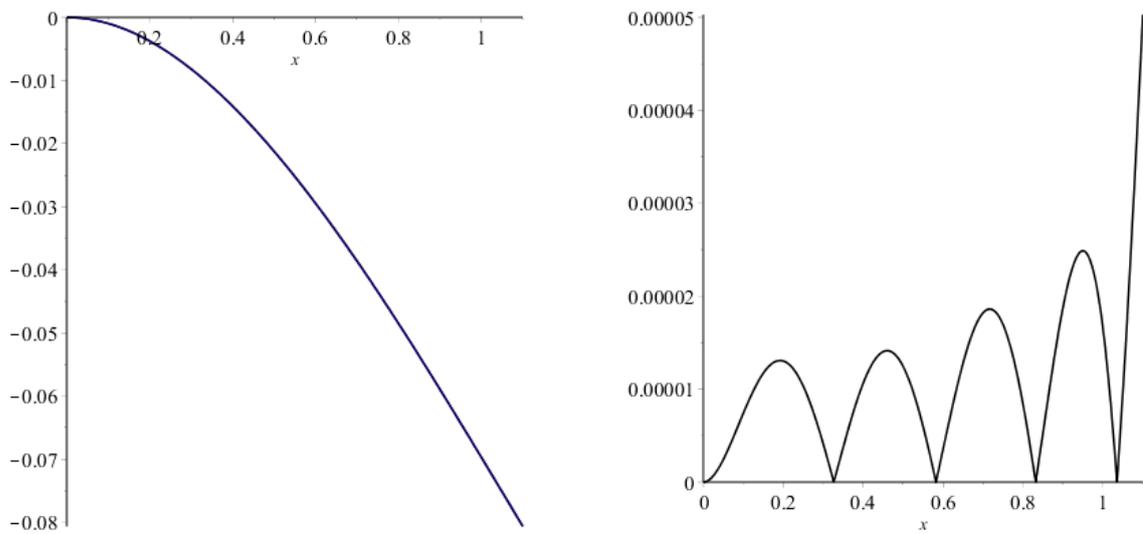
Como segunda condição inicial, usaremos

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = g(x) = 0 \quad (4.67)$$

indicando que barra parte do repouso, isto é, sem velocidade inicial. Isto implica, pela igualdade 4.63 que  $b_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Dessa forma, usando as condições iniciais 4.65 e 4.67 e usando a ortonormalidade das funções  $X_n$ , a solução para a equação 4.22 será

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^4 a_n \cos\left(\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \sqrt{\lambda_n t}\right) X_n \quad (4.68)$$



(a) Gráfico das funções  $f(x)$  e  $\bar{f}(x)$ . Note que as funções são praticamente coincidentes.

(b) Gráfico da função  $|f(x) - \bar{f}(x)|$ .

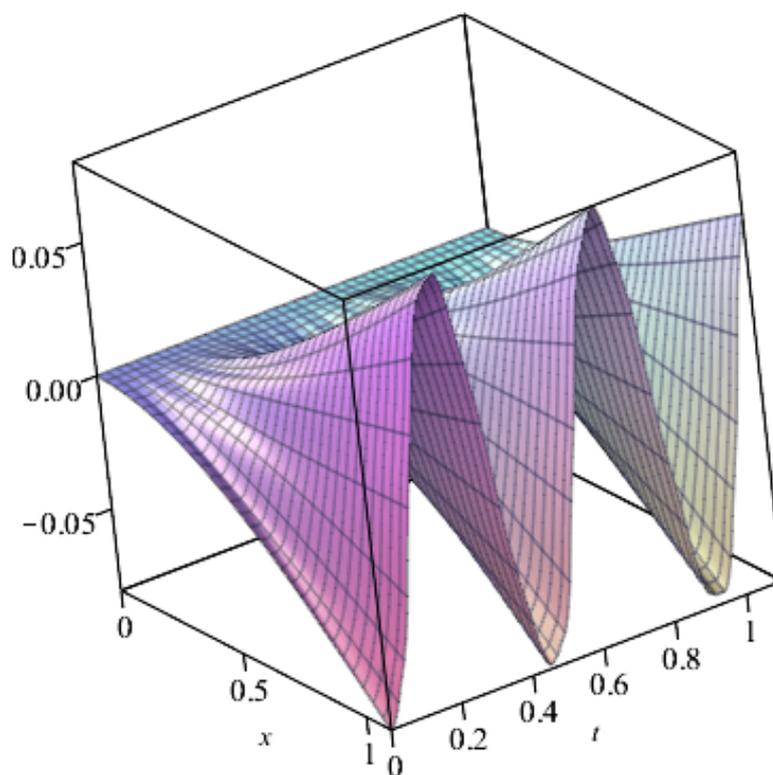
Figura 18: Comparação entre as funções  $f(x)$  e  $\bar{f}(x)$ .

onde

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\sqrt{\lambda_1} &= 2,90579 \cdot \sqrt{22} \\ \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\sqrt{\lambda_2} &= 18,21032 \cdot \sqrt{22} \\ \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\sqrt{\lambda_3} &= 50,98943 \cdot \sqrt{22} \\ \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\sqrt{\lambda_4} &= 99,91893 \cdot \sqrt{22}\end{aligned}$$

O gráfico da solução 4.68 pode ser visto na Figura 19 representando satisfatoriamente o comportamento esperado da solução.

Figura 19: Gráfico da solução do modelo de Euler-Bernoulli para a dinâmica de uma barra flexível.



Podemos observar o comportamento oscilatório da solução [4.68](#) onde, para cada ponto  $x_o \in (0, L)$  temos associada uma curva periódica  $w(x_o, t)$ , cuja amplitude aumenta quando  $x$  aumenta. O comportamento periódico reflete o fato do modelo não ter incorporado o atrito.

## 5 Conclusão

Através deste trabalho percebemos que as Equações Diferenciais surgiram da observação e necessidade de criar modelos que representassem a realidade. Em um primeiro momento estavam diretamente conectadas aos fenômenos físicos. Contudo o desenvolvimento do seu estudo mostrou que elas estão em diversas áreas do conhecimento podendo ser aplicadas na Biologia, Química e Economia. Essa aplicabilidade é que torna seu estudo atrativo e enriquecedor.

Além disso, não estamos nos referindo apenas as Equações Parciais que por sua estrutura conseguem se aproximar mais fielmente do objeto real, mas também das Ordinárias que como vimos são responsáveis por retratar sistemas importantes. Dessa forma, a grandeza que as Equações Diferenciais possuem no desenvolvimento de novas tecnologias ou no avanço das ciências como ferramenta se torna indiscutível. A matemática como instrumento de outras áreas vem crescendo dando oportunidades cada vez mais concretas a estudantes pesquisadores, característica de estudantes do bacharelado por exemplo.

Este trabalho buscou introduzir de forma simples e básica o assunto de Equações Diferenciais dando ênfase as parciais através da modelagem proposta. Aqui, mostramos a representação de um novo problema ao mesmo tempo diferente das equações parciais clássicas abordadas na sala de aula mas de resolução próxima a elas. Para um aluno de licenciatura este trabalho pode despertar o interesse e a curiosidade em aprofundar e desenvolver seu estudo além de, inicialmente, introduzir as principais ideias e conceitos que envolvem esse tema. Em se tratando de graduandos da engenharia por exemplo, o trabalho consegue aliar os conceitos matemáticos das aulas de cálculo e álgebra a disciplinas específicas do curso, aproximando esses conhecimentos e tornando a aprendizagem mais significativa conforme Ausubel propõe.

De qualquer maneira, o aluno que pretende aprofundar seu conhecimento no que diz respeito a Equações Diferenciais Parciais é um aluno que ao longo do tempo desenvolve uma visão holística da matemática. Isso porque o seu estudo envolve tanto uma parte analítica quanto a sua aplicação. Dessa maneira, esse aluno sendo um futuro professor, por exemplo, possui uma formação técnica diferenciada dos demais além de estar mais preparado para outras abordagens na sala de aula, possibilitando a construção de novas metodologias que facilitem o entendimento da matemática como a própria modelagem.

# Referências

- ALVES, M. B. *Equações Diferenciais Ordinárias em cursos de Licenciatura de Matemática-Formulação, Resolução de Problemas e Introdução à Modelagem Matemática*. 2008. 90f. Tese (Doutorado) — Dissertação de mestrado. Pontifícia Universidade Católica De Minas Gerais, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Área de Concentração: Matemática, 2008. Citado na página 18.
- ARAÚJO, J. E. de. *Equações diferenciais ordinárias e aplicações*. 2012. Citado na página 15.
- AUSUBEL, D. P. *Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva*. [S.l.: s.n.], 2003. v. 1. Citado 3 vezes nas páginas 10, 18 e 19.
- BASSANEZI, R. C. Modelling as a teaching-learning strategy. *For the Learning of Mathematics*, v. 14, p. 31, 1994. Citado na página 21.
- BASSANEZI, R. C. *Modelagem matemática: teoria e prática*. [S.l.: s.n.], 2015. Citado 3 vezes nas páginas 10, 16 e 21.
- BELLICANTA, L. S.; GOMES, S. C. P. Sobre o uso de sensores de deflexão para estimar a dinâmica de uma lâmina flexível. 2008. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 48.
- BORSSOI, A. H. Modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem: Possibilidade para uma educação mais significativa. 2004. Citado 3 vezes nas páginas 10, 18 e 20.
- BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. de. Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferenciais ordinárias. *Educação Matemática Pesquisa*, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo PUC-SP, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v. 6, n. 2, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.
- BOYCE, W.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. [S.l.]: Guanabara Dois, 1985. Citado 6 vezes nas páginas 10, 12, 13, 15, 21 e 22.
- D'AMBÓSIO, U. A matemática nas escolas. *Educação Matemática em Revista*, v. 9, n. 11, p. 29–33, 2002. Citado na página 20.
- ECONOMIA Matemática e Finanças. *Instituto Matemática Pura e Aplicada*, Rio de Janeiro, 2016. Disponível em: <[http://milenio.impa.br/novo/portugues/areas\\_economia.htm](http://milenio.impa.br/novo/portugues/areas_economia.htm)>. Acesso em: 29 nov. 2016. Citado na página 16.
- FIGUEIREDO, D. G. de. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 10, 12 e 14.
- GERE, J. M. *Mecânica dos materiais*. [S.l.]: Pioneira Thomsom Learning, 2003. Citado 8 vezes nas páginas 11, 32, 33, 34, 35, 36, 37 e 38.

- HIBBELER, R. C. *Resistência dos materiais*. 7. ed. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2006. Citado 6 vezes nas páginas 10, 11, 31, 34, 37 e 38.
- IÓRIO, V. *EDP um curso de graduação*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 10, 24, 26 e 29.
- MUNIZ, A. R. et al. Metodologia para o ensino de equações diferenciais no curso de engenharia química. *Salão de Iniciação Científica (12.: 2000: Porto Alegre). Livro de resumos. Porto Alegre: UFRGS, 2000.*, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 20.
- NAGLE, R. K.; SAFF, E. B.; SNIDER, A. D. *Equações Diferenciais*. 8. ed. São Paulo: Pearson, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 21, 29 e 42.
- OLIVEIRA, E. A. de; IGLIORI, S. B. C. Ensino e aprendizagem de equações diferenciais: um levantamento preliminar da produção científica. *EM TEIA/ Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v. 4, n. 2, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 10, 17 e 18.
- RAO, S. S. *Vibrações mecânicas*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2009. Citado 11 vezes nas páginas 10, 11, 13, 33, 38, 40, 41, 44, 45, 46 e 48.
- ROQUE, T. *História da matemática*. [S.l.]: Zahar, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 12, 14 e 15.
- SIMÕES, C. A. E. *Equações diferenciais na física*. Dissertação (Mestrado), 2014. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.
- STEWART, I. *Dezessete equações que mudaram o mundo*. [S.l.]: Zahar, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.
- WHITNEY, S. Vibrations of cantilever beams: Deflection, frequency, and research uses. *University of Nebraska-Lincoln*, v. 23, 1999. Citado na página 39.
- ZILL, D. G. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. [S.l.]: Cengage Learning Editores, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 10, 21, 23 e 25.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações diferenciais. vol. 2. Trad. Alfredo Alves de Farias*. [S.l.]: São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 10, 21 e 30.