

Wellington Tavares dos Santos

**A história do quinto postulado,
as geometrias não-euclidianas
e suas implicações no pensamento científico**

Rio Grande

Julho, 2016

Wellington Tavares dos Santos

**A história do quinto postulado,
as geometrias não-euclidianas
e suas implicações no pensamento científico**

Trabalho submetido por Wellington Tavares dos Santos como requisito parcial para conclusão do curso de Licenciatura em Matemática junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande – FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física

Curso de Matemática Licenciatura

Orientador: Leandro Sebben Bellicanta

Rio Grande

Julho, 2016

Ficha catalográfica

S237h Santos, Wellington Tavares dos.

A história do quinto postulado, as geometrias não-euclidianas e suas implicações no pensamento científico/ Wellington Tavares dos Santos. – 2016.

58 f.

Trabalho de conclusão de curso (graduação) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Licenciatura em Matemática, Rio Grande/RS, 2016.

Orientador: Dr. Leandro Sebben Bellicanta.

1. Quinto postulado 2. Geometrias não-euclidianas 3. Ensino de Matemática I. Prentice-Hernández, Leandro Sebben II. Título.

CDU 514

Wellington Tavares dos Santos

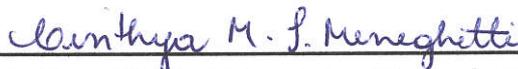
**A história do quinto postulado,
as geometrias não-euclidianas
e suas implicações no pensamento científico**

Trabalho submetido por Wellington Tavares dos Santos como requisito parcial para conclusão do curso de Licenciatura em Matemática junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Trabalho aprovado. Rio Grande, 19 de julho de 2016:



Leandro Sebben Bellicanta
Orientador



Cinthya Maria Schneider Meneghetti
FURG



Rodrigo Barbosa Soares
FURG

Rio Grande
Julho, 2016

*Este trabalho é dedicado a todos os bons espíritos,
que nos guiam na estrada do progresso.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus Pai, causa primária de todas as coisas, a Jesus Cristo, divino mestre dos hóspedes da Mãe Terra, a família, aos amigos e a todos seres que na existência são incumbidos desta permuta incessante de relações edificantes.

A ciência moderna abandonou os quatro elementos primitivos dos antigos e, de observação em observação, chegou à concepção de um só elemento gerador de todas as transformações da matéria; mas, a matéria, por si só, é inerte; carecendo de vida, de pensamento, de sentimento, precisa estar unida ao princípio espiritual.

(A Gênese segundo o espiritismo)

Resumo

Este trabalho busca reunir algumas informações sobre a história do quinto postulado de Euclides e sobre a descoberta das geometrias não-euclidianas com o objetivo de auxiliar docentes e estudantes de geometria a tomar contato com esta importante etapa do desenvolvimento da ciência. O caminho percorrido por diversos matemáticos que tentaram transformar o quinto postulado em um teorema é revisado e mostra-se como estas tentativas acabaram por resultar no surgimento das geometrias não-euclidianas. Os axiomas e alguns dos primeiros resultados da geometria hiperbólica, bem como alguns modelos para esta geometria, são apresentados. No intuito de estimular o aprendizado das geometrias não-euclidianas, algumas de suas aplicações são comentadas.

Palavras-chave: Quinto postulado. Geometrias não-euclidianas. Ensino de Matemática.

Abstract

This work aims to put together some information about the history of the fifth postulate of Euclid and the discovery of non-Euclidean geometries in order to assist teachers and geometry students to make contact with this important step in the development of science. The path taken by several mathematicians who tried to turn the fifth postulate in a theorem is reviewed and shows up how these attempts ultimately result in the emergence of non-Euclidean geometries. The axioms and some of the first results of hyperbolic geometry, as well as some models for this geometry are presented. In order to encourage the learning of non-Euclidean geometries, some of its applications are discussed.

Keywords: Fifth postulate. Non-euclidean geometries. Mathematics education.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Linha do tempo da geometria na Grécia Antiga	17
Figura 2 – Modelo para o quinto postulado de Euclides	19
Figura 3 – Ângulos alternos internos.	22
Figura 4 – Teorema de Pasch com a reta l intersectando os segmentos \overline{AB} e \overline{BC} . .	24
Figura 5 – Teorema dos ângulos alternos internos: ângulos alternos e internos congruentes implica em retas paralelas.	25
Figura 6 – Teorema do ângulo externo: $\gamma > \alpha$ e $\gamma > \beta$	25
Figura 7 – Postulado de Playfair.	26
Figura 8 – O postulado de Playfair implica em ângulos alternos internos congruentes	28
Figura 9 – O item ii) implica na seguinte soma dos ângulos de um triângulo qualquer: $\angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma = \pi$	28
Figura 10 – A hipérbole se aproxima das assíntotas sem jamais encontrá-las.	29
Figura 11 – Postulado de Wallis com $\triangle ABC \sim \triangle DEF$	30
Figura 12 – Quadrilátero de Saccheri, onde os ângulos da base, $\angle\alpha$ e $\angle\beta$, são retos e os lados \overline{AD} e \overline{BC} são congruentes e, ainda, pelo teorema 13, $\angle\gamma \cong \angle\delta$. 30	30
Figura 13 – Quadrilátero de Saccheri com as diferentes hipóteses dos ângulos do topo	31
Figura 14 – Triângulos com mesma soma angular interna	33
Figura 15 – Triângulos da demonstração de Legendre	35
Figura 16 – Ângulo da equivalência de Legendre	36
Figura 17 – Modelo para a geometria elíptica, a esfera euclidiana	40
Figura 18 – Quadrilátero convexo	41
Figura 19 – Teorema Hiperbólico Universal	42
Figura 20 – Triângulos semelhantes	43
Figura 21 – Quadrilátero de Saccheri, com a altitude \overline{TS} , usado na demonstração do teorema 13.	44
Figura 22 – Quadrilátero de Saccheri dividido em dois quadriláteros de Lambert. .	45
Figura 23 – Modelo de Beltrami-Klein e sua representação de ângulos	49
Figura 24 – Curva Tractiz, cuja rotação em torno do eixo OY determina a pseudo-esfera.	49
Figura 25 – Disco de Poincaré	51
Figura 26 – Distância no disco de Poincaré	52

Lista de símbolos

\cong	Congruente
\sim	Semelhante
\in	Pertence/ está sobre
$=$	Igual
\leq	Menor ou igual que
$>$	Maior que
$<$	Menor que
∞	Infinito
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
P	Ponto P
r	Reta r
\overleftrightarrow{AB}	Reta que passa pelos pontos A e B
\overrightarrow{AB}	Semirreta AB
\overline{AB}	Segmento AB
$\angle ABC$	Ângulo ABC
$\triangle ABC$	Triângulo ABC
$\square ABCD$	Quadrilátero $ABCD$
$A - B - C$	O ponto B está entre os pontos A e C
h_τ	Reta hiperbólica tau

Sumário

	Introdução	12
1	BREVE APRESENTAÇÃO HISTÓRICA	15
1.1	Origens da Matemática, da Geometria e do Método Axiomático . . .	15
2	A GEOMETRIA EUCLIDIANA E O MÉTODO AXIOMÁTICO	18
2.1	Os Axiomas de Hilbert	20
2.2	A Geometria Neutra	23
3	A HISTÓRIA DO QUINTO POSTULADO	26
3.1	Legendre e o Postulado das Paralelas	32
4	A DESCOBERTA DAS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS	37
4.1	Algumas noções sobre a Geometria Elíptica	39
4.2	Uma introdução a Geometria Hiperbólica	40
4.3	Alguns modelos para a Geometria Hiperbólica	45
4.4	Por que estudar geometrias não-euclidianas? A teoria da relatividade	53
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	55
	REFERÊNCIAS	57

Introdução

A ciência sofreu profundas transformações no chamado *século das luzes*, período conhecido como *iluminismo*, século XVII. Esse fenômeno também proporcionou, posteriormente, quebras de paradigmas significativas na matemática, em particular na geometria. Esse trabalho se dedica, através de uma pesquisa bibliográfica, abordar um dos episódios mais influentes da história da matemática, a história do quinto postulado de Euclides e, conseqüentemente, a descoberta das geometrias não-euclidianas. Um dos objetivos desse trabalho é a proposta de uma linguagem mais acessível, para que, além de estudantes de graduação em matemática que já tenham tido contado com a geometria euclidiana, outros leitores, estudantes ou não, possam vir a adquirir conhecimentos científicos sobre a área da geometria, em especial das geometrias não-euclidianas.

Faremos uma *breve apresentação histórica* da matemática, particularmente da geometria, explorando suas possíveis origens, para melhor entendermos como a geometria se tornou uma área da matemática tão importante no pensamento científico global. Contudo, não podemos falar em geometria e em seu desenvolvimento histórico sem comentarmos sobre o *método axiomático* e sua estrutura lógica. O método axiomático é de fundamental importância a matemática, pois proporciona o desenvolvimento do raciocínio lógico, da argumentação lógica e das tão temidas demonstrações matemáticas. Isto é, o método axiomático dá sustentação a toda matemática e, portanto, as demais áreas que se utilizam desta ciência. Sendo assim, faremos uma revisão simples da *geometria euclidiana* com o objetivo de, além de relembrar o leitor ou, no caso, se leigo, ter o primeiro contato, dar embasamento necessário para o desenvolvimento da teoria que será apresentada no decorrer do trabalho.

A teoria que será revisada da geometria euclidiana será dividida em três seções. A primeira fala dos *axiomas de Hilbert*, que preenchem todas as lacunas deixadas por Euclides, sendo muito úteis na construção da teoria. A segunda refere-se a *geometria neutra*, estudada em paralelo à geometria euclidiana, que servirá de embasamento na construção da primeira das geometrias não-euclidianas, a geometria hiperbólica. E, finalmente, *a história do quinto postulado* retomará as dificuldades encontradas na história da matemática em entendê-lo e aceitá-lo dentro da geometria euclidiana como um simples axioma necessário a validação da teoria, olhando mais atentamente aos matemáticos que, por quase dois mil anos, buscaram desenvolver uma demonstração para o quinto postulado de Euclides a partir da geometria neutra e, assim, poderemos entender como foi se solidificando a matemática moderna.

Na seqüência, apresentaremos *a descoberta das geometrias não-euclidianas*, episódio

fundamental para a compreensão da mudança do pensamento científico no mundo. Inserido nesse capítulo, encontrar-se-ão três seções, começando por *uma introdução a geometria hiperbólica*, geometria que foi a precursora das demais geometrias não-euclidianas e que se assemelha muito com a geometria euclidiana, nos proporcionando um ótimo tipo de geometria não-euclidiana para um primeiro contato do leitor. Também apresentaremos *alguns modelos para a geometria hiperbólica*, com o intuito de uma melhor familiarização do leitor com essa nova concepção de geometria e a verificação dos resultados iniciais obtidos na geometria hiperbólica. Em seguida, será abordado o que, talvez, seja um dos aspectos mais importantes para estimular o estudo das geometrias não-euclidianas, a aplicação dessas geometrias na *teoria da relatividade*, onde somente algumas geometrias não-euclidianas são adequadas à modelagem da teoria.

Através dessa pesquisa buscaremos defender o ensino das geometrias não-euclidianas, principalmente nos cursos de graduação em matemática, licenciatura ou bacharelado. [Ribeiro \(2012\)](#) nos revela, em sua tese, que um dos principais defensores da adaptação do currículo escolar para as geometrias não-euclidianas é o húngaro István Lénart. Seu foco concentra-se na geometria esférica, por acreditar que, em alguns aspectos, seja mais acessível intelectualmente que a própria geometria euclidiana e, também, por ser um conhecimento de aplicações importantes e mais variadas que a geometria hiperbólica, como na astronomia, na química, na navegação marítima e no desenho artístico. Ou seja, existem teóricos da educação que refletem, inclusive, sobre a aplicação do ensino das geometrias não-euclidianas no ensino básico, contribuindo significativamente para a ampliação e foco do ensino superior nessas geometrias.

Autores como [Bonete \(2000\)](#), [Caldatto \(2011\)](#) e [Santos \(2009\)](#) denunciam a ausência das geometrias não-euclidianas no currículo de muitos cursos de licenciatura em matemática. De acordo com [Krause \(1986\)](#), com ensino das geometrias não-euclidianas seria possível compreender melhor muitas relações matemáticas e a própria geometria euclidiana. Isto é, ao mesmo tempo que o ensino da geometria euclidiana é necessário, o ensino das geometrias não-euclidianas pode reforçar o entendimento sobre a geometria de Euclides, inclusive pela quebra de paradigma que ela proporcionou na ciência, podendo ser ferramenta proporcionadora de abstração matemática e mergulho nos conceitos da matemática pura. E, reforçando o argumento, para [Reis \(2006\)](#), a realização de atividades sobre geometrias não-euclidianas pode contribuir “para a percepção, compreensão, descrição e interação com o espaço em que se vive”. Além disso, proporciona reflexões e comparações sobre as diferentes geometrias.

O próprio [Ribeiro \(2012\)](#) nos traz uma discussão bem fundamentada sobre o que seria educação não-formal e divulgação científica, porém o objetivo deste trabalho não é o de avaliar a possibilidade de ensino das geometrias não-euclidianas em diferentes tipos de educação, mas o de realmente estimular o ensino na graduação de um assunto que foi

fundamental na transformação do pensamento científico. Logo, podemos nos apoiar nas ideias desses educadores de modo a garantir que existem estudos voltados para a área do ensino das geometrias não-euclidianas vindo ao encontro deste trabalho, principalmente sendo de suma importância na formação de educadores na área da matemática e, por que não, também na área da física e de outras que necessitam da compreensão de algumas diferentes geometrias para tomarem como ferramenta para suas atividades.

1 Breve apresentação histórica

A base da geometria que é hoje ensinada nas escolas descende dos ensinamentos de Euclides, matemático grego que viveu por volta de 300 a.C. em Alexandria, sede da grande biblioteca da Antiguidade. Euclides é conhecido por ter escrito um dos mais famosos trabalhos no campo da matemática, *Elementos*, um compendio em treze volumes que se provou útil na construção da lógica e da ciência moderna e é uma das obras mais famosas da matemática. Segundo Boyer (1996), *Elementos de Euclides* é o livro didático mais bem sucedido e influente já escrito e perde somente para a Bíblia em número de edições publicadas, chegando a quase mil edições. O que o tornou famoso foi o método usado: de dedução lógica de teoremas a partir de nove noções comuns e de cinco postulados. Assim para prosseguirmos nesse assunto apresentamos uma seção onde é discutido o que é a geometria e quais são suas origens.

1.1 Origens da Matemática, da Geometria e do Método Axiomático

Segundo Boyer (1996), afirmações sobre as origens da matemática, seja da aritmética seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois são anteriores a escrita, dependendo apenas de poucas evidências que restaram. Quanto a geometria (do grego, medir a terra), Heródoto e Aristóteles tinham teorias opostas e, apesar de ser claro que suas origens são mais antigas, não foram além da civilização egípcia antiga. Heródoto acreditava que a geometria estava associada a necessidade de algumas práticas do cotidiano relacionadas ao plantio, construções e movimento dos astros, sendo usada para cálculo de áreas, superfícies e volumes. Já Aristóteles, pensava que o desenvolvimento da geometria era oriundo do lazer de uma classe sacerdotal. Não podemos contradizê-los sem evidências concretas quanto a motivação, entretanto quanto a idade da geometria fica claro que é anterior. O homem neolítico, que estima-se ter vivido entre 12 mil e 3 mil a.C., já apresentava a geometria em suas pinturas de figuras com preocupações espaciais, como também suas ferramentas e utensílios apresentavam congruências e simetrias. Porém nada garante que era motivada apenas por puro prazer ou apenas pela necessidade, muito provavelmente por ambos em seus determinados contextos.

Segundo Andrade (2013), na civilização grega antiga, a matemática era uma disciplina destacada das demais. Etimologicamente, a palavra *Matemática*, termo cunhado por Pitágoras, significa *o que é aprendido*. Para os gregos, os objetos não dependiam de olhares do observador e pontos de vista, possuíam propriedades absolutas que podiam ser

descobertas, o que era possível somente através do processo dedutivo. Sob essa perspectiva podemos constatar que a origem da matemática como nós conhecemos hoje realmente é grega.

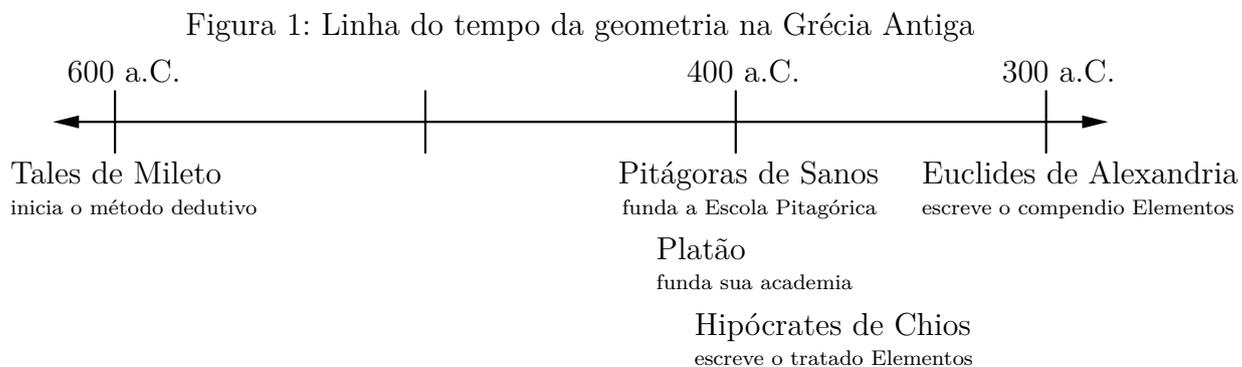
Segundo [Greenberg \(1993\)](#), foram os gregos, por volta de 600 a.C. com Tales de Mileto, que iniciaram as investigações de cunho geométrico, estabelecendo a necessidade de se empregar o método dedutivo no lugar do método de tentativa e erro. Tales, segundo relatos do grego Próclus, visitou o Egito e a Babilônia tendo trazido desses lugares os conhecimentos geométricos da época. Com o objetivo de verificar a correção dos resultados executados, ele desenvolveu a primeira geometria lógica. O desenvolvimento organizado dos teoremas através de provas (demonstrações) foi característica da matemática grega, e uma prática inteiramente nova até então.

A organização iniciada por Tales foi continuada, nos dois séculos seguintes, por Pitágoras de Samos e seus discípulos. Em Crotona, sul da atual Itália, Pitágoras fundou uma irmandade que ficou conhecida como Escola Pitagórica. Foram os pitagóricos, membros dessa irmandade, que descobriram os números irracionais, tais como $\sqrt{2}$, criando um verdadeiro trauma na escola, uma vez que o lema fundamental dessa irmandade era que “tudo é número”, onde por número entendia-se os inteiros positivos e razão entre eles. Porém, conforme [Gonçalves e Possani \(2010\)](#), as fontes mais confiáveis para o estudo deste assunto não trazem nenhuma evidência de crise, apontando, de acordo com estudos desde a década de 1960, para uma falta de rigor histórico na posição de que a descoberta dos incomensuráveis teria gerado uma crise entre os pitagóricos. Isto é, de fato, não é possível garantir se realmente houve uma crise.

Segundo [Greenberg \(1993\)](#), a fundamentação sistemática da geometria plana foi realizada pela escola pitagórica, por volta de 400 a.C., em um tratado chamado “Elementos” escrito pelo matemático Hipócrates de Chios. Um século depois, Euclides de Alexandria, publicou sua obra, de mesmo nome, “Elementos”, onde reuniu, praticamente, quase tudo que se conhecia de matemática até então, inclusive cobrindo quase todo o tratado de Hipócrates. No século 4 a.C., Platão fundou sua famosa academia onde na entrada estava fixado o lema “Que ninguém que ignore a geometria entre aqui”. Euclides foi um discípulo da escola platônica, por volta de 300 a.C., e produziu o tratamento definitivo da geometria grega e da teoria dos números nos seus treze volumes do “Elementos”. O mais interessante nesse contexto é que o método axiomático usado por Euclides em seu livro é o protótipo de tudo que chamamos hoje de *Matemática Pura*, pura no sentido de “puro pensar”; onde nenhum experimento físico é preciso para verificar se suas afirmações são corretas, somente o raciocínio nas demonstrações precisa ser conferido.

Para [Lintz \(1999\)](#), a obra de Euclides se compara ao estudo da obra de Johann Sebastian Bach na história da música no Ocidente ou da arte de Leonardo da Vinci na pintura. O mesmo afirma que é em Euclides que se cristalizou definitivamente a geometria

como um organismo no *estágio de arte*, com seus *princípios básicos* claramente enunciados e seu método de trabalho rigorosamente exposto e utilizado. Assim, buscaremos a seguir uma melhor compreensão da geometria de Euclides e do método utilizado para sua construção.



2 A Geometria Euclidiana e o Método Axiomático

Assim como as outras ciências, a matemática busca verdades e formas de as validar. Euclides por ter se utilizado do método axiomático para solidificar sua geometria nos remete a necessidade de uma breve apresentação das características deste método.

Segundo [Raggio e Stival \(2003\)](#), as características principais da noção clássico-aristotélica de sistema axiomático são as seguintes:

A. Uma ciência no sentido aristotélico é um conjunto de enunciados relativos a um mesmo domínio, que possui as seguintes propriedades:

- Os enunciados se dividem em axiomas e teoremas.
- Os conceitos que compõem os enunciados se dividem em conceitos fundamentais e derivados.

B. Os axiomas devem ser:

- Imediatamente evidentes, e por essa razão não carecem de demonstração.
- Suficientes para que se possa deduzir a partir deles, utilizando unicamente as regras da lógica, todos os teoremas.

C. Os conceitos fundamentais devem ser:

- Imediatamente compreensíveis e, por essa razão, não carecem de definição.
- Suficientes para que se possa definir a partir deles, segundo as regras da lógica, todos os conceitos derivados.

Neste trabalho, chamaremos os conceitos fundamentais de *termos indefinidos*. Por exemplo, ponto e reta são termos indefinidos da geometria. Podemos introduzir novos conceitos cujos significados fiquem especificados a partir dos termos indefinidos. Estes são os conceitos derivados que neste trabalho chamaremos de *definições*. Por exemplo, a sentença “*Duas retas são concorrentes quando têm um e um só ponto em comum*”, é uma definição do que são *retas concorrentes*.

Afirmações envolvendo os termos indefinidos e as definições que aceitamos como verdadeiras sem que seja justificada sua validade são chamadas de *axiomas* ou *postulados*. “*Por dois pontos distintos de um plano passa uma e uma só reta*” é um exemplo de axioma

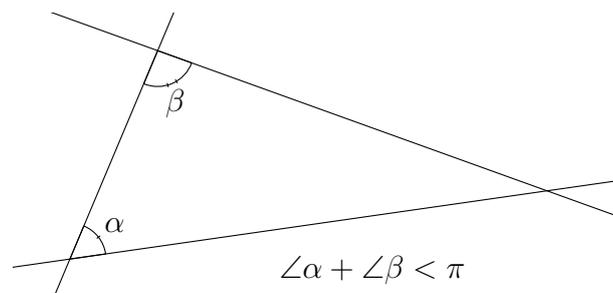
da geometria euclidiana. E novas proposições podem ser consideradas verdadeiras, desde que sua validade seja deduzida a partir dos axiomas, termos indefinidos e definições. Estas proposições são chamadas *teoremas* e a justificação de sua validade é chamada *prova* ou *demonstração*.

Para Euclides, a geometria era uma ciência dedutiva que operava a partir de certas hipóteses básicas, os axiomas. Porém, no tempo de Euclides, os termos indefinidos não foram explicitados. Seu sistema axiomático foi apresentado, através de um grupo 23 definições, e de outros dois grupos: os *postulados* (também chamados de *axiomas*) e as *noções comuns*.

Relacionamos a seguir, conforme uma tradução direta do grego antigo para o português realizada por [Bicudo \(2009\)](#), os postulados e noções comuns contidas no Livro I da obra Elementos:

- Postulados
 1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
 2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
 3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
 4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
 5. E, caso uma reta, caindo sobre duas outras, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos (π) ([Figura 2](#)).
- Noções comuns
 1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
 2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
 3. E, se caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
 4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
 5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
 6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
 7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
 8. E o todo [é] maior do que a parte.
 9. E duas retas não contêm uma área. ([BICUDO, 2009](#))

Figura 2: Modelo para o quinto postulado de Euclides



Os quatro primeiros postulados já estavam validados empiricamente, sendo descrições simples e claras de procedimentos utilizados no cotidiano dos ofícios. E, segundo

Andrade (2013), com o acréscimo do quinto postulado, foi elaborado o primeiro e mais duradouro modelo para o espaço físico. Assim, a simplicidade e naturalidade dos postulados de Euclides acabou por esconder o enorme dispêndio intelectual para a realização de tal síntese.

A estrutura lógica elaborada por Euclides permaneceu praticamente inalterada por mais de dois mil anos. Foi apenas com a perplexidade e o desassossego advindos da descoberta das geometrias não-euclidianas que a comunidade matemática sentiu-se motivada a revisar os axiomas e toda estrutura lógica da geometria, afim de alicerçar, sobre o rigor lógico já existente no final do século IX, todas as demonstrações da geometria euclidiana.

2.1 Os Axiomas de Hilbert

Em 1889, o alemão David Hilbert (1862-1943), professor da Universidade de Göttingen, publicou um sistema axiomático para a geometria euclidiana que preenchia todas as lacunas de Euclides, redistribuindo os axiomas por grupos possibilitando axiomatizar de maneira logicamente consistente toda a geometria euclidiana (ANDRADE, 2013). De acordo com Ávila (2001), essa publicação foi realizada no livro *Fundamentos da Geometria*, no qual ele faz uma apresentação rigorosa de uma axiomática adequada ao desenvolvimento lógico-dedutivo da geometria euclidiana.

Antes de prosseguirmos na enumeração da axiomática de Hilbert, listamos os termos indefinidos e criamos, segundo Greenberg (1993), as definições de alguns dos termos usados nos enunciados dos axiomas e no restante deste trabalho.

- Termos indefinidos
 - i. Ponto
 - ii. Reta
 - iii. Estar sobre
 - iv. Estar entre
 - v. Congruência

Definição 1. Sejam dois pontos A e B . O segmento \overline{AB} é o conjunto cujos membros são os pontos A e B e todos os pontos que estão na reta \overleftrightarrow{AB} e estão entre A e B . Os pontos A e B são chamados de *pontos finais* do segmento \overline{AB} .

Definição 2. Dados dois pontos O e A . O conjunto de todos os pontos P tais que o segmento \overline{OP} é congruente ao segmento \overline{OA} é chamado de *círculo*. O ponto O é chamado de *centro* e cada segmento \overline{OP} é chamado de *raio* do círculo.

Definição 3. A semirreta \overrightarrow{AB} é o seguinte conjunto de pontos que está sobre a reta \overleftrightarrow{AB} : aqueles que pertencem ao segmento \overline{AB} e todos os pontos C tais que B está entre A e C . Dizemos que a semirreta \overrightarrow{AB} começa em A e é parte da reta \overleftrightarrow{AB} .

Definição 4. As semirretas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são *opostas* se elas são distintas, se elas começam no mesmo ponto A , e se elas são parte da mesma reta $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$.

Definição 5. Um “ângulo com vértice A ” é um ponto A junto com duas semirretas não opostas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} (chamadas de *lados* do ângulo) que começam em A .

Definição 6. Se dois ângulos $\angle BAD$ e $\angle CAD$ possuem um lado comum \overrightarrow{AD} e os outros dois lados \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são semirretas opostas, então estes ângulos são chamados de *ângulos suplementares*.

Definição 7. Um ângulo $\angle BAD$ é um *ângulo reto* se ele possui um ângulo suplementar que é a ele congruente.

Definição 8. Duas retas r e s são chamadas de *paralelas* se elas não se intersectam, ou seja, se elas não possuem qualquer ponto em comum.

Definição 9. Seja r uma reta, A e B quaisquer dois pontos que não estão em r . Se $A = B$ ou se o segmento \overline{AB} não contém pontos de r , dizemos que A e B estão *no mesmo lado de r* , enquanto que, se $A \neq B$ e o segmento \overline{AB} intersecta r , dizemos que A e B estão *em lados opostos de r* .

Definição 10. Dado um ângulo $\angle CAB$, dizemos que um ponto D está *no interior* de $\angle CAB$ se

- i D está do mesmo lado de \overleftrightarrow{AC} que B ; e
- ii D está do mesmo lado de \overleftrightarrow{AB} que C .

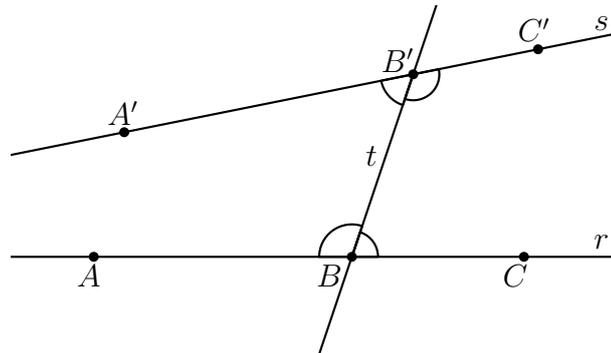
Note que o interior de um ângulo é a intersecção de dois semiplanos.

Definição 11. $\overline{AB} < \overline{CD}$ (ou $\overline{CD} > \overline{AB}$) significa que existe um ponto E entre C e D tal que $\overline{AB} \cong \overline{CE}$.

Definição 12. $\angle ABC < \angle DEF$ significa que existe uma semi-reta \overrightarrow{EG} entre \overrightarrow{ED} e \overrightarrow{EF} tal que $\angle ABC \cong \angle GEF$.

Definição 13. Considere uma reta t , transversal às retas r e s , com t cortando r no ponto B e s no ponto B' . Escolha pontos A e C em r tais que $A - B - C$; escolha também pontos A' e C' em s tais que $A' - B' - C'$. Então, os quatro ângulos $\angle A'B'B$, $\angle ABB'$, $\angle C'B'B$, $\angle CBB'$ são chamados de *ângulos internos*. Os dois pares $(\angle ABB', \angle C'B'B)$ e $(\angle A'B'B, \angle CBB')$ são chamados de *pares de ângulos alternos e internos* (Figura 3).

Figura 3: Ângulos alternos internos.



Definição 14. Um ângulo que é suplementar a um ângulo interior de um triângulo é chamado de *ângulo exterior* do triângulo. Os outros dois ângulos não adjacentes a este ângulo exterior são chamados de *ângulos interiores remotos*.

Agora, seguindo [Greenberg \(1993\)](#), passamos a listar os axiomas de Hilbert para a geometria euclidiana:

A. Axiomas de Incidência.

1. Para quaisquer pontos distintos P e Q existe uma única reta r que passa por P e Q .
2. Existem ao menos dois pontos distintos em qualquer reta.
3. Existem ao menos três pontos distintos que não estão sobre uma mesma reta.

B. Axiomas de Ordem.

1. Se $A - B - C$, então A, B e C são três pontos distintos e colineares, e $C - B - A$.
2. Dados quaisquer dois pontos distintos B e D , existem pontos A, C e E que estão em \overleftrightarrow{BD} tais que $A - B - D$, $B - C - D$ e $B - D - E$.
3. Se A, B e C são três pontos distintos que estão sobre a mesma reta, então um e somente um está entre os outros dois.
4. Para qualquer reta r e para quaisquer pontos A, B e C que não estão em r :
 - i se A e B estão do mesmo lado de r e B e C estão do mesmo lado de r , então A e C estão do mesmo lado de r .
 - ii se A e B estão em lados opostos de r e B e C estão em lados opostos de r , então A e C estão do mesmo lado de r .

C. Axiomas de Congruência

1. Se A e B são pontos distintos e A' é um ponto qualquer, então para qualquer semirreta r começando de A' existe um *único* ponto B' em r tal que $B' \neq A'$ e $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.
2. Se $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, então $\overline{CD} \cong \overline{EF}$. Além disso, qualquer segmento é congruente a si mesmo.
3. Se $A - B - C$, $A' - B' - C'$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, e $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, então $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.
4. Dado um ângulo qualquer $\angle BAC$, e dada qualquer semirreta $\overrightarrow{A'B'}$ começando do ponto A' , então existe uma *única* semirreta $\overrightarrow{A'C'}$ em um dado lado da reta $\overleftrightarrow{A'B'}$ tal que $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$.
5. Se $\angle A \cong \angle B$, e $\angle A \cong \angle C$, então $\angle B \cong \angle C$. Além disso, qualquer ângulo é congruente a si mesmo.
6. (Critério Lado-Ângulo-Lado) Se dois lados e o ângulo incluído de um triângulo são congruentes respectivamente a dois lados e o ângulo incluído de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

D. Axioma de Continuidade (Axioma de Dedekind).

Suponha que os pontos de uma reta r estão decompostos em dois conjuntos disjuntos não vazios Σ_1 e Σ_2 tais que

- i) $r = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
- ii) Nenhum ponto de Σ_1 está entre dois pontos de Σ_2 e vice versa.

Então existe um único ponto O sobre r tal que um dos dois subconjuntos é uma semirreta que começa em O .

E. Axioma das Paralelas (Postulado de Playfair).

Para qualquer reta r e qualquer ponto P que não está em r existe no máximo uma reta s passando por P tal que s é paralela a r .

Cabe, aqui, lembrar da geometria euclidiana que este último é uma equivalência lógica do quinto postulado de Euclides, resultado que será muito utilizado no desenvolvimento de nosso trabalho.

Dentro desse sistema axiomático podemos destacar uma geometria em particular, chamada *Geometria Neutra*, cujo destaque se torna fundamental para a posterior compreensão da construção das demais geometrias.

2.2 A Geometria Neutra

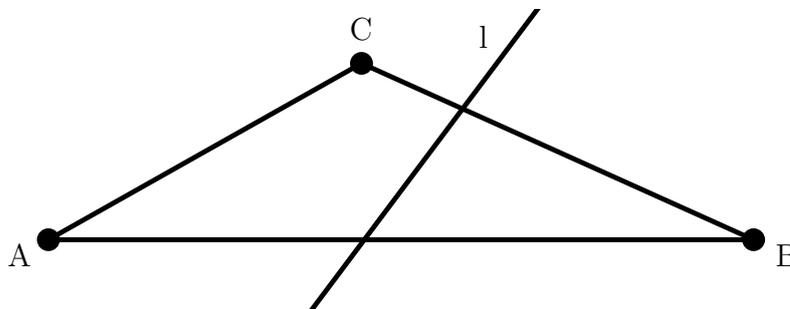
Para [Andrade \(2013\)](#), a *geometria neutra*, por definição, é a geometria construída usando todos axiomas de Hilbert, com excessão do axioma das paralelas. Também podemos

dizer, de maneira livre, que essa geometria adota apenas os quatro primeiros postulados de Euclides.

Nesse ponto é interessante e pertinente enunciarmos alguns teoremas da geometria neutra que utilizaremos como referência no decorrer deste trabalho. A demonstração rigorosa destes resultados exigiria um tratamento mais formalizado de toda a construção do método axiomático na geometria, implicando na demonstração de vários outros teoremas que os precedem. No entanto esse não é o objetivo deste trabalho e, sim, utilizar como base os conhecimentos da geometria euclidiana para entrarmos em contato com as geometrias não-euclidianas. Para o leitor interessado em estudar as demonstrações destes teoremas, indicamos o excelente livro *Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history* de Marvin Jay Greenberg ou ainda *Introdução à Geometria Hiperbólica: O modelo de Poincaré* de Plácido Andrade.

Teorema 1 (Teorema de Pasch). *Sejam A , B e C , três pontos que não estão sobre uma mesma reta e seja l uma reta do plano que não contém algum dos três pontos, então, se l interseca o segmento \overline{AB} , ela também interseca o segmento \overline{AC} ou o segmento \overline{BC} (Figura 4).*

Figura 4: Teorema de Pasch com a reta l intersecando os segmentos \overline{AB} e \overline{BC}

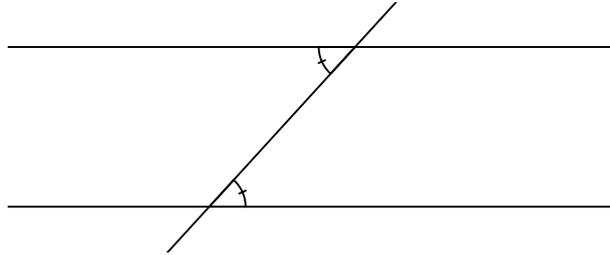


Teorema 2 (Critério de congruência Ângulo-Lado-Ângulo). *Se para dois triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$, são verdadeiras as congruências $\angle A \cong \angle A'$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, e $\angle B \cong \angle B'$, então $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.*

Teorema 3 (Critério de congruência Lado-Lado-Lado). *Se para dois triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$, são verdadeiras as congruências $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ e $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, então $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.*

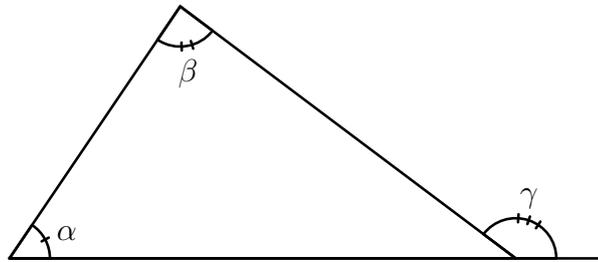
Teorema 4 (Teorema dos ângulos alternos internos). *Se duas retas são intersecadas por uma terceira reta de modo que os ângulos alternos internos são congruentes, então as duas retas não se intersecam, ou seja, são paralelas (Figura 5).*

Figura 5: Teorema dos ângulos alternos internos: ângulos alternos e internos congruentes implica em retas paralelas.



Teorema 5 (Teorema do ângulo externo). *Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer ângulo interno não adjacente a ele (Figura 6).*

Figura 6: Teorema do ângulo externo: $\gamma > \alpha$ e $\gamma > \beta$.



Teorema 6. *A soma das medidas de quaisquer dois ângulos de um triângulo qualquer é estritamente menor que π (dois ângulos retos). E como consequência, todo triângulo possui, pelo menos dois ângulos agudos.*

3 A história do Quinto Postulado

Na redação de Euclides, o último postulado é, claramente, diferente dos demais. Ele não pode ser validado empiricamente e é o único condicional. A redação segue a estrutura utilizada em um teorema, não faltando o “se” e o “então”, a “hipótese” e a “tese”, o que deixou muitas interrogações sobre a possibilidade de prová-lo como legítimo teorema.

Ao analisarmos a estrutura do primeiro livro da obra *Elementos*, observando as relações entre as proposições e os postulados usados nas demonstrações, é possível inferir que o próprio Euclides evitou o tanto quanto pode o uso do quinto postulado, de forma que seu uso ocorre somente após as 28 primeiras proposições, conforme mostra a [Tabela 1](#).

[Andrade \(2013\)](#) nos relata que diversos matemáticos, como Gauss, Bolyai e Lobachevsky, realizaram um enorme esforço na tentativa de demonstrar o quinto postulado, questão esta que estava em aberto por cerca de dois mil anos. Tantas foram as tentativas de tornar o quinto postulado um teorema que, em 1763, G. S. Klügel foi capaz de apresentar uma tese de doutorado examinando as falhas em 28 diferentes provas do suposto postulado das paralelas, expressando dúvidas de que ele poderia ser provado. O enciclopedista e matemático francês J. L. R. d’Alembert chamou isso de “*o escândalo da geometria*”.

A grande maioria dos erros cometidos nas tentativas de demonstração aconteceram por conta do uso inconsciente de afirmações que são *logicamente equivalentes* ao próprio quinto postulado. Diremos que uma afirmação \mathcal{A} é logicamente equivalente a uma afirmação \mathcal{B} quando, supondo a veracidade de \mathcal{A} pode-se demonstrar a veracidade de \mathcal{B} e vice versa, ou seja, supondo a veracidade de \mathcal{B} pode-se demonstrar a veracidade de \mathcal{A} . Destacamos no [teorema 7](#) algumas das equivalências lógicas do quinto postulado para uso posterior.

Teorema 7. *Assuma os axiomas da geometria neutra. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) Em um ponto fora de uma reta incide uma única reta que não a intersecta (postulado de Playfair, [Figura 7](#)).*

Figura 7: Postulado de Playfair.



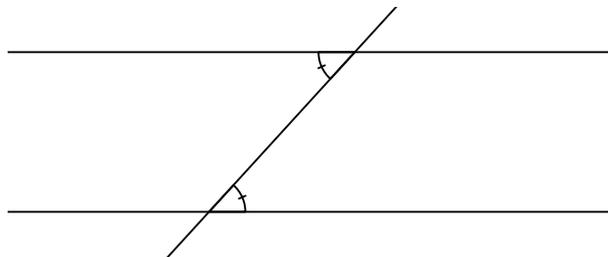
Tabela 1: Tabela que relaciona definições, postulados, noções comuns e proposições utilizadas nas demonstrações de cada uma das proposições de Elementos.

Prop. demonstrada	Definições	Postulados	Noções comuns	Prop. utilizadas na demonstração
1	15, 20	1, 3	1	-
2	15, 20	1, 2, 3	1, 3	1
3	15	3	1	2
4	-	-	7, 9	-
5	-	1,2	3	3, 4
6	-	1	8	3, 4
7	-	1	8	5
8	-	-	7	7
9	20	1	-	1, 3, 8
10	20	1	-	4, 9
11	10, 20	1	-	1, 2, 3, 8
12	10, 15	1, 3	-	8, 10
13	10	-	1, 2	11
14	-	2, 4	1, 2, 3, 8	13
15	-	4	1, 2, 3	13
16	-	1, 2	8	2, 3, 4, 10, 15
17	-	2	4	13, 16
18	-	1	8	3, 5, 16
19	-	-	-	5, 18
20	-	1, 2	8	2, 5, 19
21	-	2	4	16, 20
22	15	1, 3	1	2, 3, 20
23	-	1	-	8, 22
24	-	1	1, 8	2, 4, 5, 19, 23
25	-	-	-	4, 24
26	-	1	1, 8	3, 4, 16
27	23	2	-	16
28	-	4	1, 2, 3	13, 15, 27
29	23	2, 5	-	8, 22
30	-	-	1	27, 29
31	-	1, 2	-	23, 27
32	-	2	1, 2	13, 29 , 31
33	-	1	-	4, 27, 29
34	-	1	2	4, 26, 29
35	-	-	1, 2, 3	4, 29 , 34
36	-	1	1	33 , 34 , 35
37	-	2	6	31, 34 , 35
38	-	2	6	31, 34 , 36
39	-	1	1, 8	31, 37
40	-	1	1, 8	31, 38
41	-	1	1, 2	34 , 37
42	-	1	1, 2	10, 23, 31, 38 , 41
43	-	1	2, 3	34
44	-	1, 2, 5	1, 8	15, 29 , 30 , 31, 42 , 43
45	-	1	1, 8	14, 29 , 30 , 33 , 34 , 42 , 44
46	22	4	1, 3	2, 3, 11, 29 , 31, 34
47	-	1,4	1, 2, 5	4, 14, 30 , 31, 41 , 46
48	-	1	1,2	2, 3, 8, 11, 47

Fonte: Bongiovanni e Jahn (2010)

ii) Uma reta transversal a duas outras que não se intersectam determina ângulos alternos internos congruentes (Figura 8).

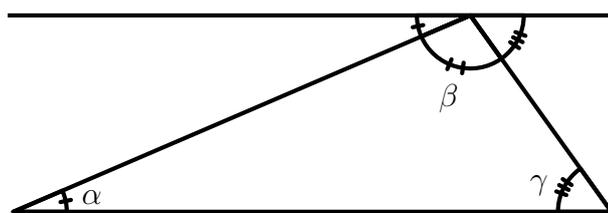
Figura 8: O postulado de Playfair implica em ângulos alternos internos congruentes



iii) A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a π (Figura 9).

Figura 9: O item ii) implica na seguinte soma dos ângulos de um triângulo qualquer:

$$\angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma = \pi.$$



Prosseguiremos uma retomada histórica dessa etapa do pensamento científico buscando uma melhor compreensão de como foi construída e solidificada nossa atual matemática.

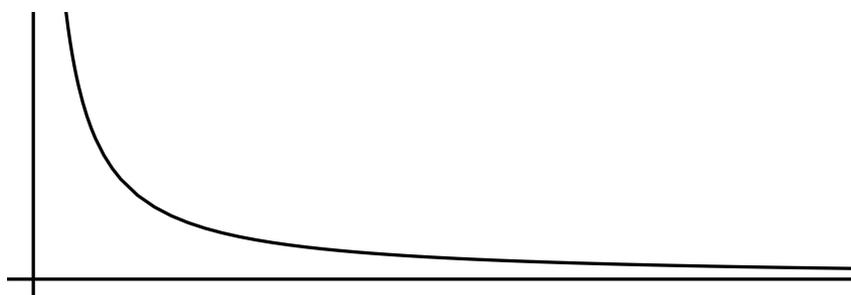
Segundo [Greenberg \(1993\)](#), durante mais de dois mil anos, alguns dos melhores matemáticos tentaram provar o quinto postulado de Euclides. O que significa, de acordo com a nossa terminologia, ter uma prova? Significa que não deveria ser necessário assumir que o postulado das paralelas é um axioma, deveríamos ser capazes de prová-lo a partir dos outros axiomas. Se nós fossemos capazes de provar o quinto postulado de Euclides dessa maneira, ele tornar-se-ia um teorema em geometria neutra e ela abarcaria toda a geometria euclidiana.

Ainda segundo [Greenberg \(1993\)](#), a primeira tentativa conhecida de prova foi feita por Ptolomeu. Sem passar os detalhes do seu argumento, poderíamos dizer que ele assumiu o postulado das paralelas de Hilbert sem perceber, isto é, adotou na sua argumentação uma equivalência ao quinto postulado, de modo que Ptolomeu assumiu o que ele estava tentando provar, ou seja, o seu raciocínio era essencialmente circular.

O autor também relata que Próclus (485 a 410 a.C.), cujo comentário é uma das principais fontes de informação sobre a geometria grega, criticou o postulado das paralelas

da seguinte forma: “Ele não deve ser colocado junto com os postulados; na verdade ele é um teorema que envolve muitas dificuldades, o qual Ptolomeu, em um determinado livro, se propõe a resolver... A declaração que, uma vez que as duas retas convergem mais e mais ao serem prolongadas, elas irão se encontrar em algum momento é plausível, mas não necessária”. Próclus oferece o exemplo de uma hipérbole que se aproxima da sua assíntota tanto quanto você queira, sem jamais encontrá-la (Figura 10). Este exemplo mostra que o oposto das conclusões de Euclides podem ser, ao menos, imaginadas. Próclus diz também: “É então evidente, a partir disto, que devemos procurar uma prova do presente teorema, e que ele não se encaixa no caráter especial dos postulados”.

Figura 10: A hipérbole se aproxima das assíntotas sem jamais encontrá-las.



Outras tentativas importantes de provar o postulado das paralelas foram feitas pelo matemático e astrônomo persa Nasir Eddin al-Tusi (1201-1274) e por John Wallis (1616-1703), que é considerado o maior matemático inglês antes de Isaac Newton. Em seu trabalho “*Arithmetica Infinitorum*”, que Newton adotou em seus estudos, Wallis apresenta o símbolo ∞ para “infinito”, onde desenvolveu fórmulas para certas integrais. Wallis não se propôs a tentar provar o postulado das paralelas na geometria neutra. Em vez disso, ele propôs um novo axioma, que acreditava ser mais plausível do que o postulado das paralelas e, em seguida, provou o postulado das paralelas a partir de seu novo axioma e dos outros axiomas da geometria neutra. Mencionaremos a título de curiosidade esse postulado que acabou por se mostrar logicamente equivalente ao postulado de Euclides.

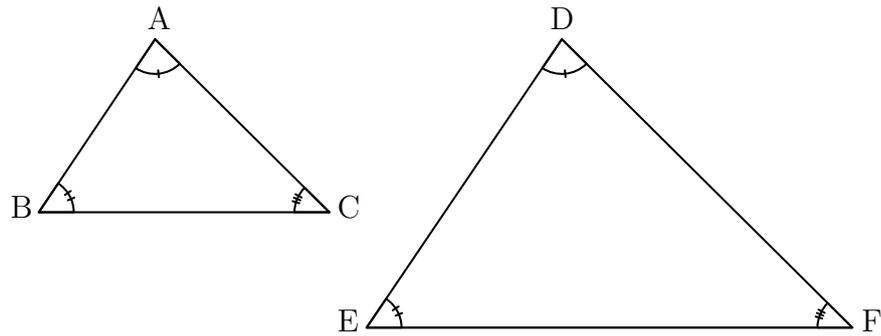
O postulado de Wallis. *Dado qualquer triângulo $\triangle ABC$ e dado qualquer segmento \overline{DE} . Existe um triângulo $\triangle DEF$ (tendo \overline{DE} como um dos seus lados) que é semelhante¹ ao $\triangle ABC$, denotado $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ (Figura 11).*

De grande importância histórica está o trabalho do padre jesuíta Girolamo Saccheri (1667-1733). Pouco antes de morrer, ele publicou um pequeno livro intitulado *Euclides “ab omni naevo vindicatus”* (Todas as falhas de Euclides), que não alcançou destaque até que Eugênio Beltrami o redescobriu cerca de um século depois.

A ideia de Saccheri foi a de usar um argumento de “*reductio ad absurdum*”. Ele assumiu a negação do postulado das paralelas e tentou deduzir uma contradição. Especifi-

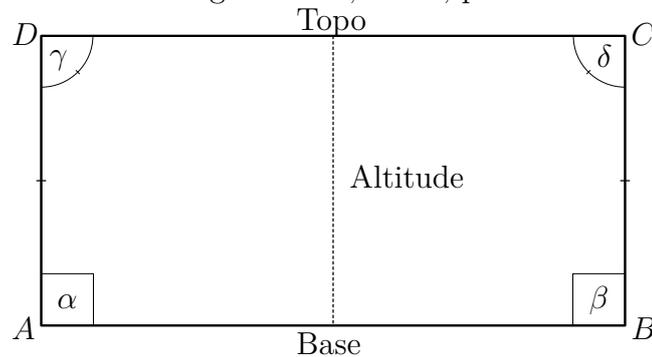
¹ Dois triângulos são chamados *semelhantes* quando todos seus ângulos internos correspondentes são congruentes, isto é, $\angle BAC \cong \angle EDF$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ e $\angle BCA \cong \angle EFD$ (Figura 11)

Figura 11: Postulado de Wallis com $\triangle ABC \sim \triangle DEF$



camente, ele estudou alguns quadriláteros cujos ângulos adjacentes à *base* são ângulos retos e cujos lados adjacentes à *base* são congruentes entre si (Figura 12). Estes quadriláteros tornaram-se conhecidos como *Quadriláteros de Saccheri*, onde é possível mostrar que em um quadrilátero de Saccheri os ângulos do topo são congruentes entre si, isto é, $\angle\gamma \cong \angle\sigma$, como será provado no [teorema 13](#). Nestes quadriláteros, o segmento que liga os pontos médios da *base* e do *topo* é chamado de *altitude*.

Figura 12: Quadrilátero de Saccheri, onde os ângulos da base, $\angle\alpha$ e $\angle\beta$, são retos e os lados \overline{AD} e \overline{BC} são congruentes e, ainda, pelo [teorema 13](#), $\angle\gamma \cong \angle\delta$.



Como os ângulos do topo são congruentes, podemos considerar a seguinte tricotomia: ou os ângulos do topo são retos, ou são obtusos, ou são agudos. Saccheri tentou estabelecer que o único caso possível seria o primeiro, pois nesse caso, conseguiria a partir desse fato transformar o postulado das paralelas em um teorema. Saccheri procurou mostrar, então, que os outros dois casos levavam a contradições. Ele conseguiu mostrar que o caso dos ângulos serem obtusos nos leva a uma contradição: se os ângulos superiores forem ângulos obtusos, a soma dos ângulos do quadrilátero seria maior do que 2π , o que contradiz o corolário 2 do teorema de Saccheri-Legendre [teorema 4.4, [Greenberg \(1993\)](#), páginas 125-127]. No entanto ele tentou arduamente, e não conseguiu extrair uma contradição no caso em que os ângulos são agudos, “a hostil hipótese do ângulo agudo”, como ele a chamou. Esse matemático não percebeu que assumindo a hipótese do ângulo agudo (que é equivalente a negação do postulado de Euclides) estava obtendo diversos resultados em geometria não-euclidiana.

Figura 13: Quadrilátero de Saccheri com as diferentes hipóteses dos ângulos do topo



Em uma abordagem similar para o problema das paralelas, Johann Heinrich Lambert (1728-1777) estudou os quadriláteros que possuem pelo menos três ângulos retos. Tais quadriláteros são agora chamados *Quadriláteros de Lambert*, embora tenham sido estudados sete séculos antes pelo cientista egípcio Ibn-Al-Haytham. Assim como Saccheri, ele também deduziu muitas proposições não-euclidianas a partir da hipótese do ângulo agudo, ou seja, tentou, considerando o ângulo do topo de seus quadriláteros como agudo, chegar a um absurdo. Porém, ao contrário de Saccheri, ele não afirmou claramente ter encontrado uma contradição. Indo além de Saccheri, Lambert mostrou que a hipótese do ângulo agudo implica que a área do triângulo é proporcional ao seu defeito (veja [teorema 10](#)), e ele especulou que esta hipótese correspondia à geometria em uma “*esfera de raio imaginário*”.

Em relação ao quinto postulado, conforme [Greenberg \(1993\)](#), Lambert escreveu que, sem dúvida, o axioma era muito menos claro e óbvio que os outros. Oferecendo não só a impressão de que ele poderia ser provado, mas em certa medida, motivava a quem o lesse sentir a necessidade de que deveria ser realmente demonstrado matematicamente. No entanto, Lambert ressaltou que à medida que avançava seus estudos no assunto, isso se mostrava apenas como uma primeira impressão, e disse que aquele que lê a obra de Euclides se surpreende, não só com rigor de suas provas, mas também com a simplicidade de sua exposição. Sendo assim, o leitor se surpreende ao ler o quinto postulado quando percebe que Euclides provou proposições que poderiam muito mais facilmente ser deixados sem prova.

Alexis Claude Clairaut (1713-1765) foi um dos principais geômetras franceses. Como Wallis, ele não tentou provar o postulado das paralelas na geometria neutra, mas substituí-lo em sua produção textual de 1741, “*Éléments de Géométrie*”, com outro axioma, outra equivalência lógica para o postulado das paralelas.

Axioma de Clairaut. *É possível construir um quadrilátero convexo cuja medida de cada um de seus ângulos internos é a de um ângulo reto, ou seja, é possível construir um retângulo.*

3.1 Legendre e o Postulado das Paralelas

Nessa seção daremos destaque a um importante personagem nessa etapa histórica da geometria. Segundo [Ávila \(1992\)](#), Adrien-Marie Legendre (1752-1833) foi um ilustre matemático francês dos séculos XVIII e XIX. Ocupou vários cargos públicos, como professor, educador ou assessor científico, fazendo parte da comissão encarregada de propor um sistema racional de pesos e medidas, de cujo trabalho resultou o sistema métrico como o conhecemos hoje. Legendre foi, também, um autêntico “professor”, que se preocupava inclusive com o ensino elementar. Neste campo seu principal trabalho foi o livro “*Éléments de Géométrie*”, publicado no final do século XVIII e que dominaria o ensino da geometria por cerca de 100 anos. É nesse mesmo livro que aparecem as várias tentativas de demonstração do postulado das paralelas, pelas suas diversas edições.

Legendre não tinha conhecimento do trabalho de Saccheri e acabou por redescobrir teoremas de Saccheri na geometria neutra. Ele certamente sabia do texto de Clairaut e rejeitou o seu axioma. Legendre publicou uma coleção de suas muitas tentativas um tanto que tardiamente, em 1833, ano de sua morte. Descreveremos a seguir, conforme [Ávila \(1992\)](#), uma das tentativas de Legendre de demonstrar o postulado das paralelas, na sua versão equivalente chamada de postulado de Playfair.

Cabe salientar que neste trabalho, por abuso de notação, utilizaremos a mesma simbologia para segmento e medida de segmento, assim como, para ângulo e medida de ângulo.

Lema 1 (Legendre). *Dado um triângulo qualquer, é sempre possível construir um novo triângulo cuja soma dos ângulos internos é igual à soma dos ângulos internos do triângulo dado e em que um dos ângulos é menor ou igual à metade de um dado ângulo do triângulo original.*

DEMONSTRAÇÃO.

Seja $\triangle ABC$, um triângulo qualquer, e α , β e γ , seus ângulos internos, respectivamente aos vértices A , B e C . Tracemos um novo triângulo $\triangle AEB$, de modo que o lado \overline{AD} seja congruente ao lado \overline{DE} ($\overline{AD} \cong \overline{DE}$) e o ponto D esteja entre os pontos C e B ($C - D - B$), bem como $\overline{CD} \cong \overline{DB}$ (podemos garantir essas construções pelos axiomas de ordem e pelos axiomas de congruência de Hilbert na [seção 2.1](#) e pelo teorema de Pasch, [teorema 1](#)). Pelo critério *LAL*, teremos dois triângulos colaterais congruentes ($\triangle ADC \cong \triangle EDB$), pois $\overline{AD} \cong \overline{DE}$, $\overline{CD} \cong \overline{DB}$, e os ângulos opostos pelo vértice D são congruentes ([Figura 14](#)).

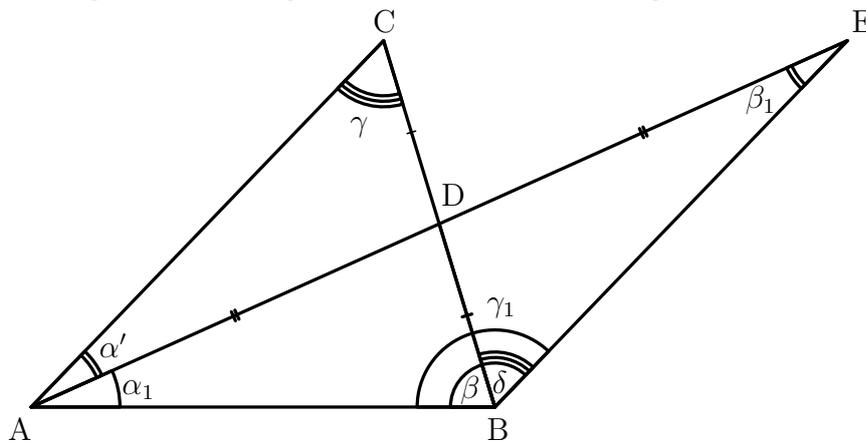
Assim temos $\alpha'(\angle CAD) = \beta_1(\angle BED)$ e, como $\alpha = \alpha' + \alpha_1(\angle EAB)$, podemos substituir e obter $\alpha = \beta_1 + \alpha_1$. Logo ou $\alpha_1 \leq \alpha/2$ ou $\beta_1 \leq \alpha/2$ e, por serem ângulos do novo triângulo formado pelo menos um deles satisfaz a segunda parte da tese.

Vamos agora provar que a soma dos ângulos internos do novo triângulo é igual a soma angular interna do triângulo original.

De fato, observe a [Figura 14](#), sendo $\delta(\angle DBE) = \gamma$ (pela congruência $\triangle ADC \cong \triangle EDB$), e $\gamma_1 = \beta + \delta$, temos

$$\alpha + \beta + \gamma = (\alpha' + \alpha_1) + \beta + \delta = (\alpha_1 + \beta_1) + (\beta + \delta) = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1. \blacksquare$$

Figura 14: Triângulos com mesma soma angular interna



Assim concluímos, que pelo Lema de Legendre podemos construir um novo triângulo onde é possível $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha + \beta + \gamma$, e $\alpha_1 \leq \alpha/2$.

Agora, se construirmos um novo triângulo a partir desse último, com as mesmas condições, teremos um segundo triângulo com as seguintes características:

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = \alpha + \beta + \gamma$$

e

$$\alpha_2 \leq \alpha_1/2,$$

ou seja,

$$\alpha_2 \leq \alpha/2^2.$$

Por indução, podemos concluir que se construirmos n triângulos através desse procedimento teremos:

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = \alpha + \beta + \gamma,$$

e

$$\alpha_n \leq \alpha/2^n.$$

Vejamos, agora, o teorema de Legendre, que faz parte da geometria neutra.

Teorema 8 (Teorema de Legendre.). *A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo não supera dois ângulos retos.*

DEMONSTRAÇÃO.

Vamos supor, por absurdo, que sendo α , β e γ , ângulos internos de um triângulo qualquer, $\alpha + \beta + \gamma > \pi$, ou seja, $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$.

Pelo Lema de Legendre, podemos construir um triângulo de modo que $\alpha_n < \varepsilon$, como também,

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = \alpha + \beta + \gamma = \pi + \varepsilon,$$

obtendo

$$\beta_n + \gamma_n = \pi + (\varepsilon - \alpha_n) > \pi,$$

pois

$$(\varepsilon - \alpha_n) > 0.$$

O que é uma contradição, pois pela geometria neutra, [teorema 6](#), a soma de dois ângulos internos de um triângulo é sempre menor que π . ■

Agora mostraremos, de fato, a tentativa de demonstração do postulado das paralelas por Legendre.

Sabemos, pela geometria neutra, que *a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo ser igual a π* é logicamente equivalente ao *postulado de Playfair* ([teorema 7](#)). Assim, Legendre concluiu que bastava provar tal soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer para demonstrar o postulado de Playfair e, por equivalência, o quinto postulado de Euclides.

Então Legendre tentou reduzir ao absurdo supondo que a soma dos ângulos de um triângulo era menor que π , isto é, que a soma era igual a $\pi - \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$.

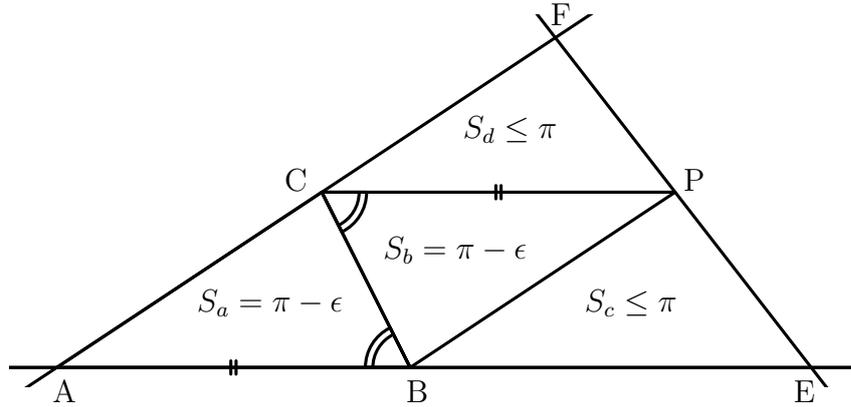
DEMONSTRAÇÃO DE LEGENDRE PARA O POSTULADO DAS PARALELAS.

Seja $\triangle ABC$, um triângulo qualquer. Pelo vértice C , tracemos $\overline{CP} \cong \overline{AB}$, tal que $\angle PCB = \angle ABC$ e P se localize do mesmo lado que B de AC (todos os passos são justificados pelos axiomas de Hilbert, [seção 2.1](#)). Temos que $\triangle ABC \cong \triangle PCB$, pelo critério *LAL*, pois além das duas congruências anteriores, temos o lado \overline{CB} em comum ([Figura 15](#)). E pela congruência, $\triangle ABC$ e $\triangle PCB$ têm a mesma soma de ângulos internos, $S_a = S_b = \pi - \varepsilon$.

Agora, por P , tracemos uma reta que encontre \overline{AB} e \overline{AC} em E e F , respectivamente, tal que $A - B - E$ e $A - C - F$, formando $\triangle BEP$ e $\triangle CPF$, cujas somas S_c e S_d , sabemos que não são maiores que π . Então:

$$S_a + S_b + S_c + S_d \leq 4\pi - 2\varepsilon.$$

Figura 15: Triângulos da demonstração de Legendre



Podemos observar que a soma S dos ângulos de $\triangle AEF$ é $S_a + S_b + S_c + S_d$ menos os ângulos com vértices em B , C e P . Agora, em cada vértice a soma é π , logo subtraindo 3π , obteremos $S \leq \pi - 2\epsilon$. O que nos mostra que podemos construir um triângulo maior cuja soma seria $S_2 \leq \pi - 4\epsilon$, e assim por diante, até obtermos uma soma $S_n \leq \pi - 2^n\epsilon$, com n suficientemente grande para o valor da soma ser negativo, o que é uma contradição.

Portanto a soma dos ângulos de um triângulo não pode ser menor que π . E como, pelo Teorema de Legendre (teorema 8), também não pode ser maior que π , concluímos que a soma é exatamente π . ■

Porém, se observarmos com um olhar cuidadoso veremos que esse matemático cometeu um erro em sua demonstração que o levou a uma *tautologia*, também chamado de *ciclo vicioso*, que consiste em acabar supondo verdadeiro aquilo mesmo que se deseja provar.

Voltemos a demonstração ao momento “por P , tracemos uma reta que encontre AB e AC em E e F , respectivamente”. Estamos, assim, admitindo a existência de uma reta \overleftrightarrow{EF} . Esse passo é exatamente uma equivalência do postulado das paralelas, isto é, vale o seguinte teorema.

Teorema 9. *Por um ponto P no interior de um ângulo qualquer $\angle BAC$, é sempre possível traçar uma reta que encontre os dois lados do ângulo em E e F , respectivamente, tal que o ponto E está entre os pontos A e B ($A - E - B$) e o ponto F está entre os pontos A e C ($A - F - C$) se, e somente se, é válido o postulado das paralelas.*

DEMONSTRAÇÃO.

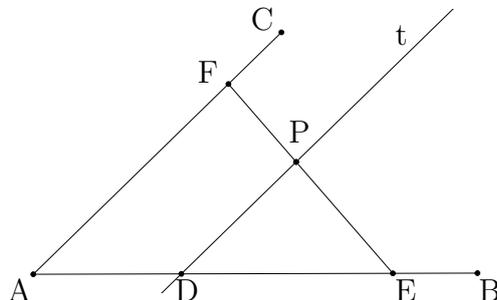
(\Rightarrow) A demonstração é a mesma que Legendre desenvolveu.

(\Leftarrow) Seja $\angle BAC$ e um ponto P em seu interior. Precisamos provar que existe uma reta passando por P encontrando os dois lados do ângulo.

Tracemos uma reta t , passando por P e paralela a \overleftrightarrow{AC} , conforme Figura 16. A reta

t encontra \overleftrightarrow{AB} , pois pelo postulado de Playfair não pode haver duas retas paralelas a reta t passando por A .

Figura 16: Ângulo da equivalência de Legendre



Agora, seja D a interseção entre a reta t e \overleftrightarrow{AB} . Seja E em \overleftrightarrow{AB} , tal que $A - D - E$. Assim provamos que \overleftrightarrow{PE} encontra \overleftrightarrow{AC} num ponto F , pois teríamos, pelo ponto P , duas retas \overleftrightarrow{PE} e t , ambas paralelas à mesma reta \overleftrightarrow{AC} , contradizendo o postulado de Playfair.

Portanto a equivalência é verdadeira. ■

Esse fato nos dá um exemplo de como o modelo geométrico ao ser usado nas demonstrações pode nos induzir ao erro se não nos disciplinarmos a justificar cada passo das demonstrações.

Os matemáticos estavam ficando desanimados com as inúmeras tentativas de provar o quinto postulado de Euclides e todas serem ineficazes. O húngaro Farkas Bolyai, que também se aventurou nas tentativas de provar o quinto postulado, escreveu a seu filho János, outro matemático, que não deveria se arriscar no mesmo caminho. Mas o jovem Bolyai não foi dissuadido pelas advertências de seu pai, pois ele tinha uma ideia completamente nova. Ele assumiu que a negação do postulado das paralelas de Euclides não era um absurdo, e em 1823 foi capaz de escrever a seu pai que publicaria um trabalho sobre as paralelas.

A seguir veremos como se desenvolveram as descobertas das *geometrias não-euclidianas* e suas implicações na matemática moderna e no pensamento científico em geral.

4 A descoberta das Geometrias Não-Euclidianas

Segundo [Greenberg \(1993\)](#), János Bolyai tinha 13 anos quando dominou o cálculo diferencial e integral. Seu pai, Farkas Bolyai, escreveu ao seu amigo, Carl Friedrich Gauss, um pedido para levar o jovem prodígio para passar algum tempo com sua família como um matemático aprendiz, porém Gauss nunca respondeu a este pedido. Quinze anos mais tarde, Farkas, com o intuito de divulgar seu trabalho, enviou seu livro para Gauss, o *Tentamen* (1831), onde János havia publicado suas descobertas. Porém János decepcionou-se ao ler a resposta de Gauss ao seu pai, pois Gauss afirmava que já havia descoberto resultados muito semelhantes anteriormente. E mesmo esse grande matemático tendo elogiado o trabalho do jovem János, Bolyai ainda acreditava que seu pai havia informado Gauss secretamente, facilitando uma suposta apropriação de suas descobertas. Talvez por esse fato, o jovem nunca tenha publicado sua pesquisa.

Ainda, segundo [Greenberg \(1993\)](#), Gauss esteve trabalhando em geometria não-euclidiana desde seus 15 anos de idade, isto é, desde 1792, e, de fato, há evidências de que Gauss antecipou algumas das descobertas de János Bolyai. Tanto que em 1817, em uma carta disse que estava cada vez mais convencido de que nossa geometria não poderia ser provada, pelo menos não pela razão humana, nem para a razão humana. Em 1824, ele escreveu a Taurinus, numa resposta de suas tentativas de prova, que havia mais de 30 anos que ponderava o assunto e por ser de difícil aceitação não publicara nada, mas que com constante reflexão essas ideias se revelavam nada impossíveis. Assim todos seus esforços para a descoberta de uma contradição, uma incoerência, nesta geometria não-euclidiana, haviam fracassado.

Apesar de sua grande reputação, Gauss estava realmente com medo de fazer públicas suas descobertas em geometria não-euclidiana, pois era muito perfeccionista e tinha grande antipatia em ser inserido em qualquer tipo de polêmica. Sua devoção ao trabalho aperfeiçoado foi expressa pelo lema em seu selo, “*pauca sed matura*” (poucos, mas maduros).

Segundo [Eves \(1995\)](#), Gauss nasceu em Brunswick, Alemanha, em 1777 e seu pai era um trabalhador braçal que era pouco favorável à educação. Porém, sua mãe, ainda que inculta, lhe encorajava e manteve por toda a vida grande orgulho pelas realizações do filho. Gauss é universalmente considerado como o maior matemático do século XIX e, ao lado de Arquimedes e Isaac Newton, como um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Ele foi chamado de “o príncipe dos matemáticos” por causa da variedade e profundidade de sua obra.

Outro ator neste drama histórico veio para roubar os holofotes de ambos J. Bolyai e Gauss: o matemático russo Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856). Ele dedicou mais de vinte anos à sua descoberta e foi o primeiro a publicar, na verdade, uma conta de geometria não-euclidiana, em 1829. Lobachevsky inicialmente chamou sua geometria de “imaginária”, e depois “pangeometria”. Em uma carta de 1846 a Schumacher, Gauss reiterou sua própria prioridade no desenvolvimento da geometria não-euclidiana, mas admitiu que “Lobachevsky realizou a tarefa de maneira magistral e num espírito verdadeiramente geométrico”. Em recomendação de Gauss, Lobachevsky foi eleito para a Sociedade Científica de Göttingen.

Greenberg (1993) ainda nos diz que é incrível o quão semelhantes são as abordagens de J. Bolyai e Lobachevsky e como eles desenvolveram o assunto de maneira mais aprofundada do que Gauss. Ambos mostraram que a trigonometria esférica euclidiana é válida na geometria neutra e ambos construíram um mapeamento da esfera para o plano não-euclidiano para derivar as fórmulas da trigonometria não-euclidiana. Ambos obtiveram uma constante em suas fórmulas que eles não conseguiam explicar. Em um trabalho posterior de Riemann, este mostrou que esta constante é a *curvatura do plano não-euclidiano* (pois a curvatura do plano euclidiano é nula).

Foi só depois da morte de Gauss em 1855, quando suas correspondências foram publicadas, que o mundo matemático começou levar as ideias não-euclidianas a sério. Alguns dos melhores matemáticos (Beltrami, Klein, Poincaré e Riemann) levaram o assunto a diante, esclarecendo-o, e aplicaram-no a outros ramos da matemática, como na teoria das funções complexas.

A real independência do postulado das paralelas frente aos outros postulados da geometria euclidiana só foi estabelecida inquestionavelmente quando se forneceram demonstrações da consistência da hipótese do ângulo agudo (EVES, 1995). E em 1868, o matemático Eugênio Beltrami (1835-1900) pôs fim a controvérsia: ele demonstrou que é impossível construir uma demonstração para o quinto postulado (GREENBERG, 1993). Ele fez isso com a exibição de um modelo euclidiano da geometria não-euclidiana.

Andrade (2013) refere-se que a partir desse fato, surgiu o questionamento de que o quinto postulado não seria uma lei natural, pois nem sequer era evidente por si mesmo. Com o rompimento desse paradigma vieram os questionamentos: e se o universo não é euclidiano? É hiperbólico? Assim o quinto postulado seria uma decisão intelectual imposta para validar uma teoria adaptando-a a um fato constatado empiricamente, ou seja, adaptado ao modelo físico? Tudo que havia sido feito até aquele momento ainda era válido?

A descoberta das geometrias não-euclidianas acabou por romper o paradigma da crença tradicional do ponto de vista da verdade absoluta em matemática. Conseqüentemente, para solucionar esse dilema, gradativamente se consolidou uma nova concepção da matemática, não mais como uma ciência da natureza, mas como pura criação intelectual,

a *Matemática Pura*. A partir daí, o próximo passo seria escolher quais objetos de estudo dessa nova matemática, e a escolha foi a mesma dos geômetras aqui envolvidos, *os sistemas axiomáticos* através do processo dedutivo.

Segundo Eves (1995), o ponto de vista, de que a geometria, quando aplicada ao espaço, é uma ciência independente da realidade física, choca-se fortemente com a teoria do espaço de Emmanuel Kant (1724-1804), que dominava o pensamento filosófico à época da descoberta da geometria de Lobachevsky. A teoria kantiana acreditava que a noção de espaço era inerente ao espírito humano e que os postulados euclidianos eram os únicos possíveis para o estudo consistente de tal espaço.

4.1 Algumas noções sobre a Geometria Elíptica

Com relação as geometrias não-euclidianas descobertas, segundo Coutinho (1989), de acordo com a substituição que se faz do postulado das paralelas surgem dois tipos clássicos de geometrias não-euclidianas: a *geometria hiperbólica* e a *geometria elíptica*. Na geometria hiperbólica o postulado de Euclides é substituído pelo que afirma que, por um ponto dado P , fora de uma reta r , existe mais de uma reta paralela a essa reta r , enquanto que na geometria elíptica postula-se que não existe nenhuma reta paralela. Porém, a partir da não existência de retas paralelas entramos em contradição com a geometria neutra, que garante a existência de retas paralelas como uma consequência imediata do Teorema dos ângulos alternos e internos (teorema 4), juntamente com o axioma de congruência 4. Assim a geometria elíptica vai mais além, fazendo outras substituições nos axiomas.

Bernhard Riemann, que era um estudante de Gauss, teve a perspicácia mais profunda na geometria, e não apenas a lógica. Riemann inventou o conceito de uma superfície geométrica abstrata, que não precisa estar contida no espaço tridimensional euclidiano, onde as “retas” podem ser interpretadas como geodésicas e a curvatura intrínseca da superfície pode ser definida com precisão. A geometria elíptica, também chamada de *geometria esférica*, “existe” em tais superfícies que têm *curvatura positiva constante*, enquanto a geometria hiperbólica de Bolyai e Lobachevsky “existe” sobre uma tal superfície de *curvatura constante negativa*.

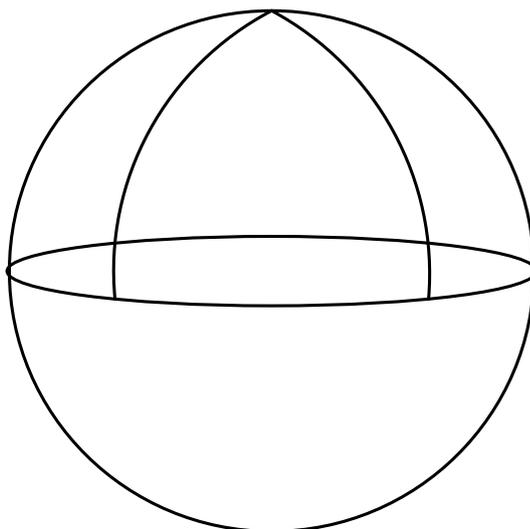
Traremos alguns detalhes, apenas a fins informativos, da geometria elíptica, para que o leitor, tendo contato desses conceitos, possa futuramente, a sua vontade, instruir-se de maneira mais natural. Então, Coutinho (1989) afirma que na geometria elíptica de Riemann abandona-se a noção de “*estar entre*” e a reta não é mais infinita, mas sim limitada. E, ainda, temos um novo postulado:

Postulado de Riemann. *Quaisquer duas retas em um plano têm um ponto em comum.*

Um modelo para essa geometria seria a superfície esférica euclidiana, onde as retas

são os círculos máximos, chamados de *geodésicas* da superfície esférica (Figura 17). O que acaba sendo uma excelente geometria para resolver problemas de navegação no globo terrestre, onde podemos observar um conjunto de geodésicas com pontos em comum nos polos norte e sul, os meridianos. Para uma exposição mais detalhada, consulte Coutinho (1989), capítulo 8, *A navegação marítima: uma aplicação da geometria de Riemann*.

Figura 17: Modelo para a geometria elíptica, a esfera euclidiana



4.2 Uma introdução a Geometria Hiperbólica

Segundo Andrade (2013), geometria hiperbólica é, por definição, a geometria que você começa assumindo todos os axiomas para a geometria neutra e substituindo o postulado das paralelas de Hilbert por sua negação, o que vamos chamar de “*axioma hiperbólico*”.

Axioma Hiperbólico ou Postulado de Lobachevsky. *Na geometria hiperbólica existe uma reta l e um ponto P não pertencente a l de tal modo que existem, pelo menos, duas retas distintas paralelas a l que contém P .*

Sendo assim, a geometria hiperbólica é, de certa forma, bastante parecida com a geometria euclidiana, pois a diferença está em um único axioma. Vale enfatizar que todos os teoremas da geometria neutra são verdadeiros tanto na geometria euclidiana como na geometria hiperbólica.

O teorema seguinte é a primeira consequência importante do axioma hiperbólico.

Teorema 10. *A soma das medidas dos ângulos de um triângulo é estritamente menor que π (dois ângulos retos, também chamado de ângulo raso). Se ΔABC é um triângulo qualquer, então π menos a soma angular de ΔABC é um número positivo. Este número é chamado o defeito do triângulo.*

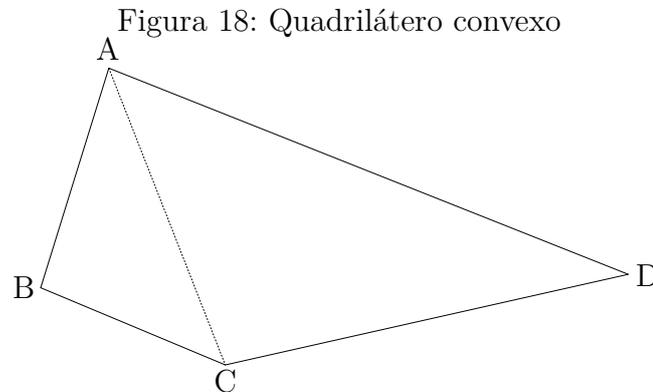
DEMONSTRAÇÃO.

Pela geometria neutra sabemos que a soma dos ângulos interno de um triângulo é menor ou igual a π , (teorema 7). Caso exista algum triângulo cuja soma angular interna seja igual a dois ângulos retos implicará no postulado das paralelas e a recíproca é verdadeira (teorema 7). Ou seja, uma contradição com o axioma Hiperbólico. Logo, na geometria hiperbólica, a soma das medidas angulares internas de qualquer triângulo é menor que dois ângulos retos. ■

Corolário 1. *Todos os quadriláteros convexos têm soma angular inferior a dois ângulos rasos (2π). Em particular, não existem retângulos.*

DEMONSTRAÇÃO.

Dado um quadrilátero convexo qualquer $ABCD$ (Figura 18). Tome a diagonal \overline{AC} e considere os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$; pelo teorema 10, esses triângulos têm soma dos ângulos inferiores a π . A suposição de que $ABCD$ é convexo implica que \overline{AC} está entre \overline{AB} e \overline{AD} e que \overline{CA} está entre \overline{CB} e \overline{CD} , de modo que $\angle BAC + \angle CAD = \angle BAD$ e $\angle ACB + \angle ACD = \angle BCD$. Ao adicionar todos os seis ângulos, vemos que a soma dos ângulos internos de $ABCD$ é menor que 2π , implicando, também, a não existência de retângulos. ■



O Teorema Hiperbólico Universal, teorema 11, que é decorrência do corolário 1 do teorema 10, garante a existência de pelo menos duas retas paralelas a toda e qualquer reta do plano hiperbólico.

Teorema 11 (Teorema Hiperbólico Universal). *Sejam uma reta l e um ponto P , não contido em l , existem, pelo menos, duas paralelas distintas a l passando por P .*

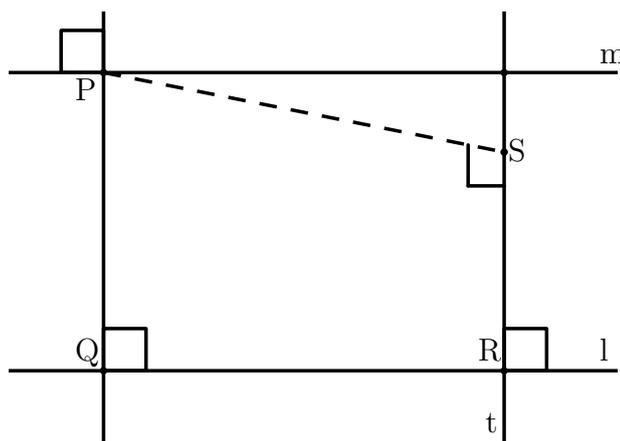
DEMONSTRAÇÃO.

Trace uma perpendicular \overleftrightarrow{PQ} a reta l e trace uma reta m que passe por P , de modo que seja perpendicular a \overleftrightarrow{PQ} . Seja R outro ponto em l , erga uma perpendicular t para l através de R , e baixe uma perpendicular \overleftrightarrow{PS} para t (Figura 19). Agora \overleftrightarrow{PS} é

paralela a l , uma vez que são ambos perpendiculares a t (teorema 4). Afirmamos que m e \overleftrightarrow{PS} são retas distintas. Suponha, por contradição, que S encontra-se em m . Então $PQRS$ é um retângulo. Isso contradiz o corolário 1.

Logo para cada reta l e para cada ponto P , não contido em l , passam por P , pelo menos, duas paralelas distintas para l . ■

Figura 19: Teorema Hiperbólico Universal



Corolário 2. Na geometria hiperbólica, para cada reta l e cada ponto P não contido em l , há uma infinidade de paralelas a l através P .

DEMONSTRAÇÃO.

Apenas varie o ponto R no teorema 11. ■

O teorema 12, nos mostra que a noção de semelhança na geometria hiperbólica é equivalente a noção de congruência, o que nos fornece um novo critério para a congruência de triângulos: o critério ângulo-ângulo-ângulo (AAA). Na sua demonstração utilizaremos a definição 11 de desigualdade de segmentos.

Teorema 12. Dados dois triângulos quaisquer, se esses triângulos são semelhantes, então os mesmos são congruentes.

DEMONSTRAÇÃO.

Suponha, por contradição, que existam triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, que são semelhantes, mas não congruentes.

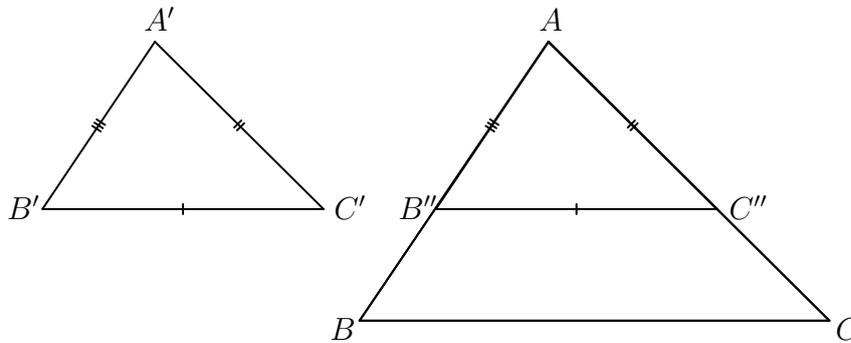
Considere as ternas $(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC})$ e $(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{B'C'})$ de lados destes triângulos. Uma dessas ternas deve conter, pelo menos, dois segmentos que são maiores do que os dois segmentos correspondentes da outra terna, por exemplo, $\overline{AB} > \overline{A'B'}$ e $\overline{AC} > \overline{A'C'}$. Em seguida (pela definição de $>$) escolha pontos B'' em \overleftrightarrow{AB} e C'' em \overleftrightarrow{AC} tal que $\overline{AB''} \cong \overline{A'B'}$

e $\overline{AC''} \cong \overline{A'C'}$ (Figura 20). Por LAL , $\Delta A'B'C' \cong \Delta AB''C''$. Consequentemente, ângulos correspondentes são congruentes: $\angle AB''C'' = \angle B'$, $\angle AC''B'' = \angle C'$.

Pela hipótese de que ΔABC e $\Delta A'B'C'$ são semelhantes, também temos $\angle AB''C'' \cong \angle B$, $\angle AC''B'' \cong \angle C$. Isso implica que as retas \overleftrightarrow{BC} e $\overleftrightarrow{B''C''}$ são paralelas (teorema dos ângulos alternos internos, teorema 4), então esse quadrilátero $\square BB''C''C$ é convexo. Também temos, $\angle B + \angle BB''C'' = \angle AB''C'' + \angle BB''C'' = \pi = \angle AC''B'' + \angle CC''B'' = \angle C + \angle CC''B''$ (pela congruência de ângulos de triângulos semelhantes e pela definição de ângulos suplementares, isto é, ângulos cuja soma de suas medidas resulta em π). Segue que o quadrilátero $\square BB''C''C$ tem soma angular igual a um ângulo raso. Isso contradiz o corolário 1.

Logo triângulos semelhantes só podem ser congruentes. ■

Figura 20: Triângulos semelhantes



Podemos observar, pelos resultados obtidos até agora que, na geometria hiperbólica, o “espaço hiperbólico” acaba por ser um tanto diferente do espaço euclidiano. Conforme Greenberg (1993), em um mundo hiperbólico é impossível ampliar ou reduzir um triângulo sem distorção, isto é, uma fotografia seria inerentemente surrealista.

Pelo teorema 12, um segmento pode ser determinado com o auxílio de um ângulo. Por exemplo, um ângulo de um triângulo equilátero determina o comprimento dos lados de forma única. Também é equivalente dizer que, na geometria hiperbólica, a unidade de medida é absoluta, pois não conseguimos medir nenhum polígono tomando como medida outro polígono semelhante. Nesse ponto é que o conceito de *defeito do triângulo* se torna importante, no cálculo de áreas hiperbólicas (veja mais em Andrade (2013) e Greenberg (1993)).

Agora estudaremos algumas propriedades dos quadriláteros de Saccheri, já definidos no Capítulo 3 (Figura 12), extraídas de Andrade (2013).

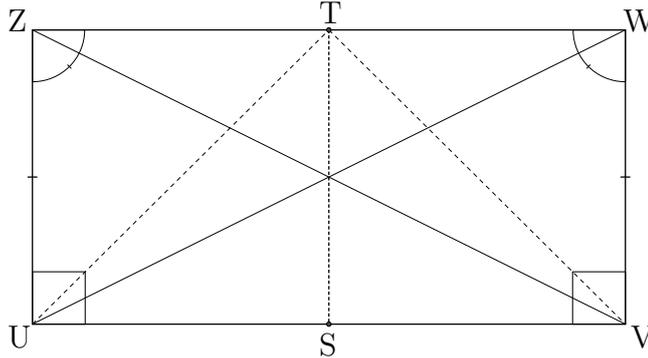
Teorema 13. *Num quadrilátero de Saccheri valem as seguintes afirmações:*

1. as diagonais são congruentes;

2. os ângulos do topo são congruentes (1º teorema de Saccheri);
3. a altitude é perpendicular ao topo e à base (2º teorema de Saccheri);
4. os ângulos do topo são agudos (3º teorema de Saccheri).

DEMONSTRAÇÃO. Observe a [Figura 21](#) e acompanhe o desenvolvimento.

Figura 21: Quadrilátero de Saccheri, com a altitude \overline{TS} , usado na demonstração do [teorema 13](#).



1. Seja o quadrilátero de Saccheri $\square UVWZ$, com $\overline{UZ} \cong \overline{VW}$, $\angle ZUV \cong \angle WVU$, pelo critério LAL, temos as congruências dos triângulos retângulos ΔUVZ e ΔVUW , pois \overline{UV} é um segmento em comum. Portanto vale a congruência $\overline{UW} \cong \overline{VZ}$, ou seja, as diagonais são congruentes.
2. Pelo critério LLL ([teorema 3](#)), vale a congruência $\Delta UZW \cong \Delta VWZ$, pois $\overline{UZ} \cong \overline{VW}$ (por definição), $\overline{UW} \cong \overline{VZ}$ (pela congruência do item 1) e \overline{ZW} é um segmento comum. Assim, os ângulos correspondentes $\angle UZW$ e $\angle VWZ$ são congruentes, e ainda, são agudos como será mostrado no item 4 deste teorema.
3. Por definição, a altitude é o segmento que liga os pontos médios da base e do topo. Pelo critério LAL, as congruências $\overline{UZ} \cong \overline{VW}$ (por definição), $\angle UZW \cong \angle VWZ$ (pela congruência do item 2) e $\overline{ZT} \cong \overline{WT}$ (pela definição de altitude) implicam na congruência $\Delta UZT \cong \Delta VWT$. Agora, pelo critério LLL (novamente [teorema 3](#)), as congruências $\overline{UT} \cong \overline{VT}$ (da congruência anterior $\Delta UZT \cong \Delta VWT$), $\overline{US} \cong \overline{VS}$ (da definição de altitude) e o segmento em comum \overline{TS} , implicam na congruência $\Delta UTS \cong \Delta VTS$, logo os ângulos correspondentes $\angle UST$ e $\angle VST$ são congruentes e, por serem suplementares, são retos. Portanto \overline{TS} é perpendicular à base.

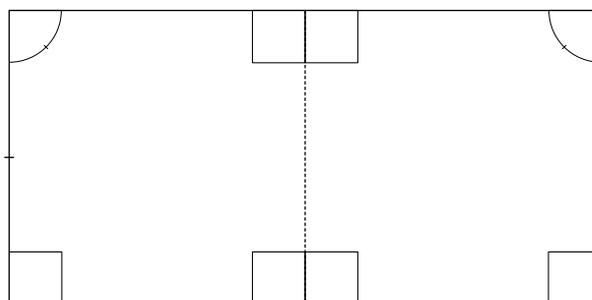
De modo análogo, consideremos os triângulos ΔUZS e ΔVWS , congruentes pelo critério LAL, e, assim ΔZST e ΔWST , congruentes pelo critério LLL, concluímos que \overline{TS} também é perpendicular ao topo, pois os ângulos correspondentes $\angle ZTS$ e $\angle WTS$ são congruentes e, por serem suplementares, são retos.

4. Segue imediatamente do [corolário 1](#), pois a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero convexo hiperbólico é inferior a um ângulo raso. ■

Agora, veremos algumas propriedades dos *quadriláteros de Lambert*, já mencionados anteriormente no [Capítulo 3](#). A primeira propriedade evidente é que a altitude do quadrilátero de Saccheri o divide em dois quadriláteros de Lambert, decorrência direta do item 3 do [teorema 13](#) ([Figura 21](#)). A partir daí, sem necessidade de mais argumentos, sabemos que o quarto ângulo é agudo.

No quadrilátero de Lambert, chamamos de *base* um lado que é adjacente a dois ângulos retos e chamamos de *topo* o lado oposto. Podemos observar que há duas opções para tomarmos como base e, conseqüentemente, o topo será referente a base adotada.

Figura 22: Quadrilátero de Saccheri dividido em dois quadriláteros de Lambert.



A seguir apresentaremos alguns modelos propostos por excelentes matemáticos para a geometria hiperbólica com o objetivo auxiliar o estudo dos resultados obtidos de modo mais dedutivo no “mundo hiperbólico”, como também, para o melhor entendimento sobre o que seriam os modelos em geometria.

4.3 Alguns modelos para a Geometria Hiperbólica

De modo geral, em um sistema axiomático, podemos interpretar os termos indefinidos de alguma forma, ou seja, dar aos termos indefinidos um significado particular. Chamamos isso de interpretação do sistema. Analisamos, então, se essa interpretação dos axiomas é correta e, em caso afirmativo, podemos chamar essa interpretação de modelo. Assim, tomando esse conceito de modelo, é possível obter outras interpretações dos termos indefinidos e dos demais elementos do sistema axiomático diferentes das habituais, isto é, é possível adotar outras interpretações para o termo ponto que não a interpretação usual, tradicionalmente usada na geometria euclidiana, como também, é possível adotar outras interpretações para retas que não as retas usuais tradicionalmente usadas na geometria euclidiana.

[Greenberg \(1993\)](#) levanta o seguinte questionamento: qual a utilidade dos modelos? E, em resposta, nos apresenta que a principal vantagem de qualquer modelo de um sistema axiomático é que todos os teoremas do sistema são verificados utilizando a interpretação do modelo, justamente porque a interpretação dos elementos do sistema axiomático é correta,

ou seja, em nenhum momento entram em contradição. E, ainda, se temos, informalmente, alguma suposição sobre uma afirmação, podemos analisá-la no modelo e se constatarmos que não é possível, já descartamos sua veracidade. Porém, ao constatar a possibilidade de sua validade pelo modelo, voltamos ao método axiomático para garantirmos a demonstração da afirmação. Portanto, os modelos se tornam “laboratórios” para a realização de experiências com o sistema formal.

Um exemplo esclarecedor sobre o conceito de modelo para um sistema axiomático, pode ser elaborado ao construirmos uma geometria com apenas três axiomas e três termos indefinidos que é chamada de *geometria de incidência* (GREENBERG, 1993, p. 53). Na geometria de incidência usamos **ponto**, **reta** e **estar sobre** como termos indefinidos juntamente com os axiomas de incidência já enunciados no capítulo 2 na página 22. Para facilitar a leitura, repetimos estes três axiomas:

- I Para cada dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.
- II Toda reta contém pelo menos dois pontos.
- III Existem pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma reta e todos os pontos estão sobre o mesmo plano.

Como modelo para esta geometria podemos usar a seguinte interpretação:

- Os pontos são as letras A , B e C , isto é, neste modelo existem apenas três pontos.
- As retas são os conjuntos $\{A, B\}$, $\{A, C\}$ e $\{B, C\}$, isto é, neste modelo existem apenas três retas.
- A noção de estar sobre é dada pela regra que diz que o ponto A está sobre a reta $\{A, B\}$ e sobre a reta $\{A, C\}$ mas não está sobre a reta $\{B, C\}$. Para os demais pontos, a regra é análoga.

Note que com esta interpretação dos termos indefinidos, os axiomas de incidência são todas afirmações verdadeiras. Portanto, esta interpretação é um modelo para a geometria de incidência que chamaremos de modelo dos três pontos.

Poderíamos elaborar outros modelos para a geometria de incidência. De maneira muito semelhante ao modelo dos três pontos, passamos a descrever agora o modelo dos quatro pontos:

- Os pontos são as quatro letras A , B , C e D .
- As retas são os conjuntos $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{B, C\}$, $\{B, D\}$ e $\{C, D\}$, isto é, neste modelo existem apenas seis retas.

- A noção de estar sobre é dada pela regra que diz que o ponto A está sobre a reta $\{A, B\}$ e sobre a reta $\{A, C\}$ mas não está sobre a reta $\{B, C\}$, nem $\{B, D\}$, nem $\{C, D\}$. Para os demais pontos, a regra é análoga.

Podemos constatar que com esta interpretação dos termos indefinidos, os axiomas de incidência são todos, também, afirmações verdadeiras, portanto, esta interpretação é um modelo para a geometria de incidência. Ainda podemos observar que, neste modelo, o axioma das paralelas é uma afirmação verdadeira, já que dada uma reta e um ponto fora dela existe uma única reta paralela a reta dada que passa por este ponto. Por exemplo dada a reta $\{A, B\}$ e o ponto C , a única reta que passa por C e é paralela à $\{A, B\}$ é $\{C, D\}$. Podemos verificar facilmente esta propriedade para as outras retas e os outros pontos deste modelo.

Seguindo o mesmo processo, adotamos, agora, o modelo de cinco pontos, as letras A, B, C, D e E . Desta vez teremos dez retas contendo exatamente dois pontos distintos cada. A noção de estar sobre é a mesma dos modelos de três e quatro pontos. Nesse modelo, a existência de retas paralelas ainda é garantida, como no modelo de quatro pontos. Agora, vejamos que, neste caso, o axioma hiperbólico é válido, pois tomemos a reta $\{A, B\}$ e teremos como retas paralelas as retas $\{C, D\}$, $\{C, E\}$ e $\{D, E\}$. Veremos que, por exemplo, as retas $\{C, D\}$ e $\{C, E\}$ são paralelas a $\{A, B\}$ e que possuem o ponto C em comum, isto é, existem no mínimo duas retas paralelas a reta $\{A, B\}$ passando pelo ponto C . Analogamente, verificamos o axioma hiperbólico – na verdade, o teorema hiperbólico universal ([teorema 11](#)) – para as outras nove retas do modelo. Nesse caso, o postulado das paralelas não é válido, mas sim, a sua negação.

A partir do raciocínio anterior, podemos concluir que o axioma das paralelas não pode ser demonstrado nem refutado a partir da geometria de incidência, pois existem modelos para essa geometria em que o axioma das paralelas é válido, como no caso do modelo de quatro pontos, e também existem modelos em que o axioma hiperbólico é verdadeiro, como neste caso, no modelo de cinco pontos.

O mesmo raciocínio pode ser usado para investigar a impossibilidade do postulado das paralelas ser provado na geometria neutra. Se encontrarmos dois modelos para a geometria neutra de tal forma que o postulado das paralelas possa ser verificado em um deles e a negação deste postulado possa ser verificada no outro, fica garantida a impossibilidade de demonstrá-lo ou refuta-lo a partir dos axiomas da geometria neutra. Neste caso concluiríamos que o postulado das paralelas é independente dos demais axiomas da geometria neutra.

Em suma, os modelos podem ser usados para provar a independência dos axiomas, ou seja, os modelos podem ser utilizados para demonstrar a impossibilidade de prova dos axiomas a partir de outros axiomas. E, ainda, um sistema que possui uma gama de

diferentes modelos possíveis pode possuir uma extensa aplicabilidade em problemas reais da natureza, o que muitas vezes não é nem percebido pelos matemáticos que desenvolvem a teoria.

Segundo Samuco et al. (2005), o italiano Eugênio Beltrami (1835-1900) descreve em seu artigo “Uma tentativa de interpretação de geometria hiperbólica”, o primeiro modelo euclidiano para a geometria hiperbólica. Descrito em 1868, três décadas e meia depois do trabalho de Lobachevsky, o modelo teve grande importância para a aceitação dessa geometria, pois pela primeira vez se comprovava uma consistência relativa do sistema axiomático hiperbólico e a independência do quinto postulado. Mostrou-se que a possibilidade de se encontrar uma contradição na geometria hiperbólica é a mesma que na geometria euclidiana: a geometria euclidiana é consistente se, e somente se, a geometria hiperbólica é consistente. Além disso, o modelo fechou a questão da independência do quinto postulado frente aos outros axiomas da geometria euclidiana.

Segundo Andrade (2013), no modelo de Beltrami, o plano hiperbólico consiste do disco unitário canônico aberto de \mathbb{R}^2 , ou seja, $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}; x^2 + y^2 < 1\}$. As retas são as interseções de retas euclidianas com o disco \mathbb{D}^2 (Figura 23). Porém a mensuração de ângulos nesse modelo apresenta distorções em relação à medida euclidiana, pois a medida do ângulo entre duas retas seria a medida euclidiana do ângulo formado por dois arcos de círculos perpendiculares ao bordo de \mathbb{D}^2 incidindo nos extremos das retas¹. Conforme Samuco et al. (2005), posteriormente, em 1871, Félix Klein (1849-1925) aplicou o conceito de *geometria projetiva* do matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895), para introduzir um conceito de distância no modelo proposto por Beltrami, passando a chamar-se *modelo de Beltrami-Klein*, ou apenas *modelo de Klein* (Figura 23). Segundo Eves (1995), Klein ainda nos deixou uma famosa definição de geometria: “uma geometria é o estudo das propriedades de um conjunto S que permanecem invariantes quando se submetem os elementos de S às transformações de algum grupo τ de transformações”.

Beltrami apresentou um outro modelo, conhecido por *pseudo-esfera*. A pseudo-esfera é uma superfície de revolução obtida pela rotação de uma curva chamada *tractiz* em torno de sua assíntota, o eixo OY . A equação da tractiz correspondente a parte acima do eixo OX é dada por $y = c \cdot \operatorname{arcosh}(c/x) - \sqrt{c^2 - x^2}$, onde c é uma constante real (Figura 24). Conforme Greenberg (1993), uma característica da tractiz é que a tangente em qualquer ponto da curva em relação a assíntota vertical é a constante c . Ainda, conforme Coutinho (1989), o modelo da pseudo-esfera possui uma limitação pois é impossível o prolongamento de certas geodésicas para além das arestas que a pseudo-esfera possui, contrariando o segundo postulado de Euclides.

O matemático Ferdinand Minding (1806-1885) foi o primeiro a publicar um artigo

¹ Um arco de círculo é *perpendicular ao bordo* de \mathbb{D}^2 quando as retas tangentes do arco de círculo e do bordo de \mathbb{D}^2 , no ponto onde eles se intersectam, são perpendiculares.

Figura 23: Modelo de Beltrami-Klein e sua representação de ângulos

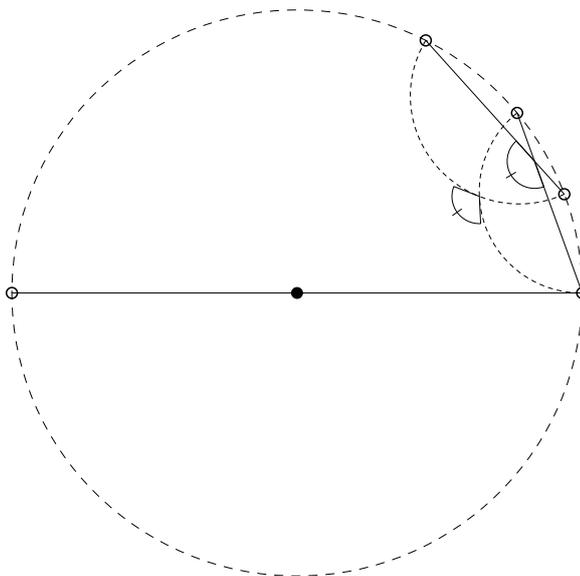
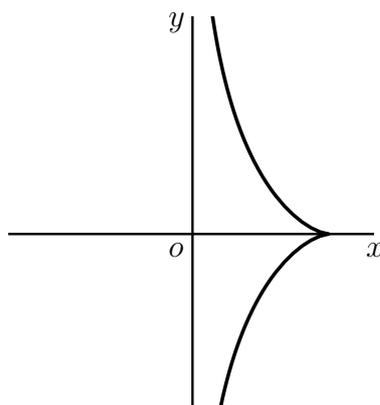


Figura 24: Curva Tractiz, cuja rotação em torno do eixo OY determina a pseudo-esfera.



sobre a pseudo-esfera, em 1839, mas Gauss tinha escrito uma nota inédita sobre essa superfície por volta de 1827, chamando-a de “o oposto de uma esfera”. Curiosamente, nenhum deles reconheceu que a pseudo-esfera podia ser usada para provar a consistência da geometria hiperbólica, como fez Beltrami.

Ainda segundo [Greenberg \(1993\)](#), a representação na pseudo-esfera nos permite dar um significado geométrico a constante fundamental k que aparece em alguns resultados da geometria hiperbólica, como dito no [Capítulo 3](#). Esta constante seria a curvatura da superfície que, a grosso modo, é uma maneira, descoberta por Gauss, de medir o quanto a superfície deixa de ser plana na vizinhança de cada um de seus pontos. De um modo geral, a curvatura k varia de ponto a ponto, e tem valor próximo de zero em regiões onde a superfície é bastante plana, e valores muito grandes em regiões em que a curvatura da superfície é acentuada. Para algumas superfícies a curvatura é a mesma em todas as

regiões, estas são chamadas *superfícies de curvatura constante*. Para uma definição mais precisa do conceito de curvatura, o leitor pode consultar [Carmo \(1976\)](#).

O modelo exitoso, pela sua simplicidade e elegância, foi apresentado por Poincaré ([ANDRADE, 2013](#)). E foi com grande elogio que [Boyer \(1996\)](#) apresentou o francês Henri Poincaré (1864-1912), um dos matemáticos mais criativos de todos os tempos:

“Quando Gauss morreu, em 1855, pensava-se, em geral, que nunca mais existiria um universalista em Matemática, alguém que estivesse igualmente à vontade em todos os ramos, puros e aplicados. Se alguém a partir daí provou que essa ideia estava errada, esse alguém foi Poincaré, pois ele considerou toda a Matemática como seu domínio” ([BOYER, 1996](#)).

Segundo [Andrade \(2013\)](#), sua trajetória foi espetacular. “Hiperativo intelectual”, como professor ministrava um tópico diferente em cada ano letivo. A qualidade da apresentação e a capacidade investigativa eram tamanhas que, em muitos casos, as aulas logo apareciam publicadas como trabalho científico. Na matemática contemporânea é considerado *um desbravador, não um colonizador*.

O modelo proposto por Poincaré para a geometria hiperbólica foi concebido entre 1882 e 1887, e também foi desenvolvido no interior de um disco euclidiano. Na simplicidade do modelo está um exemplo de sua criatividade:

1. O termo indefinido *plano* significa o conjunto aritmético

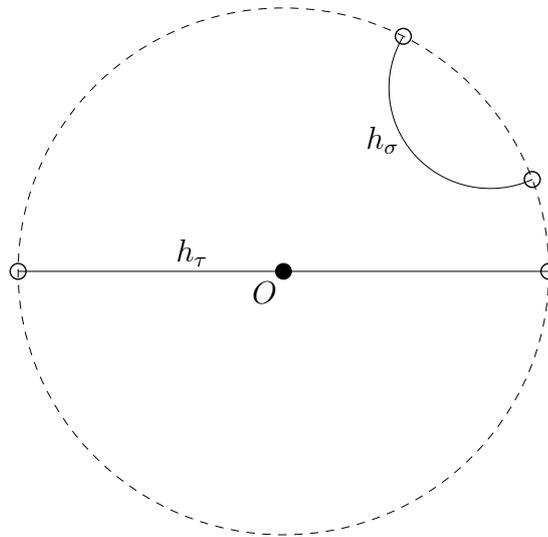
$$\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}; x^2 + y^2 < 1\}.$$

2. O termo indefinido *ponto* significa qualquer elemento de \mathbb{D}^2 .
3. O termo indefinido *reta* significa um conjunto obtido por interseção de \mathbb{D}^2 com uma reta euclidiana que incide na origem (centro do disco), ou com um círculo euclidiano de \mathbb{R}^2 ortogonal ao bordo de \mathbb{D}^2 .

Em outras palavras, podemos dizer que o *plano hiperbólico* pode ser representado pelo interior do disco de raio unitário, isto é, sem o seu bordo. O *ponto hiperbólico* pode ser representado por qualquer ponto interior do disco. E a *reta hiperbólica* pode ser representada por qualquer diâmetro deste disco sem os seus pontos extremos, também chamados de *pontos ideais* ou, no que difere do modelo de Beltrami-Klein, pelos arcos de círculos perpendiculares ao círculo² representante do plano hiperbólico ([Figura 25](#)). Esse modelo supriu a deficiência da congruência de ângulos do modelo de Beltrami, pois a medida do ângulo coincide com a medida usual do ângulo entre duas curvas que se intersectam, que, nesse caso, são círculos ([ANDRADE, 2013](#)).

² Um arco de círculo é *perpendicular* a outro círculo quando as retas tangentes do arco de círculo e do outro círculo, no ponto onde eles se intersectam, são perpendiculares.

Figura 25: Disco de Poincaré



Nesse modelo, verificam-se todos os postulados da geometria hiperbólica com o uso, apenas, da geometria euclidiana. Dessa forma qualquer inconsistência que possa vir a surgir será oriunda da geometria euclidiana, o que significa, conforme [Greenberg \(1993\)](#), que as duas geometrias são igualmente consistentes, isto é, não há resultados dentro da teoria que se contradigam. Uma decorrência direta dessa afirmação é que o quinto postulado não pode ser provado pela geometria neutra, já que, neste modelo a afirmação do quinto postulado não vale, isto é, dados uma reta e um ponto, fora desta reta é possível construirmos mais de uma paralela passando por tal ponto.

Comforme [Samuco et al. \(2005\)](#), dados dois pontos A e B no interior do disco de Poincaré, se P e Q são as extremidades da reta hiperbólica que contém A e B , defini-se *Razão Cruzada* (AB, PQ) por

$$(AB, PQ) = \frac{|\overline{AP}| \times |\overline{BQ}|}{|\overline{BP}| \times |\overline{AQ}|}$$

onde, por exemplo, $|\overline{AP}|$ é o comprimento euclidiano do segmento AP . A partir desta definição, o comprimento de um segmento hiperbólico de Poincaré AB é definido por

$$d(AB) = |\log(AB, PQ)|.$$

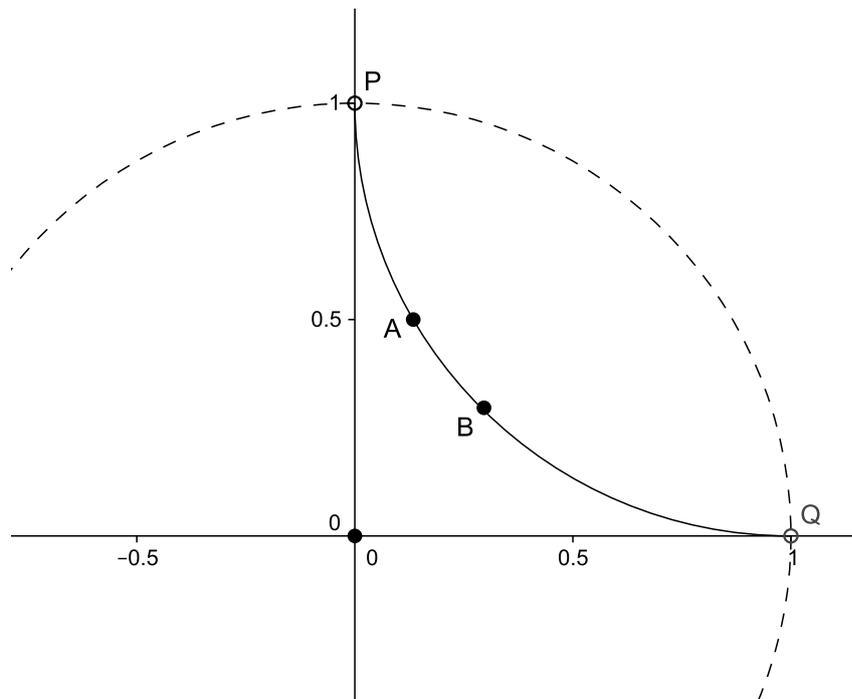
Observe, que este comprimento não depende da ordem em que escrevemos os pontos P e Q . De fato, se $(AB, PQ) = x$, então $(AB, QP) = 1/x$, e $|\log(1/x)| = |-\log(x)| = |\log(x)|$. Além disso, uma vez que $(AB, PQ) = (BA, QP)$, vemos que $d(A, B) = d(B, A)$.

Agora vejamos um exemplo de distância no disco de Poincaré.

Dados dois pontos hiperbólicos A e B , no disco de Poincaré, que estão na mesma reta hiperbólica, cujos pontos extremos são P e Q , veja a [Figura 26](#) e acompanhe o desenvolvimento.

As coordenadas cartesianas desses quatro pontos são dadas por:

Figura 26: Distância no disco de Poincaré



- $P = (0, 1)$
- $A = (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
- $B = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$
- $Q = (1, 0)$.

Agora tomemos os devidos comprimentos dos segmentos euclidianos:

- $|\overline{AP}| = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$
- $|\overline{BP}| = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$
- $|\overline{BQ}| = |\overline{BP}| = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, pois o ângulo é de $\frac{\pi}{4}$ (45°)
- $|\overline{AQ}| = 1$.

Pela definição de razão cruzada temos

$$(AB, PQ) = \frac{|\overline{AP}| \times |\overline{BQ}|}{|\overline{BP}| \times |\overline{AQ}|} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}} \times \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}} \times 1} = \sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

e, assim, a distância no disco de Poincaré é

$$d(AB) = |\log(AB, PQ)| = |\log(\sqrt{2 - \sqrt{3}})| \approx 0,572.$$

A seguir veremos um dos fatores que podem servir de motivação ao estudo das geometrias não-euclidianas, uma aplicação muito interessante dessas geometrias, que a primeira vista parecem ser totalmente distantes da realidade.

4.4 Por que estudar geometrias não-euclidianas? A teoria da relatividade

[Coutinho \(1989\)](#) nos traz o seguinte questionamento: seria o universo euclidiano? Se tivéssemos instrumentos adequados para medir os ângulos de um triângulo saberíamos, pois se a medida fosse inferior a π , saberíamos que o universo é hiperbólico, se maior que π , seria elíptico e, se fosse exatamente π , ele seria euclidiano. Porém nada indica que tal experimento seja possível. Assim, uma outra maneira de determinarmos as características geométricas do espaço em que estamos inseridos é determinar a sua *curvatura*. Sendo de curvatura negativa, o universo seria hiperbólico, sendo de curvatura positiva, seria elíptico, e sendo de curvatura nula, euclidiano.

Durante séculos os físicos falaram de uma geometria aplicada ao espaço somente. Isso só veio a ser mudado com os trabalhos que levaram ao surgimento da teoria da relatividade restrita em 1905 ([VEIGA, 2015](#)). Em 1905, o físico Hermann Minkowski mostrou, logo depois da teoria da relatividade restrita ter sido apresentada por Poincaré e Einstein, que era possível falar de uma “geometria do espaço-tempo” do mesmo modo como falamos da geometria do espaço somente. E Einstein, teve a perspicácia de procurar uma “nova” geometria a fim de expressar, de maneira quantitativa, suas novas concepções sobre gravitação. Conforme [Cherman \(2004\)](#) apud [Eduardo \(2013\)](#), curiosamente, Einstein precisava avançar em seu trabalho, mas seus conhecimentos matemáticos não permitiram, sendo comprovada sua frustração em uma carta a seu amigo Marcel Grossman (1878-1936), onde Einstein pede desesperado: “*Grossman, você tem que me ajudar, senão fico louco!*”.

A teoria da gravitação de Einstein prevendo a existência de curvatura no espaço-tempo, necessariamente, utiliza-se das geometrias não-euclidianas. Assim, a geometria do espaço é de grande importância para a cosmologia uma vez que a teoria relativística da gravitação se apoia inteiramente na ideia de que a geometria do espaço em qualquer local no universo está diretamente relacionada com a intensidade do campo gravitacional naquele

local. Quanto mais intenso é o campo gravitacional então mais forte será a curvatura correspondente.

Existe um número muito grande de espaços possíveis e cada um deles têm sua própria geometria. Todos eles são igualmente válidos e auto-consistentes. O espaço euclidiano, por exemplo, é *uniforme*, isto é, ele é homogêneo e isotrópico. Por *homogêneo* queremos dizer que suas propriedades são as mesmas em qualquer local definido sobre ele. Ser *isotrópico* significa que suas propriedades não dependem da direção em que são consideradas. Além disso o espaço euclidiano tem uma geometria de congruência. Isso quer dizer que nele todas as formas espaciais são invariantes sob translação e/ou rotação. De todos os possíveis espaços não-euclidianos existem somente dois que também são uniformes do mesmo modo que o espaço euclidiano: os espaços hiperbólico e elíptico.

Conforme [Veiga \(2015\)](#), poderíamos dizer, de uma maneira bastante livre e baseado exclusivamente nas questões de geometria discutidas anteriormente, que em um contexto cosmológico os três tipos de curvaturas podem nos dar:

- o universo de curvatura positiva, chamado *universo fechado*, corresponde a um universo que se expandirá até uma certa separação entre as galáxias e então contrairá de volta até um espaço zero;
- o universo de curvatura zero, chamado *universo espacialmente plano*, corresponde a um universo que se expande para sempre, diminuindo sua velocidade à medida que faz isso;
- o universo de curvatura negativa, chamado *universo aberto*, corresponde a um universo que se expandirá para sempre.

No entanto, de uma perspectiva cotidiana, conhecer a curvatura do espaço não nos afeta muito, pois a pequenas distâncias toda diferença nas medidas angulares é desprezível. Poincaré nos disse que “*nenhuma geometria é mais correta do que qualquer outra*”, apenas é mais conveniente. [Coutinho \(1989\)](#) ainda esclarece que para atividades humanas, como engenharia ou a carpintaria, a geometria adequada é a de Euclides, enquanto que para a navegação marítima as geometrias elípticas de Riemann são mais úteis. Assim, talvez, futuramente, em viagens espaciais intergaláticas, a geometria mais conveniente será uma não-euclidiana.

5 Considerações finais

Através desta pesquisa bibliográfica podemos observar que o caminho científico nem sempre é fácil. A matemática percorreu um longo percurso, chegando muitas vezes a descrença por parte de seus pensadores. A história do quinto postulado de Euclides nos mostrou que, mesmo com a falta de sucesso nas diversas tentativas de prova do postulado das paralelas, como no caso da tentativa de prova de Legendre, o trabalho não foi em vão. Avanços muito significativos para o intelecto humano foram alcançados em decorrência da dedicação e esforço daqueles cientistas. Os matemáticos abriram um novo mundo de possibilidades, que inclusive acabou por ter aplicações práticas em outras áreas diferentes da matemática. Isso tudo levanta-nos o questionamento: quantas outras áreas da matemática e de outras ciências poderão surgir ou serem melhor exploradas através de um olhar menos conservador?

Vejamos quantos matemáticos iluminaram os caminhos da história. Destacamos o brilhantismo no tratamento matemático de Gauss em seus trabalhos, a universalidade de Poincaré em seus estudos e notamos o quão aprofundado Riemann desenvolveu suas pesquisas.

Estudantes de matemática, licenciatura ou bacharelado, ou até mesmo estudantes do ensino médio ou leigos, entrando em contato com as geometrias não-euclidianas, além de melhorar sua compreensão sobre a própria geometria euclidiana, como mencionado anteriormente, podem desmistificar a ideia de que matemática pura é algo extremamente complexo e apenas acessível a matemáticos. Educadores de matemática podem, através das geometrias não-euclidianas, melhorar sua percepção da matemática e utilizá-las como adicional na educação matemática, levando seus alunos a reflexão sobre tudo que envolve a geometria de forma crítica, assim como os matemáticos o fizeram na descoberta de outras geometrias que não a euclidiana. Os próprios licenciandos em matemática devem ter em seus currículos acadêmicos o estudo das geometria não-euclidianas, como forma de despertar o pensamento crítico sobre a ciência, vendo que a quebra de paradigma dessa descoberta pode ser facilmente compreendida e que pode ser aplicada, talvez, a outras áreas. Pois a geometria, apesar de incorporar conceitos que envolvem operações numéricas, utiliza-se muito mais puramente da lógica matemática que é primordial para a construção e para a compreensão da matemática em geral.

A consistência lógica entre as geometrias euclidiana e hiperbólica nos leva a reflexão de que se uma geometria acabar por ser contraditória em algum ponto implicará na inconsistência da outra. E, ainda, nos leva a observar a complexidade que está envolvida na elaboração de um modelo da geometria hiperbólica dentro a geometria euclidiana e o

quão motivacional isso pode ser a um estudante, o levando a buscar maior aprofundamento no assunto. Outro grande estímulo positivo sobre o estudo das geometrias não-euclidianas é sua aplicabilidade em situações reais, como a navegação marítima e, ainda, a própria teoria da relatividade, que nos inspira a refletir sobre a complexidade da realidade física do universo. Isto é, de modo geral, o estudo sistemático da história da geometria com as geometrias não-euclidianas e ainda de suas aplicações, pode ser muito influente na aprendizagem do licenciando em matemática, contribuindo positivamente para seu progresso e, conseqüentemente, também para os seus futuros discentes.

Observamos que novas teorias ainda estão sendo descobertas na geometria, como é o caso da *geometria analítica hiperbólica*, um assunto relativamente recente, publicado por Ungar (2005), que dá um tratamento vetorial à geometria hiperbólica e que também se apropria de uma introdução histórica sobre o caminho da geometria no percurso do tempo. Portanto, o professor sendo comparado a um vendedor de ideias, não deve abrir mão de utilizar a problemática histórica em torno do quinto postulado como, também, dos elementos que originaram as geometrias não-euclidianas e suas possíveis aplicações, como forma de promover a motivação, a coerência e a emoção necessárias para a construção do conhecimento em sala de aula.

Referências

- ANDRADE, P. *Introdução à Geometria Hiperbólica: O modelo de Poincaré*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Primeira Edição). Citado 9 vezes nas páginas 15, 20, 23, 26, 38, 40, 43, 48 e 50.
- ÁVILA, G. Legendre e o postulado das paralelas. *Revista do Professor de Matemática*, v. 22, 1992. Citado na página 32.
- ÁVILA, G. Euclides, geometria e fundamentos. *Revista do Professor de Matemática*, v. 45, 2001. Citado na página 20.
- BICUDO, I. *Os Elementos de Euclides, tradução e introdução Irineu Bicudo*. [S.l.]: São Paulo: Editora Unesp, 2009. Citado na página 19.
- BONETE, I. *As Geometrias não-euclidianas em cursos de licenciatura: algumas experiências. 2000. 219f.* Tese (Doutorado) — Dissertação (Mestrado em Educação)—Universidade Estadual de Campinas/Universidade Estadual do Centro-Oeste, Campinas/Guarapuava, 2000.[Links], 2000. Citado na página 13.
- BONGIOVANNI, V.; JAHN, A. P. De euclides às geometrias não euclidianas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática. São Paulo*, v. 1, n. 22, 2010. Citado na página 27.
- BOYER, C. B. *História da Matemática. Tradução Elza Gomide*. São Paulo: Edgard Blücher, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 50.
- CALDATTO, M. *O processo coletivo de elaboração das Diretrizes Curriculares para a Educação Básica do Paraná e a inserção das Geometrias Não Euclidianas. 2011. 261 f.* Tese (Doutorado) — Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática)—Centro de Ciências Exatas. Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2011. Citado na página 13.
- CARMO, M. P. do. *Differential geometry of curves and surfaces*. [S.l.]: Prentice-hall Englewood Cliffs, 1976. Citado na página 50.
- COUTINHO, L. *Convite às geometrias não-euclidianas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1989. Citado 5 vezes nas páginas 39, 40, 48, 53 e 54.
- EDUARDO, E. C. *Geometrias não-euclidianas e a geometria da relatividade*. São Paulo, 2013. Citado na página 53.
- EVES, H. W. *Introdução à história da matemática*. [S.l.]: Unicamp, 1995. Citado 4 vezes nas páginas 37, 38, 39 e 48.
- GONÇALVES, C. H.; POSSANI, C. Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia antiga. *Revista Matemática Universitária*, v. 47, p. 16–24, 2010. Citado na página 16.

GREENBERG, M. J. *Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history*. New York, US: W. H. Freeman and Company, 1993. (Third Edition). Citado 14 vezes nas páginas 16, 20, 22, 28, 30, 31, 37, 38, 43, 45, 46, 48, 49 e 51.

KRAUSE, E. *Taxicab geometry: an adventure in non-euclidean geometry* (reprinted from 1975). NY: Dover, 1986. Citado na página 13.

LINTZ, R. G. *História da Matemática*. Blumenau, SC: Ed, da FURB, 1999. um. (Primeira Edição, um). Citado na página 16.

RAGGIO, A.; STIVAL, S. D. A evolução da noção de sistema axiomático [l'évolution de la notion de système axiomatique]. *Philosophos - Revista de Filosofia*, v. 8, n. 1, 2003. Citado na página 18.

REIS, J. D. *Geometria esférica por meio de materiais manipuláveis*. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2006. Citado na página 13.

RIBEIRO, R. D. G. L. *O ensino das geometrias não-euclidianas: um olhar sob a perspectiva da divulgação científica*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2012. Citado na página 13.

SAMUCO, J. M. E. et al. *A gênese da geometria hiperbólica*. Porto: Universidade do Porto, Faculdade de Ciências, Departamento de Matemática Pura, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 51.

SANTOS, T. d. *A Inclusão das Geometrias Não-Euclidianas no Currículo da Educação Básica*. 2009. 138 f. Tese (Doutorado) — Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática)–Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.[Links], 2009. Citado na página 13.

UNGAR, A. A. *Analytic Hyperbolic Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. [S.l.]: World Scientific, 2005. Citado na página 56.

VEIGA, C. H. *Cosmologia - Da origem ao fim do universo*. Rio de Janeiro: Observatório Nacional, 2015. Módulo 5, O novo conceito de Espaço e Tempo e a Teoria Relativística da Gravitação. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.