Universidade Federal do Rio Grande
Instituto de Matemática, Estatística e Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Ações Parciais de Grupos

Kelvin John Silva dos Anjos
<kelvinanjos@gmail.com>

Rio Grande, RS, Brasil.
Dezembro de 2017

Kelvin John Silva dos Anjos

Ações Parciais de Grupos

Trabalho submetido por Kelvin John Silva dos Anjos como requisito parcial para conclusão do curso de Licenciatura em Matemática junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande
Instituto de Matemática, Estatística e Física
Curso de Matemática Licenciatura

Orientadora: Dr.ª Daiane Silva de Freitas

Rio Grande, RS, Brasil.

Dezembro de 2017

Kelvin John Silva dos Anjos

Ações Parciais de Grupos

Trabalho submetido por Kelvin John Silva dos Anjos como requisito parcial para conclusão do curso de Licenciatura em Matemática junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Trabalho _____. Rio Grande, 13 de dezembro de 2017

Prof.ª Dr.ª Daiane Silva de Freitas
(Orientador - FURG)

Prof.ª Dr.ª Grasiela Martini
(Avaliador - FURG)

Prof.º Dr. Rafael Cavalheiro
(Avaliador - FURG)

Rio Grande, RS, Brasil.
Dezembro de 2017

Dedico este trabalho à minha família, minha irmã Girlene (eu e você pra sempre juntos), e em especial aos meus pais. À minha mãe Risolene que sempre me ajudou, que mesmo distante eu pude sentir sua mão me segurando. Ao meu pai Gilberto que a cada reencontro me abraçou calorosamente, me permitindo sentir o cheiro dos anos que não voltam mais.
Også, Halvor Kenneth Arnet Arntsen, jeg er takknemlig for min herlige kjæreste, min apekatt, uten deg jeg kunne ikke ha gått så langt jeg er nå. Verdens fineste sussebass.
Petra Tora Daugstad (smaskus), in memoriam, requiescat in pace!

Agradecimentos

Por esta jornada eu gostaria de agradecer primeiramente a Deus, sem a permissão dEle nada eu teria realizado, sem o cuidado dEle eu jamais teria chegado aonde cheguei, e sem a fé que tenho nEle eu não poderia prosseguir para a nova jornada que está por começar.

Agradeço imensamente aos meus pais, e minha irmã, por todo amor, suporte emocional e de todo tipo, pelo calor fundamental que foi enviado através de boas vibrações, desde o instante em que deixei o estado da Bahia para viver minha graduação no estado do Rio Grande do Sul (o que foi uma aventura). Quero agradecer aos meus familiares próximos e distantes, por terem desejado meu bem, por terem orado por mim; em especial à minha Tia Nilda. Amo cada um de vocês incondicionalmente.

Quero agradecer aos amigos que conquistei em Rio Grande, vocês facilitaram minha vida, deixaram meus dias mais doces e me deram ânimo nesta cidade onde os ventos fortes parecem tentar, em cada sopro, tirar nossas energias. Obrigado aos meus amigos das empresas terceirizadas à Universidade, agradeço por cada conversa, conselho, café, abraço, lanche, confraternização, surpresa de aniversário; Tia Marisa de Marco, Lisiane Briao, Jordana Garcia, Juliane e Joziane Azambuja, Janaina Pedroso, Luciana Domingues, Michelen Souza, Suzy Matarazzo, Adelia De Lima, são alguns dos nomes dos anjos que cuidaram de mim da forma que puderem e muitas vezes nem perceberam os simples gestos que me ajudaram. E não só por isso, quem conhece vocês sabe!

Preciso listar minha segunda família, as pessoas que me confortaram em cada crise existencial, em cada pânico diário, e drama que apenas família entende. Agradeço à Dom Bosco 600, melhor experiência que tive até hoje em uma república que parece mais com a nossa casa, todos vocês tem espaços especiais em minha memória e coração. Preciso começar com minha melhor amizade em Rio Grande, Ayana Celina Gonzati, foi você quem me fez sorrir demasiadamente, e riu junto comigo das bobagens que amenizavam as cargas dos estudos. Aí vem: Paulo Eduardo (Dudu) o quarto do badalo é nossa marca registrada, Rafael Udo, Bruno Paes, Cristina Tondolo, Vitória Muraro, Jenifer Hom, Gustavo Vizioli, Lucas, João, Alisson, Pablo, Vinícius, William, Claudinei, Laura, Larissa, Jecika, Heraldo, Luan, Sérgio. Agradeço com muito carinho aos donos da Dom Bosco 600, Da. Angela e Sr. Dagoberto. Agradeço aos Matheus (Lobo e Índio). Agradeço ao Renan por sempre se preocupar e cuidar de mim.

Não posso esquecer de agradecer ao Eduardo Melgar por tudo que fez por mim; tampouco posso deixa de agradecer ao Douglas Roos, prova viva de que tempo as vezes pode não significar muita coisa, isto é, "pouco tempo" é suficiente para criar fortes vínculos. Tenho que agradecer aos amigos da Casa do Estudante, sem esquecer do meu "xuxu" Letícia; agradeço também ao Róger. E pra fechar com chave de ouro, amizades recentes e muito importantes de

serem lembradas... Gustavos (Nobre e Filho) e Eliana um abraço de muito obrigado! Marília (Gabriela), Mineirinha (Camila), Yolanda (Eloyna) Baiano (Talisson) e Leãozíneo (Cássio), não tenho palavras para dizer o quão grato sou a vocês, o quanto sou feliz por "ter" vocês!

À minha orientadora, Prof.ª Dr.ª Daiane Silva de Freitas, quero que saiba antes de tudo que tenho muito orgulho de tê-la como orientadora, agradeço por escutar meus desabafos, pela paciência, por não me abandonar e por me estimular a buscar o conhecimento sem deixar ser vencido pelo cansaço. Todos seus ensinamentos desde o primeiro semestre foram os mais prazerosos e me espelho em quem és, exemplo que quero seguir. Obrigado por me ensinar e me deixar encantado com a Àlgebra, e por ter me aceitado como orientando. Quero agradecer ainda aos tantos professores do Instituto de Matemática, Estatística e Física (IMEF) da Universidade Federal do Rio Grande (FURG); aos professores doutores Rodrigo Barbosa Soares, Mario Rocha Retamoso, e Adriano De Cezaro, pela ajuda na minha caminhada acadêmica. Às professoras doutoras Celiane Costa Machado, Cinthya Schneider Meneghetti, Elaine Corrêa Pereira, e Suzi Samá Pinto, por terem me ensinado muitas coisas enquanto orientando e estudante das disciplinas mais legais impossíveis. Aos professores do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade Federal da Bahia (UFBA), por todo ensino, em especial ao Prof.º Dr. Augusto Armando de Castro Jr. por todo ensinamento em Topologia, e aos professores doutores Oscar Ocampo Uribe e Andreas Bernhard Michael Brunner por terem me ensinado mais da Teoria de Grupos e Teoria de Galois. Agradeço aos professores que aceitaram o convite para compor a banca avaliadora deste trabalho, Prof.ª Dr.ª Grasiela Martini e Prof.º Dr. Rafael Cavalheiro, por todas contribuições, conselhos, dicas, correções e ressalvas, vocês me ajudaram bastante!

Ao Dr. Fernando Magalhães da secretaria do IMEF, por sempre estar acessível e pronto para me ajudar, obrigado por ser tolerante e paciente comigo (risos). Aos meus colegas de curso durante os últimos anos, aos que estão comigo desde o ínicio dessa caminhada, e aos que em algum momento eu conheci e hoje fazem parte inseparável da minha vida.

Para sempre! Cibelle, Carol, Hellen; Amo vocês!

Aos meus amigos baianos, gaúchos, e de todas partes do mundo. Agredeço ainda a Peterson, Iran, Charles, Alessio, Ronnie, Per, Knut, Stein & Irene, Ove, Bente & Torgeir, Turid, Bjõrn, Michael, Christian & Olav, Athanasios, Maksim, Yaşar, Alicia, Ariel, Elsa, Calle, Hans, Flávio, Georgy, Marina, Heinrich, Lara, Fernanda, Alejandro, Constantinos, Tamiles, Aline.

São muitos nomes, muitas pessoas que eu gostaria de agradecer. Portanto, a todos que à distância ou presente me apoiaram, que fizeram e têm feito parte da minha vida, meus sinceros agradecimentos!

“Let’s look deep into our souls and heart, and let’s get rid of all the evil...
The Bible says, what make us impure comes from our hearts...
Corruption inhabts within each of us when we don’t make any effort to get ourselves clean.
Even if you don’t believe in what the Bible says,
you have to agree with me that when we share happiness we are actually multiplying it...
Out there are many humans still needing to realize that giving is gracious,
and must be a self-effacing act...
The very simple way to be happy is exhale good vibes providing happiness around...
Generosity is the path to reach the greatest, and we’ll also find it inside ourselves.
We have the power to choose what to emanate.”
Kelvin John Anjos, 2017.

Resumo

O conceito de ação parcial tem se propagado rapidamente em aspectos de sistemas dinâmicos, assim como algébricos. Começaremos este trabalho apresentando pré-requisitos da teoria de grupos, como ação de grupo; e a definição de *skew* anel de grupo que se relaciona diretamente com os produtos cruzados advindos das C^**-álgebras*. Assim, veremos a definição puramente algébrica de ação parcial, e apresentaremos a estrutura de *skew* anel de grupo parcial $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$. Com isso, definiremos a propriedade de (L, R)-associatividade, que auxilia na caracterização da associatividade de $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$, fundamental para o resultado final deste trabalho, quando mostramos que satisfazendo certas condições, é garantida a existência e unicidade de uma ação global envolvente a uma ação parcial dada.

Palavras-chave: Ação parcial de grupo. Skew anel de grupo parcial. Ação envolvente. Álgebra abstrata.

Abstract

Partial action concept has spread quickly among mathematicians, in dynamical systems' aspects, as well in algebraic point of views. We start out this dissertation presenting requirements needed in Group theory, like group action; also the definition of *skew* group ring that relates directly to those crossed products arised from $\mathcal{C}^*$*-algebras*. Therefore, we shall see the purely algebraic definition of partial action α, and present the structure of *skew* group ring $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$. Thereby, we define the property of (L, R)-associativity, it assists us to characterize the associativity of $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$, fundamental for the final result of this work, when we show that satisfying certain conditions, the existence and uniqueness of a global action enveloping a given partial action is guaranteed.

Key-words: Partial group action. Partial skew group ring. Enveloping action. Abstract algebra.

Lista de ilustrações

1.1 Ação de grupo sobre um hexágono. 19
1.2 Ação de grupo sobre um cubo regular. 20

2.1 Representação gráfica de uma ação parcial de grupo. 36
2.2 Representação da restrição da ação global β em Y numa ação α em X. 36

Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	conjunto dos números Naturais;
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números Inteiros, Anel dos Inteiros (soma e produto usuais);
$\mathbb{R}$	conjunto dos números Reais, ou Corpo Completo Ordenado dos Reais;
$\mathbb{C}$	conjunto dos números Complexos, ou Corpo dos Complexos;
$\mathbb{K}$	corpo;
R	anel comutativo;
$\mathcal{Z}(G)$	centro de G;
$SO(n)$	grupo especial ortogonal de dimensão n;
$Stab_G(x)$	estabilizador de x em G;
$Orb_G(x)$	órbita de x em G;
$[G : H]$	índice de H em G;
$\|G\|$	ordem de G, ou quantidade de elementos de G;
$\#(G)$	quantidade de elementos de G;
Id_G ou 1_G	identidade de G;
S_X	grupo de simetrias de X;
$H \leq G$	H é subgrupo/subálgebra de G;
$H \triangleleft G$	H é subgrupo normal, ou ideal, de G;
$R[G]$	anel de grupo, do grupo G;
$M_n(A)$	conjunto de matrizes quadradas de ordem n com entradas em A;

$Aut_B(A)$	conjunto de todos B-automorfismos de A
$A \to B$	definida de A em B;
$A \times B$	A cartesiano B, ou o produto direto de A por B;
$A/_B$	quociente de A por B;
$f\|_X$	restrição de f à X;
$Im(f)$	imagem de f;
$D(f)$	domínio de f;
$Ker(f)$	núcleo de f;
$\cong$	isomorfismo;
$\equiv$	equivalência;
$:=$	é definido por...;
x^{-1}	inverso de x;
$\varnothing$ ou $\{\ \}$	conjunto vazio;
$\forall$	para todo, para cada, qualquer que seja;
$\circ$	composição;
$x \leq y$	x é menor ou igual a y;
$x \geq y$	x é maior ou igual a y;
$\in$	pertence;
$\ni$	é/está pertencido;
$\notin$	não pertence;
$\not\ni$	não é/está pertencido;
$\cap$	interseção;
$\cup$	união;
$\subset$	está contido;
$\subseteq$	está imerso, inclusão, pertence propriamente;
$\supset$	contém;
$\exists$	existe;
$\exists!$	existe um único;
$\nexists$	não existe;
$\Leftarrow$	resulta da implicação de...;
$\Rightarrow$	se...então, implica;
$\Leftrightarrow$	se, e somente se.

Sumário

Introdução **15**

1 Pré-requisitos **18**

1.1 Ação de Grupo 18

1.2 Produto semidireto de grupos 24

1.3 *Skew* anel de grupo 30

2 Ações Parciais **34**

3 Um duplo centralizador: A Álgebra de Multiplicadores **41**

(L, R)-associatividade 46

4 A associatividade do *skew* anel de grupo parcial **52**

5 Ações Envolventes **58**

Teorema de existência e unicidade de uma ação envolvente para ações parciais 64

6 Considerações finais **74**

Bibliografia **75**

Apêndices **78**

A Introdução à Teoria de Módulos **78**

A.1 Módulos 78

A.2 Submódulos gerados e sequências exatas 81

A.3 Módulos Livres 84

B Álgebras semiprimas **85**

B.1 $\mathbb{K}-$álgebras 85

Introdução

Este trabalho trata de resultados recentes sobre ações parciais; termo cunhado para referir de modo geral, e dar início à teoria que tem ponto de partida em (Exel 1994), quando fora introduzido um teorema de estrutura no estudo de C^**-álgebras* sob ação do grupo especial ortogonal de rotações próprias no plano complexo; isomorfismos entre dois ideais de uma determinada álgebra foram desde então chamados de automorfismos parciais.

As C^**-álgebras* foram primeiramente consideradas nos estudos de John von Neumann e Schrödinger, com contribuições à mecânica quântica na década de 20; *são álgebras associativas* sobre um espaço normado completo pela métrica induzida pela norma $||\cdot||$, com uma involução $x \mapsto x^*$ satisfazendo $||x^*x|| = ||x||^2$ para todo elemento x da álgebra. Estas álgebras, apesar de serem elementos importantes na Teoria de Operadores e na Análise Funcional como abstrações do contexto genérico dos operadores auto-adjuntos, não são o tema principal deste trabalho, mas são as raízes das ações parciais. Ainda em (Exel 1994), qualquer C^**-álgebra* que sofre ação definida do grupo $SO(2)$, surge como resultado de uma construção que generaliza *produtos cruzados* específicos.

Em perspectiva, outras tantas estruturas algébricas se relacionam sequencialmente como um produto cruzado, que é comumente definido como álgebra de von Neumann; mas a grosso modo espera-se a compatibilidade com a estrutura de anel de grupo, de um grupo construído via *produto semidireto*.

No decorrer deste trabalho nos concentraremos aos aspectos dos produtos cruzados presentes nas teorias de anéis e módulos, baseado no "pivô"da atenção dada pelos algebristas, a publicação (Dokuchaev e Exel 2004); onde são definidas ação parcial de grupo sobre uma álgebra, e as *skew* álgebras de grupo. Com essas definições, Exel e Dokuchaev discutem uma

grande e importante diferença, ao comparar os contextos puramente algébrico e da Teoria de Operadores, que é a questão da associatividade.

Mesmo depois de uma década desde a publicação (Dokuchaev e Exel 2004) que norteia os capítulos 3-5 deste trabalho, estão sendo desenvolvidas pesquisas sobre ações parciais, o que nos permite afirmar o início de uma teoria. "A história da matemática é composta por momentos nos quais um aparente fim de linha simplesmente abre novas portas e desencadeia novos progressos" (Batista 2017, p. 35).

No sentido algébrico a primeira discrepância ocorreu quando fora verificado a existência de possíveis exemplos da recente estrutura de *skew* álgebra de grupo parcial que não satisfaziam a associatividade. Estão sendo estudadas ações parciais e suas implicações na Teoria de Galois como em (Freitas e Paques 2011) entre outros (5; 18), assim como para álgebras de Hopf (Freitas 2010), e ações parciais de grupóides e outras estruturas algébricas (Flores 2011). Existem inclusive definições análogas às da Teoria de Representação de Grupos (4).

O objetivo deste trabalho é percorrer os primeiros resultados algébricos sobre ações parciais. Preliminarmente no Capítulo 1 apresentamos resultados principais sobre Teoria de Grupos, no que diz respeito à definição de ação de grupo. Apresentamos desde os axiomas que caracterizam uma ação, até as definições de sequências de grupos e consequentemente *produto direto* e *produto semidireto* de grupos. Exibimos condições para que um grupo possa ser construído como produto direto de alguns dos seus subgrupos, em seguida apresentamos a definição de *skew* anel de grupo (Passman 1990; Passman 1986) e correlacionamos com a estrutura de produto semidireto .

No Capítulo 2 definimos uma ação parcial de grupo em uma construção ilustrada a partir de restrições em cima de um conjunto e funções parciais; similarmente sobre uma $\mathbb{K}$-álgebra e isomorfismos parciais (Ferrero 2009). Apresentamos exemplos simples de ações parciais de grupos, sem distanciar do objetivo principal do trabalho, ainda que existam ações parciais sobre objetos além dos conjuntos e $\mathbb{K}$-álgebras. Junto com a definição de ação parcial de grupo que remete à definição de ação de grupo, determinamos o que é chamado de *skew* anel de grupo parcial (Ferrero e Lazzarin 2008).

Um breve respaldo sobre a *álgebra de multiplicadores* é exposto no Capítulo 3, cuja primeira parte do título adotamos um codinome para esta álgebra; uma vez que na Teoria de Módulos recaímos à característica intrísseca das álgebras de multiplicadores, que é a propriedade do duplo centralizador (14).

No Capítulo 4 vamos finalmente discutir a questão da associatividade do *skew* anel de grupo parcial, que nem sempre acontece naturalmente; mostraremos uma primeira caracterização de *skew* anel de grupo parcial associativo com a ajuda dos resultados do capítulo

precedente.

O Capítulo 5 tem o objetivo específico de garantir, com o último e importantíssimo resultado, resposta para a pergunta: *"Uma certa ação parcial sempre possuirá uma ação global?"* Visto que dada uma ação de grupo global, mostramos sem perda de generalidade, que é sempre possível construir uma ação parcial. E se a resposta para a pergunta supracitada for positiva, então chamamos esta ação global de envolvente.

Consideramos que o leitor esteja familiarizado com as teorias de grupos, anéis e corpos a nível introdutório; por último, como apêndices, apresentamos alguns resultados e definições pertinentes sobre $\mathbb{K}$-álgebras (álgebras sobre um corpo) e um pouco da Teoria de Módulos. Caso o leitor não esteja familiarizado, o mesmo pode consultar: (Jacobson 1985; Jacobson 2009; Lam 2001).

CAPÍTULO 1

Pré-requisitos

1.1 Ação de Grupo

Definição 1.1.1. *Dizemos que um grupo $(G, \cdot)$ age (à esquerda) num conjunto X se existe uma função $\psi : G \times X \to X$ tal que, ao escrever $g(x)$ para $\psi(g, x)$, para qualquer $g \in G$ temos:*

(i) $(g_1 \cdot g_2)(x) = g_1(g_2(x)), \ \forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X$;

(ii) $1_G(x) = x$, *sendo* 1_G *a identidade de* G, $\forall x \in X$.

Dizemos alternativamente que, G ***age sobre*** *X* ***via*** *ψ, ou ainda que, ψ* ***é uma ação de*** *G* ***sobre*** *X.*

De forma análoga definimos a ação à direita de X pela operação de $X \times G$ em X, escrevendo $(x)g$ para a aplicação da operação sobre o par (x, g).

De modo geral, vamos nos referir às ações pela esquerda, e as demonstrações seguem de forma análoga para as ações à direita.

Comumente, dado um grupo G, chamamos um conjunto X de um G**-conjunto** quando G age sobre X e chamamos nesse caso, a aplicação ψ é dita uma G**-ação**.

Observação 1.1.2. *Se g é um elemento de um grupo G que atua sobre um conjunto X, então a função $g : X \to X$, que leva x em $g(x)$, é uma bijeção.*

Isso define ainda um homomorfismo $\chi : G \to S_X$ de G no grupo de simetrias de X.

De fato, supondo um elemento arbitrário g de um grupo G que, por sua vez, atua sobre um conjunto X, então requeremos a bijetividade de $g : X \to X$.

A aplicação é claramente injetiva, uma vez que:

$$g(x) = g(y) \Rightarrow g^{-1}g(x) = g^{-1}g(y) \Rightarrow 1_G(x) = 1_G(y) \Rightarrow x = y;$$

assim como a aplicação é também sobrejetiva, pois dado $z \in X$ temos que:

$$g^{-1}(g(z)) = (g^{-1}g)(z) = 1_G(z) = z.$$

Logo, g é uma aplicação associada ao elemento que o nomeia, e sobretudo uma aplicação bijetiva, desse modo temos que $g \in S_X$.

Agora a função $\chi : G \ni g \mapsto (g : X \to X) \in S_X$ é um homomorfismo de grupos, pois $\forall x \in X$, e $\forall g, h \in G$, temos que $\chi(gh)(x) = (gh)(x) = g(h(x)) = \chi(g)(\chi(h)(x))$, logo $\chi(gh) = \chi(g) \circ \chi(h)$.

Exemplo 1.1.3. *A Figura 1.1 a seguir, serve para ilustrar a ação de um grupo sobre um hexágono. Em particular, definimos o conjunto X como sendo o conjunto dos 6 vértices de um hexágono; seja $G := \mathbb{Z}_2 = \{e, h\}$ um grupo de ordem 2, cujo elemento e fixa os pontos (vértices) do hexágono, enquanto o elemento h reflete o hexágono através da reta suporte do segmento que liga os pontos (vértices) 3 e 6.*

Figura 1.1: Ação de grupo sobre um hexágono.

Seja $\psi : G \times X \to X$ uma ação de um grupo G num conjunto X. Dizemos que G age fielmente sobre X se o homomorfismo $\chi : G \to S_X$ for injetivo ($Ker(\chi) = \{1_G\}$).

Ou ainda, dizemos que G **age fielmente** sobre X se o único elemento de G, que fixa todo elemento de X, é a identidade $1_G \in G$. Nesse caso, identificamos G como $Im(\chi)$ e vemos G como um subgrupo de S_X.

A ação de grupo do Exemplo 1.1.3 é fiel (G age fielmente sobre X), e identificamos G em tal exemplo com um subgrupo $H = \{(1), (15) \circ (24)\}$ de D_6 (grupo de simetrias do hexágono) via homomorfismo de grupos. Onde (15) e (24) são ciclos que representam como os vértices permutam quando o conjunto sofre a ação.

Exemplo 1.1.4. *Uma representação gráfica que facilita a visualização da ação do grupo $G := \mathbb{Z}_3 = \{e, g, g^2\}$ sobre um conjunto X com 8 elementos, um cubo geometricamente, é dada pela Figura 1.2. Vale ressaltar que a ação é via rotação, onde $g(X)$ rotaciona o cubo $2\pi/3$ através da reta suporte do segmento que une os vértices opostos 2 e 8.*

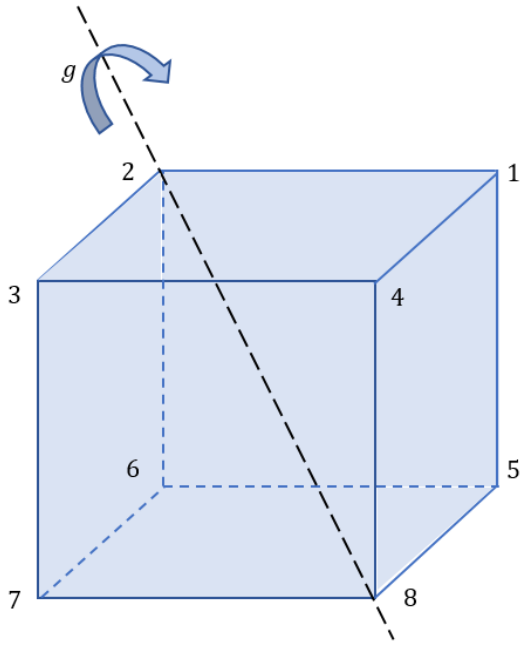

Figura 1.2: Ação de grupo sobre um cubo regular.

Desse modo $H = \{(1), (163) \circ (457), (136) \circ (475)\}$ é o subgrupo de S_4 (grupo de rotações regulares do cubo), que identifica o grupo G do Exemplo 1.1.4; com essa identificação temos que G age fielmente.

Similar ao que fora dito sobre o Exemplo 1.1.3, $(163) \circ (457)$ e $(136) \circ (475)$ são representações de como os elementos do cubo permutam. Mais especificamente escrevemos (163) por exemplo, pois com a ação $g(X)$ o vértice 1 passa a ocupar o lugar do vértice 6, enquanto 6 ocupa o lugar de 3, este último que ocupa o lugar de 1; o mesmo entende-se pelos demais ciclos.

Definição 1.1.5. *Se um grupo G age sobre um conjunto X, então*

$$Stab_G(x) = \{g \in G \ ; \ g(x) = x\};$$

*é chamado o **estabilizador** de x, isto é, o conjunto de elementos de G que fixam x em X.*

O estabilizador $Stab_G(x)$ é um subgrupo de G, também chamado de **subgrupo de isotropia** de x em G. De fato, $Stab_G(x) \neq \varnothing$ pois $1_G \in Stab_G(x)$ e:

(i) Se $g, h \in Stab_G(x)$, então $(gh)(x) = g(h(x)) = g(x) = x$, logo $gh \in Stab_G(x)$;

(ii) Se $g \in Stab_G(x)$, então $g^{-1}(x) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}g(x) = x$, com isso $g^{-1} \in Stab_G(x)$.

Definição 1.1.6. *Seja G um grupo agindo sobre X. O subconjunto de X*

$$Orb_G(x) = \{y \in X \ ; \ y = g(x), \ \textit{para algum} \ g \in G\} = \{g(x) \ ; \ g \in G\};$$

*é chamado de **órbita** de x em G.*

Proposição 1.1.7. *Seja G um grupo agindo sobre X.*

*A relação $\sim$ em X, de forma $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G; y = g(x)$, é uma relação de equivalência. **Desse modo, as órbitas distintas de X sob a ação de G originam naturalmente uma partição de X.***

Demonstração. Precisamos verificar as três propriedades que definem uma relação de equivalência, reflexividade, simetria e transitividade. Dado $x \in X$ então $x \sim x$ já que $x = 1_G(x)$. Além disso, se $x \sim y$ para algum $g \in G$ tal que $y = g(x)$, então $g^{-1}(y) = x$ desse modo $y \sim x$. Por último, temos que se $x \sim y$ e $y \sim z$ então $\exists g, h \in G$ que garantem $y = g(x)$ e $z = h(y)$, das últimas duas igualdades, temos $z = h(g(x))$ o que implica em $z = hg(x)$, logo $x \sim z$ já que $hg \in G$. Portanto $\sim$ é uma relação de equivalência sobre o conjunto X. Considerando as classes para cada elemento $y \in X$ temos $\{x \in X; \ x \sim y\} = \{x \in X; \ y = g(x)\} = Orb_G(y)$.

Claramente, um conjunto é particionado via uma união disjunta de classes de equivalência sobre uma relação de equivalência, então se X é um G-conjunto, temos que X é a união das órbitas disjuntas. □

Em outras palavras, $Orb_G(x)$ é a classe de equivalência do elemento x, com respeito à relação de equivalência determinada entre x e um elemento y se existir $g \in G$ tal que $y = g(x)$.

No caso da existência de uma única órbita no G-conjunto X, dizemos que a **ação é G-transitiva**, ou similarmente dizemos que o grupo age por transitividade.

Observação 1.1.8. *Sejam G um grupo e $H \leq G$ um subgrupo, então G age sobre $X = {}^{G}/_{H}$ via $g(xH) = g(x)H$ onde $g, x \in G$.*

Vejamos que no caso da compatibilidade de classes laterais $xH = yH$, então teremos a seguinte implicação $(gx)^{-1}(gy) = x^{-1}g^{-1}gy = x^{-1}y$, isto é, como H é subgrupo, $(gx)^{-1}(gy) \in H$, desse modo $g(x)H = g(y)H$; assim garantimos a boa definição da ação do grupo. É evidente que $1_G(x)H = xH$ sendo 1_G o elemento identidade do grupo G. Mas ainda $(gh)(x)H = g(h(x))H$, e então concluímos que está definida uma G-ação, chamada de G-ação usual, sobre um subgrupo quociente.

Em particular, ao denotarmos por $\overline{1}$ a classe lateral trivial de H, temos sempre uma ação G-transitiva quando o G-conjunto em questão for suficientemente $X := \overline{1}G$.

Lema 1.1.9. *Seja G um grupo que age sobre um conjunto X, para $x \in X$ arbitrário, tomando $H = Stab_G(x)$ a aplicação a seguir é uma bijeção $\forall g \in G$:*

$$\begin{aligned} \varphi : {}^{G}/_{H} &\to Orb_G(x) \\ Hg &\mapsto g^{-1}(x) \ . \end{aligned}$$

Demonstração. A boa definição da aplicação proposta pelo lema é garantida pela observação anterior, já que $Hg = Hk \Rightarrow k = hg$ para algum $h \in H = Stab_G(x)$, teremos então que:

$$k^{-1}(x) = (hg)^{-1}(x) = g^{-1}h^{-1}(x) = g^{-1}(h^{-1}(x)) = g^{-1}(x).$$

A sobrejetividade da aplicação φ é garantida pela definição de órbita do elemento x. E a injetividade é advinda de que $\varphi(Hg) = \varphi(Hk)$ implica em $g^{-1}(x) = k^{-1}(x)$, que nos dá portanto $kg^{-1}(x) = x$, desse modo $kg^{-1} \in H = Stab_G(x)$. Logo, φ é uma bijeção. □

Vale ressaltar que φ, como definido pelo recém provado lema, não é um homomorfismo, já que ${}^{G}/_{H}$ é apenas um conjunto de classes laterias pelo fato de $H := Stab_G(x)$ não ser necessariamente um subgrupo normal de G; além do fato das órbitas comumente não terem a estrutura de grupo.

Teorema 1.1.10. *Se G age sobre X, então para cada $x \in X$ temos*

$$[G : Stab_G(x)] = |Orb_G(x)|.$$

Ainda, por Lagrange, se o grupo G for finito, então:

$$|G| = |Stab_G(x)||Orb_G(x)| \ .$$

Demonstração. A prova desse teorema é resultado imediato do Lema 1.1.9 anterior. □

Vale ressaltar que dado um grupo $(G, \cdot)$, podemos definir ações de G sobre si mesmo. As mais comuns são:

(i) G age sobre si mesmo por multiplicação:

$$\begin{aligned} \psi_1 : G \times G &\to G \\ (g, h) &\mapsto g(h) = gh \ ; \end{aligned}$$

(ii) G age sobre si mesmo por conjugação:

$$\begin{aligned} \psi_2 : G \times G &\to G \\ (g, h) &\mapsto g(h) = ghg^{-1} \ ; \end{aligned}$$

De fato, dado um $x \in G$ arbitrário, $gh(x) = g(h(x))$ e claramente $1_G(x) = (x)$. No caso da operação definida por ψ_2, temos:

$$g(h(x)) = g(hxh^{-1}) = ghxh^{-1}g^{-1} = ghx(gh)^{-1} = gh(x);$$

E mais uma vez $1_G(x) = 1_G x 1_G^{-1} = x$.

Quando G é um grupo abeliano, chamamos estas duas ações definidas nos itens acima de **ações triviais**.

Proposição 1.1.11. *Suponhamos que G age sobre si mesmo por conjugação, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $x \in \mathcal{Z}(G) = \{x \in G;\ gx = xg, \forall g \in G\}$ *(o **centro** de G);*

(ii) $Stab_G(x) = G$;

(iii) $Orb_G(x) = \{x\}$;

(iv) $|Orb_G(x)| = 1$.

Demonstração. **(i)⇒(ii)** Supondo $x \in \mathcal{Z}(G) = \{x \in G;\ gx = xg, \forall g \in G\}$. Queremos explicitar o estabilizador de x, que por definição é $Stab_G(x) = \{g \in G; g(x) = x\}$; como a ação é por conjugação, $g(x) = x \Leftrightarrow gxg^{-1} = x \Leftrightarrow gx = xg$, que está garantido por hipótese para todo $g \in G$; assim $Stab_G(x) = G$.

(ii)⇒(iii)⇒(iv) Temos que $Orb_G(x)$ é o conjunto formado pelos elementos $y \in X$ tais que, para algum $g \in G,\ y = g(x)$; isto é, $y = gxg^{-1}$. Como por hipótese $\forall g \in G$, temos $g(x) = y = gxg^{-1} = x$, de imediato $Orb_G(x) = \{x\}$, assim $|Orb_G(x)| = 1$.

Ainda pelo Teorema 1.1.10, temos:

$$[G : Stab_G(x)] = |Orb_G(x)| \Leftrightarrow [G : G] = 1 = |Orb_G(x)|.$$

(iv)⇒(i) Supondo que $|Orb_G(x)| = 1$, desse modo, existe um único $y \in X := G$ tal que $y = g(x)$ para dado $g \in G$. Por conseguinte $y = gxg^{-1}$ e $yg = gx$; nos resta que $x = y$. Disso x é um elemento central de G, ou seja, $x \in \mathcal{Z}(G)$. □

Definição 1.1.12. *Seja G um grupo. O subgrupo $N_G(H) = \{g \in G; gHg^{-1} = H\}$ de G é chamado de **normalizador** de H em G.*

Definição 1.1.13. *Seja G um grupo. O subgrupo $C_G(H) = \{g \in G; gh = hg, \forall h \in H\}$ de G é chamado de **centralizador** de H em G.*

1.2 Produto semidireto de grupos

Definição 1.2.1. *Uma **sequência de grupos** é uma coleção finita ou infinita de grupos e homomorfismos $\{\varphi_n : G_n \to G_{n+1}\}$. Tal sequência é **exata** se, e somente se $Ker(\varphi_{n+1}) = \varphi(G_n)$.*
Notação*:*

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_{i-1}} G_i \xrightarrow{\varphi_i} G_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} G_{i+2} \xrightarrow{\varphi_{i+2}} \cdots$$

Se um dos símbolos $1 \to G$ ou $G \to 1$ acontece (onde 1 representa o grupo trivial formado por um único elemento), o homomorfismo é o único possível.

Um homomorfismo $A \to B$ é injetor se, e somente se, $1 \to A \to B$ é exata; e sobrejetor se, e somente se, $A \to B \to 1$ é exata; e é um isomorfismo se, e somente se, $1 \to A \to B \to 1$ é exata.

*Uma **extensão** de um grupo H por um grupo F é uma sequência exata (também chamada de **sequência exata curta**) $1 \to H \xrightarrow{\psi} G \xrightarrow{\varphi} F \to 1$.*

Proposição 1.2.2. *Se $1 \to H \xrightarrow{\psi} G \xrightarrow{\varphi} F \to 1$ é uma extensão de H por F, então $F \cong \frac{G}{\psi(H)}$, e ψ é um isomorfismo de H em $\psi(H)$.*

Demonstração. Pelo uso combinado da Definição A.2.9 e do Teorema de Isomorfismo de Noether (NOETHER I.) , temos que $Im(\varphi) \cong G/Ker(\varphi)$, sabendo que $Im(\varphi) = F$ já que a aplicação é sobrejetora, e $Ker(\varphi) = \psi(H)$ porque a sequência é exata. □

Definição 1.2.3. *O **Produto direto de grupos** $H \times F$ é uma extensão de H por F. De forma precisa, se $\psi : H \to H \times F$ é definido por $\psi(h) = (h, e)$, onde e é o elemento neutro de F. E $\varphi : H \times F \to F$ é definido por $\varphi(h, f) = f$, então claramente ψ e ϕ são homomorfismos e;*

$$1 \to H \xrightarrow{\psi} H \times F \xrightarrow{\varphi} F \to 1 \text{ é uma extensão de } H \text{ por } F \ .$$

Nem sempre um grupo G é tal que podemos construí-lo exatamente como produto direto de alguns dos seus subgrupos. Queremos condições para que um grupo seja produto direto de dois de seus subgrupos. Vejamos:

Proposição 1.2.4. *Sejam H, K subgrupos de um grupo G. O número de formas distintas de escrever cada elemento do conjunto HK na forma hk com $h \in H$ e $k \in K$, é $|H \cap K|$.*

Assim, se $|H \cap K| = 1$, então cada elemento de HK pode ser escrito de forma única como um produto hk.

Demonstração. Lembremos que para um dado grupo G e dois de seus subgrupos H, K, temos $|H||K| = |HK||H \cap K|$. Definindo uma relação de equivalência $\sim$ sobre o conjunto $X := \{(h, k) \in H \times K\}$, isto é, o conjunto dos pares (h, k) onde $h \in H$ e $k \in K$; por $(h, k) \sim (h', k')$ se $hk = h'k'$. De fato $\forall (h, k), (h', k'), (x, y) \in X$:

(i) $(h, k) \sim (h, k)$; $hk = hk$;

(ii) $(h, k) \sim (h', k') \Rightarrow (h', k') \sim (h, k)$; $hk = h'k' \Leftrightarrow h'k' = hk$;

(iii) $(h, k) \sim (h', k')$ e $(h', k') \sim (x, y) \Rightarrow (h, k) \sim (x, y)$; $hk = h'k', h'k' = xy \Leftrightarrow hk = xy$.

Temos que o número de elementos numa classe de equivalência de X é o número de formas de escrevermos hk como um elemento de HK, e o número de classes de equivalência de X é exatamente $|HK|$.

Notemos que:

$$\begin{aligned} hk = h'k' &\Leftrightarrow (h')^{-1}hk = (h')^{-1}h'k' \Leftrightarrow (h')^{-1}hk = k' \\ &\Leftrightarrow (h')^{-1}hk(k^{-1}) = k'(k^{-1}) \Leftrightarrow (h')^{-1}h = k'(k^{-1}) \ \in H \cap K \\ &\Leftrightarrow h'(H \cap K) = h(H \cap K); \end{aligned}$$

Portanto, existem $|H \cap K|$ escolhas para h' dado h; conhecido $k \in K$, temos $k' = (h')^{-1}hk$, como $|H \cap K| = 1$, a forma como escrevemos cada elemento de HK é única. □

Teorema 1.2.5. *Sejam G um grupo, H e K subgrupos de G. Se H, K são ambos normais em G e $H \cap K = \{1_G\}$, então $HK \cong H \times K$.*

Demonstração. Sabemos que HK é a priori subgrupo de G, e $H \lhd G$ implica em $k^{-1}hk \in G$ para qualquer $h \in H$, e em particular para todo $k \in K$.

Similarmente, como $K \lhd G$, temos $h^{-1}k^{-1}hk \in H$, e também $h^{-1}k^{-1}hk \in K$, como $H \cap K = \{1_G\}$, $h^{-1}k^{-1}hk = 1_G$, ou seja, $h^{-1}k^{-1}hk = 1 \Leftrightarrow (kh)^{-1}hk = 1 \Leftrightarrow hk = kh$, para quaisquer $h \in H$ e $k \in K$.

De acordo com a Proposição 1.2.4, cada elemento de HK pode ser escrito de forma única, como hk para dados $h \in H, k \in K$.

Então a aplicação $\varphi : HK \ni hk \mapsto (h,k) \in H \times K$ está bem definida e é bijetora. Resta-nos verificar que a aplicação é um homomorfismo, vejamos que:

$$\begin{aligned}\varphi(hkh'k') &= \varphi(hh'kk') = (hh', kk') \\ &= (h,k)(h',k') = \varphi(hk)\varphi(h'k').\end{aligned}$$

□

Definição 1.2.6. *Se $H, K \lhd G$, $H \cap K = \{1_G\}$, então $HK = \{hk;\ h \in H, k \in K\}$ é o* ***Produto direto interno*** *de H e K. Enquanto $H \times K$ é dito* ***Produto direto externo****.*

Existem situações em que $G = HK$ para subgrupos H, K, mas G não é isomorfo a $H \times K$ necessariamente. Entre as mais importantes destas situações está o produto semidireto, que generaliza a noção de produto direto de dois grupos, mas não requer que ambos H e K sejam normais a um terceiro grupo.

Teorema 1.2.7. *Sejam H, K grupos e $\varphi : K \to Aut(H)$ um homomorfismo.*

Denotamos por $|\cdot|$ a ação, à esquerda, de K sobre H determinada por φ.

Seja G o conjunto $\{(h,k);\ h \in H, k \in K\}$, e definamos a multiplicação em G pela regra

$$(h_1,k_1)(h_2,k_2) = (h_1(k_1 \cdot h_2), k_1k_2);$$

Então:

1. *G é um grupo de ordem $|H||K|$;*
2. *$\tilde{H} := \{(h,1_K);\ h \in H\}$, $\tilde{K} := \{(1_H,k);\ k \in K\}$ são subgrupos de G isomorfos a H e K respectivamente, com $\tilde{H} \lhd G$, e $\tilde{H} \cap \tilde{K} = \{1_G\}$. Assim $G = \tilde{H}\tilde{K}$;*
3. *$\forall h \in H$, $k \in K$, fazendo $\tilde{h} = (h,1_K)$, $\tilde{k} = (1_H,k)$, temos $\tilde{k}\tilde{h}\tilde{k}^{-1} = (k \cdot h, 1_K)$.*

Demonstração. Primeiro precisamos verificar que G tem estrutura de grupo, o que decorre naturalmente pelo fato de $|\cdot|$ ser uma ação do grupo K sobre H, assim a operação como

definida é claramente fechada em G. Mais ainda $(h_i, k_i) \in G, \forall i \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned}
[(h_1, k_1)(h_2, k_2)](h_3, k_3) &= (h_1(k_1 \cdot h_2), k_1k_2)(h_3, k_3) \\
&= (h_1(k_1 \cdot h_2)(k_1k_2 \cdot h_3), k_1k_2k_3) \\
&(h_1(k_1 \cdot h_2)(k_1 \cdot (k_2 \cdot h_3)), k_1k_2k_3) \\
&\overset{*}{=} (h_1(k_1 \cdot (h_2(k_2 \cdot h_3))), k_1(k_2k_3)) \\
&= (h_1, k_1)(h_2(k_2 \cdot h_3)), k_2k_3) \\
&= (h_1, k_1)[(h_2, k_2)(h_3, k_3)].
\end{aligned}$$

Além disso, $(1_H, 1_K)$ é o elemento identidade de G, e $(h, k)^{-1} = (k^{-1} \cdot h^{-1}, k^{-1})$. Vejamos:

$$\begin{aligned}
(1_H, 1_K)(h, k) &= (1_H(1_K \cdot h), 1_Kk) = (1_Hh, k) = (h, k); \\
(h, k)(1_H, 1_K) &= (h(k \cdot 1_H)), k1_K) \overset{*}{=} (h, k); \\
(h, k)(k^{-1} \cdot h^{-1}, k^{-1}) &= (h(k \cdot (k^{-1} \cdot h^{-1})), kk^{-1}) \\
&= (h((kk^{-1}) \cdot h^{-1}), 1_K) \\
&= (h((1_K) \cdot h^{-1}), 1_K) = (hh^{-1}, 1_K) = (1_H, 1_K); \\
(k^{-1} \cdot h^{-1}, k^{-1})(h, k) &= (k^{-1} \cdot h^{-1}(k^{-1} \cdot h), k^{-1}k) \\
&= (k^{-1} \cdot 1_H, 1_K) \overset{*}{=} (1_H, 1_K)
\end{aligned}$$

Vale ressaltar que as passagens $*$ anteriores (entre outras) são garantidas pelo fato da ação ser determinada por φ que é definida de K no grupo de automorfismos de H. Não nos remanesce dúvida que $|G| = |H||K|$. Agora consideremos os conjuntos:

$$\tilde{H} := \{(h, 1_K);\ h \in H\} \text{ e } \tilde{K} := \{(1_H, k);\ k \in K\}.$$

As aplicações $H \ni h \mapsto (h, 1_K) \in \tilde{H}$ e $K \ni k \mapsto (1_H, k) \in \tilde{K}$, são claramente bijetivas. Resta-nos mostrar que são homomorfismos, o que é subentendido por meio da restrição da operação global.

$$\begin{aligned}
(h, 1_K)(h', 1_K) &= (h(1_K \cdot h'), 1_K1_K) = (hh', 1_K); \\
(1_H, k)(1_H, k') &= (1_H(k \cdot 1_H), kk') = (1_H, kk').
\end{aligned}$$

Entendemos $\tilde{H}$ e $\tilde{K}$ como subgrupos de G, e os isomorfismos acima nos permitem pensar H e K como subgrupos de G. É óbvio que $H \cap K$ origina naturalmente $\tilde{H} \cap \tilde{K} = \{1_G\}$,

portanto $H \cap K \equiv \{(1_H, 1_K)\}$ e $\tilde{H}\tilde{K} = G$ uma vez que:

$$(h, 1_K)(1_H, k) = (h(1_K \cdot 1_H), 1_K k) = (h1_H, k) = (h, k).$$

Para os demais itens do teorema, ainda precisamos provar que $\tilde{H}$ é normal em G, e que implicitamente a ação entre os grupos é via conjugação em G pelo homomorfismo original φ; ambas afirmações são resultados de:

$$\begin{aligned}(1_H, k)(h, 1_K)(1_H, k)^{-1} &= (1_H, k)(h, 1_K)(k^{-1} \cdot 1_H, k^{-1}) \\ &= (1_H, k)(h, 1_K)(1_H, k^{-1}) \\ &= (k \cdot h, k)(1_H, k^{-1}) \\ &= (k \cdot h, 1_K),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\tilde{k}\tilde{h}\tilde{k}^{-1} &= (1_H, k)(h, 1_K)(1_H, k)^{-1} \\ &= (\varphi_k(h), 1_K) \\ &= (k \cdot h, 1_K) \in \tilde{H}\end{aligned}$$

Isto demonstra que $\tilde{K} \leq N_G(\tilde{H})$, e como $\tilde{H} \leq N_G(\tilde{H})$ e $G = \tilde{H}\tilde{K}$; então temos que $N_G(\tilde{H}) = G$, isto é, $\tilde{H} \lhd G$ □

Definição 1.2.8. *Chamamos o grupo G como construído no Teorema 1.2.7 de **Produto Semi-direto** de H e K com relação a φ, escrito como $H \rtimes_\varphi K$, ou simplesmente por $H \rtimes K$ quando o homomorfismo φ for claramente subentendido.*

Um grupo G é um produto semidireto se existe $H \lhd G$, $K \leq G$ tal que $G = HK$ e $H \cap K = \{1\}$.

Proposição 1.2.9. *Sejam H e K grupos e $\varphi : K \to Aut(H)$ um homomorfismo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) A aplicação (de conjuntos) identidade entre $H \rtimes K$ e $H \times K$ é um homomorfismo de grupos (e portanto um isomorfismo);

(ii) $\varphi : K \to Aut(H)$ é o homomorfismo trivial;

(iii) $K \lhd H \rtimes K$.

Demonstração. **(i)⇒(ii)** Pela definição da operação no grupo $H \rtimes K$ temos $\forall h, h' \in H, \forall k, k' \in K$:

$$(h,k)(h',k') = (h\varphi_k(h'), kk') = (h(k \cdot h'), kk').$$

Pela hipótese **(i)**, $(h,k)(h',k') = (hh', kk')$, logo $(h(k \cdot h'), kk') = (hh', kk')$.

Portanto $k \cdot h' = h'$, isto é, k fixa H, e pela arbitrariedade de k, temos que φ é o homomorfismo trivial, K atua trivialmente sobre H.

(ii)⇒(iii) Se φ é trivial, então a ação de K sobre H é trivial como concluído anteriormente, portanto, os elementos de H comutam com os elementos de K. Em particular $H \leq N_G(K)$, e como $K \leq N_G(K)$ e $G = HK$; então $G \leq N_G(K) \leq G$, isto é, $K \lhd G$.

(iii)⇒(i) Se $K \lhd H \rtimes K$, então para todo $h \in H$ e para todo $k \in K$, o comutador $[h,k] = h^{-1}k^{-1}hk$ pertence à $H \cap K = \{1_G\}$. Assim $hk = kh$ e a ação de K sobre H é trivial mais uma vez. Logo, a multiplicação no produto semidireto é a mesma que no produto direto, $\forall h, h' \in H, \forall k, k' \in K$:

$$(h,k)(h',k') = (hh', kk').$$

Pela arbitrariedade dos elementos dos grupos, temos que $Id : H \rtimes K \to H \times K$ é como consequência um homomorfismo de grupos, e portanto um isomorfismo. □

Teorema 1.2.10. *Suponha que G é um grupo com subgrupos H e K tais que*

(i) $H \lhd G$, *e;*

(ii) $H \cap K = \{1_G\}$.

Seja ainda o homomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi : K &\to Aut(H) \\ k \mapsto \varphi_k : H &\to H;\ \ \varphi_k(h) = khk^{-1}. \end{aligned}$$

Então $HK \cong H \rtimes_\varphi K$. Em particular, se $G = HK$ com H e K satisfazendo (i) e (ii) deste teorema, então G é o produto semidireto de H e K.

Demonstração. Notemos que, como $H \lhd G$, HK é um subgrupo de G. Pela Proposição 1.2.4 todo elemento de HK pode ser escrito de forma única como hk, para algum $h \in H$ e algum $k \in K$.

Portanto, a aplicação $\eta : HK \ni hk \mapsto (h,k) \in H \rtimes K$ é uma bijeção de HK sobre $H \rtimes K$. Resta-nos mostrar que é homomorfismo, $\forall h, h' \in H, \forall k, k' \in K$:

$$\begin{aligned}\eta(hkh'k') &= \eta(h(kh'k^{-1})kk') \\ &= \eta(h\varphi_k(h')kk') \\ &= (h\varphi_k(h'), kk') \\ &= (h,k)(h',k') \\ &= \eta(hk)\eta(h'k').\end{aligned}$$

Logo, $\eta : HK \to H \rtimes K$ é um isomorfismo. □

Definição 1.2.11. *Seja H um subgrupo de um grupo G. Um subgrupo K de G é chamado um* ***complemento*** *para H em G se $G = HK$ e $H \cap K = \{1_G\}$.*

1.3 *Skew* anel de grupo

Definição 1.3.1. *Sejam R um anel, G um grupo finito e $\varphi : G \to Aut(R)$ um homomorfismo de grupos. Chamamos de* ***skew anel de grupo*** *de G sobre R induzido por φ como sendo:*

$$R \rtimes_\varphi G = \left\{ \sum_{g\in G} a_g g \quad ; a_g \in R \right\};$$

onde a adição é trivial termo a termo, e a multiplicação é estendida por linearidade:

$$a_g g \cdot b_h h = a_g \varphi(g)(b_h) gh \ .$$

Sem perda de generalidade omitimos os somatórios ao definir a multiplicação acima, uma vez que dados $x, y \in R \rtimes_\varphi G$ de modo que $x := \sum_{g\in G} a_g g$ e $y := \sum_{h\in G} b_h h$, operamos:

$$x \cdot y = \left(\sum_{g\in G} a_g g \right) \left(\sum_{h\in G} b_h h \right) = \sum_{\ell \in G} \left(\sum_{gh=\ell} a_g \varphi_g(b_h) \right) \ell \ .$$

Proposição 1.3.2. *Na generalidade da definição, qualquer* skew *anel de grupo $R \rtimes_\varphi G$ é um anel. Em particular, quando R for anel com unidade, teremos um anel $R \rtimes_\varphi G$ com unidade.*

Demonstração. Como definido, o *skew* anel de grupo possui de fato uma estrutura de anel, basta verificarmos os axiomas que estruturam a segunda operação (multiplicação) em um anel, já que por construção $R \rtimes_\varphi G$ tem estrutura de R-módulo livre cuja base é G.

Supondo $g, h, \ell \in G$ arbitrários, para os quais $a_g, b_h, c_\ell \in R$, temos:

$$\begin{aligned}(a_g g b_h h)c_\ell \ell = (a_g \varphi_g(b_h) g h)c_\ell \ell &= a_g \varphi_g(b_h)\varphi_{gh}(c_\ell) g h \ell \\ &\overset{(*)}{=} a_g \varphi_g(b_h \varphi_h(c_\ell)) g(h\ell) = a_g g(b_h \varphi_h(c_\ell) h \ell) \\ &= a_g g(b_h h c_\ell \ell) \ .\end{aligned}$$

A passagem $(*)$ acima decorre do fato de φ ser um homomorfismo de grupos. Portanto a multiplicação é associativa. Semelhante à presunção da identidade da álgebra de grupo como na Definição B.1.10, temos que $1_R 1_G$ é a identidade multiplicativa do anel.

$$a_g g 1_R 1_G = a_g \varphi_g(1_R)(g 1_G) = a_g g = 1_R \varphi_{1_G}(a_g)(1_G g) = 1_R 1_G a_g g \ .$$

Os axiomas de distributividade são a seguir verificados, sejam $g, h, \ell \in G$ e $a_g, b_h, c_\ell \in R$, temos:

$$\begin{aligned}a_g g b_h h + a_g g c_\ell \ell &= a_g \varphi_g(b_h) g h + a_g \varphi_g(c_\ell) g \ell \\ &= a_g(\varphi_g(b_h) g h + \varphi_g(c_\ell) g \ell) = a_g(1_R g b_h h + 1_R g c_\ell \ell) \\ &= a_g(g(b_h h + c_\ell \ell)) = a_g g(b_h h + c_\ell \ell) \\ b_h h a_g g + c_\ell \ell a_g g &= b_h \varphi_h(a_g) h g + c_\ell \varphi_\ell(a_g) \ell g \\ &= (b_h \varphi_h(a_g) h + c_\ell \varphi_\ell(a_g) \ell) g = (b_h h a_g 1_G + c_\ell \ell a_g 1_G) g \\ &= ((b_h h + c_\ell \ell) a_g) g = (b_h h + c_\ell \ell) a_g g \ .\end{aligned}$$

Em vista do que verificamos, o *skew* anel de grupo $R \rtimes_\varphi G$ tem estrutura de anel. □

Exemplo 1.3.3. *Um exemplo mais simples de* skew *anel de grupo é quando definimos para um anel R arbitrário, e um grupo finito G, um homomorfismo de grupos trivial $\varphi : G \ni g \mapsto Id_R \in Aut(R)$ para todo elemento $g \in G$. Desse modo, $R \rtimes_\varphi G$ é exatamente o anel de grupo $R[G]$ usual, já que em termos de qualquer elemento g do grupo G, e $\forall r \in R$, temos $\varphi_g(r) = r$.*

Proposição 1.3.4. *O skew anel de grupo $R[N] \rtimes_\varphi H$ é um anel de grupo $R[G]$ originado a partir do grupo G construído via produto semidireto $G = N \rtimes H$, considere a componente $a_g g$ como sendo o par (a_g, g). Notemos que $\varphi(g)(b_h) = \varphi_g(b_h) = g(b_h)$. Assim $(a_g g)(b_h h) \equiv (a_g, g)(b_h, h) = (a_g(g \cdot b_h), gh) \equiv a_g(g(b_h))gh$.*

Demonstração. Sejam R um anel e G um grupo finito. Sejam ainda H, N dois subgrupos de G, onde $N \lhd G$ e existem condições para que $G = N \rtimes H$, isto é, o homomorfismo de subgrupos entre H e o grupo de automorfismos de N é dado via conjugação. Desse modo o

homomorfismo φ a seguir está bem definido $\forall g \in N, h \in H$ e $a_g \in R$:

$$\begin{aligned} \varphi : H &\to Aut(R[N]) \\ h \mapsto \varphi(h) := \quad & \varphi_h : R[N] \to R[N] \\ & a_g g \mapsto a_g hgh^{-1} \ . \end{aligned}$$

Queremos exibir um homomorfismo de grupo que seja equivalente à multiplicação usual. Requeremos portanto $\forall g \in N, \forall h \in H$ e $\forall a_g \in R$, levando em conta o isomorfismo trivial entre $R[N] \rtimes_\varphi H$ e $R[N \rtimes H]$:

$$\psi : R[N] \rtimes_\varphi H \ni (a_g g)h \mapsto a_g gh \in R[N \rtimes H] \ .$$

A aplicação ψ é um homomorfismo, em particular um isomorfismo de anéis.

Tomando $x, y \in R[N] \rtimes_\varphi H$ de modo $x := (a_g g)h$ e $y := (b_{g'} g')h'$. Verificamos $\forall g, g' \in N; \forall h, h' \in H$ e $\forall a_g \in R$:

$$\begin{aligned} \psi(x) + \psi(y) &= \psi((a_g g)h) + \psi((b_{g'} g')h') \\ &= (a_g)gh + (b_{g'})g'h' \\ &= \psi((a_g g)h + (b_{g'} g')h') \\ &= \psi(x + y) \end{aligned}$$

O critério da multiplicação é verificado ao equipararmos $\psi(x)\psi(y) = \psi(xy)$:

$$\begin{aligned} \psi(x)\psi(y) &= \psi((a_g g)h)\psi((b_{g'} g')h') \\ &= (a_g)gh(b_{g'})g'h' \\ &= a_g \varphi_{gh}(b_{g'})ghg'h' \\ &= a_g ghb_{g'} h^{-1} g^{-1} ghg'h' \\ &= a_g b_{g'}(ghg')h^{-1}hh' = a_g b_{g'} ghg'h' \\ \psi(xy) &= \psi((a_g g)h(b_{g'} g')h') \\ &= \psi(a_g g\varphi_h(b_{g'} g')hh') \\ &\overset{*}{=} \psi(a_g ghb_{g'} g'h^{-1}hh') \\ &= \psi((a_g b_{g'} gg')hh^{-1}hh') \\ &= a_g b_{g'} gg'hh' \overset{*}{=} a_g b_{g'} ghg'h' \end{aligned}$$

As duas passagens $*$ acima são válidas por N ser normal à G, e $H \leq G$, e o homo-

morfismo φ que induz a ação está definido de H no grupo de automorfismos de $R[N]$. Por fim, $\psi((1_R 1_G)1_G) = 1_R 1_G 1_G = 1_R 1_G$. □

CAPÍTULO 2

Ações Parciais

Definição 2.1. *Sejam G um grupo com identidade 1_G e um conjunto X. Definimos como* ***ação parcial*** *α,* ***de*** *G* ***sobre*** *X, o par de coleções $\alpha = (\{D_g\}, \{\alpha_g\})$, de subconjuntos $\{D_g\}_{g\in G} \subseteq X$ e aplicações bijetoras $\{\alpha_g\}_{g\in G}$; $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$, tais que:*

(i) $D_{1_G} = X$;

(ii) $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{(gh)^{-1}}$;

(iii) $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$; $\quad \forall x \in \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}})$.

Notemos que **(iii)** é critério de uma ação de grupo comum, mas que fica definida para elementos restritos em X. Assumindo a composição de ações pela esquerda da igualdade, notamos que como $\alpha_h : D_{h^{-1}} \to D_h$ e $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$, necessariamente $x \in \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{(gh)^{-1}}$, permitindo-nos entender α_{gh} como extensão de $\alpha_g \circ \alpha_h$.

Como cada α_g é bijeção, o fato de que $\alpha_g \circ \alpha_{g^{-1}} = \alpha_{gg^{-1}} = \alpha_{1_G} = Id_{D_{g^{-1}}}$ implica que $\alpha_{g^{-1}} = \alpha_g^{-1}$. O que será reforçado mais adiante.

Agora olhando para a condição **(ii)**

$$\begin{aligned} \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) &\subseteq D_{(gh)^{-1}} \\ &\subseteq D_{h^{-1}g^{-1}}; \end{aligned}$$

como α_h^{-1} é definido de D_h em $D_{h^{-1}}$, temos $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{h^{-1}}$;

$$\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}$$

se fizermos $h = h^{-1}$ e $g = gh$:

$$\alpha_{h^{-1}}^{-1}(D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}) \subseteq D_h \cap D_{g^{-1}};$$

aplicando α_h^{-1}, e usando (iii):

$$\begin{aligned} \alpha_h^{-1}(\alpha_{h^{-1}}^{-1}(D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}})) &\subseteq \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \\ D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}} &\subseteq \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}); \end{aligned}$$

assim obtemos a igualdade:

$$\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) = D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}.$$

Com essas observações feitas e como $\alpha_{1_G}^{-1}(D_{1_G} \cap D_{1_G{}^{-1}}) = \alpha_{1_G}^{-1}(X) = X$, para validar as manipulações anteriores verificamos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \alpha_{1_G} \circ \alpha_{1_G}(x) &= \alpha_{1_G}(x) \\ \alpha_{1_G}^{-1} \circ \alpha_{1_G} \circ \alpha_{1_G}(x) &= \alpha_{1_G}^{-1} \circ \alpha_{1_G}(x) \\ \alpha_{1_G}(x) &= Id_X(x) = x; \end{aligned}$$

e agora, com $g = h^{-1}$ no item **(iii)** da Definição 2.1; $\forall x \in \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_h) = D_{h^{-1}}$:

$$\alpha_h^{-1} \circ \alpha_h(x) = \alpha_{h^{-1}h}(x) = Id_{D_{h^{-1}}}(x) = x;$$

agora, tomando $g = h$ e $h = h^{-1}$ em **(iii)**, também da Definição 2.1, teremos que $\forall x \in \alpha_{h^{-1}}^{-1}(D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}}) = D_h$:

$$\alpha_h \circ \alpha_h^{-1}(x) = \alpha_{hh^{-1}}(x) = Id_{D_h(x)} = x.$$

Conseguimos perceber portanto que $\alpha_h^{-1} = \alpha_{h^{-1}}$

E por fim exibir condições **(i')** - **(iii')** equivalentes às condições **(i)** - **(iii)**, respectivamente, na Definição 2.1:

(i') $\alpha_{1_G}(x) = x \quad \forall x \in X$, *ou seja:* α_{1_G} *é a aplicação identidade* Id_X*;*

(ii') $\alpha_g(D_h \cap D_{g^{-1}}) = D_{gh} \cap D_g$;

(iii') $\alpha_{gh}(x) = \alpha_g(\alpha_h(x)) \qquad \forall x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$.

Para facilitar a compreensão da definição e das condições de uma ação parcial, podemos representar graficamente na Figura 2.1 a seguir:

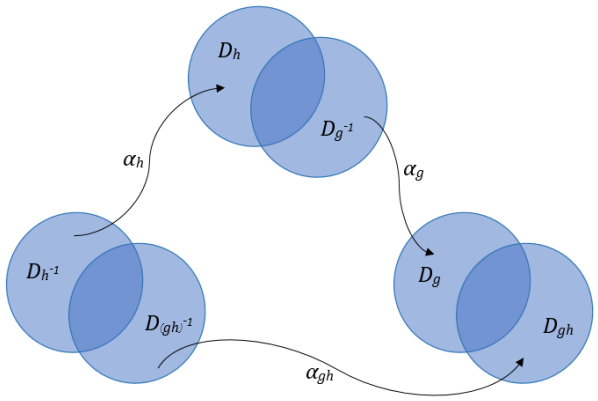

Figura 2.1: Representação gráfica de uma ação parcial de grupo.

Esta definição surge a partir da restrição de uma ação global β do grupo G sobre um conjunto Y tal que $X \subset Y$. E as condições são advindas da manutenção dos axiomas que definem uma ação de grupo ainda que seja feita a restrição sobre o conjunto Y. Sendo β a ação de um grupo G sobre um conjunto Y, que indexa para cada elemento g de G bijeções em Y dentro de algum subconjunto $X \subseteq Y$, por definição, $\beta_g(X) \subset Y$. Ainda que a interseção entre X e $\beta_g(X)$ seja vazia. Se quisermos definir uma ação α que esteja restrita a X, esta fará sentido se para algum subconjunto não vazio $D_g \subset X$ indexado por elementos de G, $D_g = X \cap \beta_g(X)$, por questão das bijeções. Dessa forma, $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ é dada da seguinte maneira: $\alpha_g = \beta_g|_{D_{g^{-1}}}$, podendo ser visto mais facilmente na Figura 2.2:

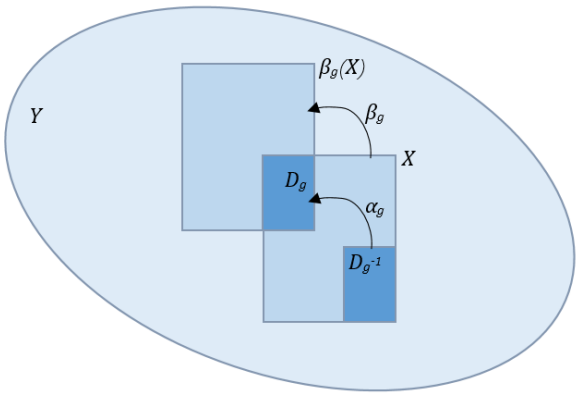

Figura 2.2: Representação da restrição da ação global β em Y numa ação α em X.

Até agora definimos e analisamos uma única ação parcial do grupo G sobre o conjunto X. Seria interessante poder comparar duas ações parciais e avaliar a semelhança entre elas. Para isso definimos os morfismos entre ações parciais.

Definição 2.2. *Seja G um grupo e sejam X e X' dois conjuntos tais quais G age sobre cada um destes, via α_g e α'_g respectivamente em seus subconjuntos $D_{g^{-1}}$ e $D'_{g^{-1}}$ para g em G. Definimos como* ***morfismo entre ações parciais****, de α em α', a aplicação $\varphi : X \to X'$, tal que: $\forall g \in G$ e $\forall x \in D_{g^{-1}}$*

(i) $\varphi(D_g) \subseteq D'_g$;

(ii) $\alpha'_g(\varphi(x)) = \varphi(\alpha(x))$;

isto é, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} D_{g^{-1}} & \xrightarrow{\alpha_g} & D_g \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ D'_{g^{-1}} & \xrightarrow{\alpha'_g} & D'_g \end{array}$$

Observação 2.3. *Vale de forma análoga a Definição 2.1 de ação parcial de grupo no caso do conjunto X ser uma $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{A}$ associativa. Adicionamos às condições, que para todo g em G, cada D_g antes subconjunto de X, seja agora ideal de $\mathcal{A}$, assim como as bijeções α_g sejam isomorfimos de álgebras. Notemos que neste contexto, se na Definição 2.2 o morfismo φ será entendido como o morfismo de álgebras $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, este último será um monomorfismo/epimorfismo/isomorfismo de álgebras se $\varphi|_{D_g}$ for respectivamente um monomorfismo/epimorfismo/isomorfismo.*

Exemplo 2.4. *Seja o grupo de Klein, $G = \{1_G, g, h, gh\}$ tal que $g^2 = h^2 = (gh)^2 = 1_G$, e*

$$M_2(\mathbb{R}) \supset X = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\} ;$$

consideramos a ação parcial α de G sobre X da seguinte maneira:

$$D_{1_G} = X$$

$$D_g = D_{g^{-1}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\} ;$$

$$D_h = D_{h^{-1}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} ;$$

$$D_{gh} = D_{(gh)^{-1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\} \ .$$

De modo semelhante:

$$\alpha_{1_G} = Id_X$$

$$\alpha_g \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in D_g \ ;$$

$$\alpha_h \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} b & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in D_h \ ;$$

$$\alpha_{gh} \left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in D_{gh} \ .$$

Notemos que as interseções entre os subconjuntos satisfazem as bijeções definidas, assim como as composições, a ação de G sobre X via $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ é facilmente verificada.

Exemplo 2.5. *Seja $X = \mathbb{R}^3$, e seja G o grupo cíclico de ordem 4 gerado por g. Podemos notar que G age parcialmente em $\mathbb{R}^3$ via $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$, sendo:*

$D_e = \mathbb{R}^3$*;*

$D_g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 0\}$*;*

$D_{g^2} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y = 0\}$*, e;*

$D_{g^3} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0\}$*. Com as seguintes bijeções:*

$\alpha_g : D_{g^3} \ni (0, a, b) \mapsto (a, b, 0) \in D_g$*;*

$\alpha_{g^2} : D_{g^2} \ni (a, 0, b) \mapsto (b, 0, a) \in D_{g^2}$*, e;*

$\alpha_{g^3} : D_g \ni (a, b, 0) \mapsto (0, a, b) \in D_{g^3}$*.*

Definição 2.6. *Seja um grupo G que age parcialmente via α sobre uma álgebra $\mathcal{A}$, definimos como* **skew *anel de grupo parcial*** *correspondente a "α", o conjunto de todas as somas da forma apresentada:*

$$\mathcal{A} \rtimes_\alpha G = \left\{ \sum_{g\in G} a_g \delta_g : a_g \in D_g \right\};$$

onde δ_g de cada termo da soma finita é símbolo de indexação que indica a posição do elemento correspondente na soma.

A operação de adição do skew *anel de grupo parcial é a adição usual, enquanto o produto para quaisquer g e h em G é dado da seguinte forma:* $(a_g\delta_g)(b_h\delta_h) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}$.

Interessa-nos estudar a associatividade da estrutura de *skew* anel de grupo dentro do contexto de ações parciais. Para tanto precisamos estudar alguns resultados da álgebra de multiplicadores, estes resultados far-se-ão necessários para condicionar o caso do *skew* anel de grupo parcial ser associativo. Mas antes de apresentá-los, provamos que $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ é um $\mathbb{K}$-módulo, sendo $\mathbb{K}$ anel comutativo com unidade.

Proposição 2.7. *O* skew *anel de grupo parcial $\mathcal{R}_\rtimes = \mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ é um $\mathbb{K}$-módulo com aplicação definida por $k\left(\sum_{g\in G} a_g\delta_g\right) = \sum_{g\in G}(ka_g)\delta_g$, para todos $k \in \mathbb{K}$ e $\sum_{g\in G} a_g\delta_g \in \mathcal{R}_\rtimes$.*

Demonstração. Sendo $x = \sum_{g\in G} a_g\delta_g$ e $y = \sum_{h\in G} b_h\delta_h$ ambos em $\mathcal{R}_\rtimes$, e $t,\ \ell \in \mathbb{K}$.

Precisamos verificar os axiomas que definem um módulo.

$(*)$ Notemos que em x, $a_g \in D_{g\in G}$; assim como b_h de y está em algum ideal que é $\mathbb{K}$-álgebra e portanto $\mathbb{K}$-módulo.

$$
\begin{aligned}
(t+\ell)x &= (t+\ell)\sum_{g\in G} a_g\delta_g = \sum_{g\in G}(t+\ell)a_g\delta_g \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{g\in G}(ta_g + \ell a_g)\delta_g \\
&= \sum_{g\in G}(ta_g)\delta_g + \sum_{g\in G}(\ell a_g)\delta_g \\
&= t\sum_{g\in G} a_g\delta_g + \ell\sum_{g\in G} a_g\delta_g \\
&= tx + \ell x \\
t(x+y) &= t\left(\sum_{g\in G} a_g\delta_g + \sum_{h\in G} b_h\delta_h\right) \\
&\overset{(*)}{=} t\sum_{g,h\in G}(a_g\delta_g + b_h\delta_h) \\
&= \sum_{g,h\in G}(t(a_g\delta_g + b_h\delta_h)) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{g,h\in G}(ta_g\delta_g + tb_h\delta_h) \\
&= \sum_{g\in G} ta_g\delta_g + \sum_{h\in G} tb_h\delta_h \\
&= t\sum_{g\in G} a_g\delta_g + t\sum_{h\in G} b_h\delta_h = tx + ty \\
(t\ell)x &= (t\ell)\sum_{g\in G} a_g\delta_g = \sum_{g\in G}((t\ell)a_g)\delta_g
\end{aligned}
$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{g\in G}(t(\ell a_g))\delta_g = t\sum_{g\in G}\ell(a_g)\delta_g$$
$$= t(\ell\sum_{g\in G}a_g\delta_g) = t(\ell x)$$

□

Observação 2.8. *É importante percebermos que por garantia da linearidade nas operações da Proposição 2.7, e $\mathbb{K}$ ser anel comutativo com unidade, teremos para dois elementos x e y do* skew *anel de grupo parcial $R_\rtimes$, a possibilidade de cada um estar em uma subálgebra indexada por elemento distinto do grupo G. E como dito, por linearidade, aqui desconsideramos a soma finita na definição destes elementos; garantimos por conseguinte a bilateralidade de $R_\rtimes$ como $\mathbb{K}$-módulo, então, para $x = a_g\delta_g \in R_\rtimes$, $y = b_h\delta_h \in R_\rtimes$, e $\ell \in \mathbb{K}$ temos:*

$$\begin{aligned}
\ell(xy) &= \ell((a_g\delta_g)(b_h\delta_h)) = \ell(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h\delta_{gh}))\\
&= (\ell\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h))\delta_{gh} = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(\ell a_g)b_h)\delta_{gh}\\
&= ((\ell a_g)\delta_g)(b_h\delta_h) = (\ell(a_g\delta_g))(b_h\delta_h)\\
&= (\ell x)y\\
\ell(xy) &= \ell((a_g\delta_g)(b_h\delta_h)) = \ell(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h\delta_{gh}))\\
&= (\ell\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h))\delta_{gh} = (\alpha_g(\ell(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)))\delta_{gh}\\
&= (\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)(\ell b_h)))\delta_{gh} = (a_g\delta_g)((\ell b_h)\delta_h)\\
&= x(\ell y)
\end{aligned}$$

Com isso $\ell(xy) = (\ell x)y = x(\ell y)$.

CAPÍTULO 3

Um duplo centralizador: A Álgebra de Multiplicadores

Neste capítulo discorreremos sobre uma álgebra em específico, a *álgebra de multiplicadores*, uma $\mathbb{K}$-álgebra particular que está diretamente ligada ao caso em que o *skew* anel de grupo parcial é associativo. Damos destaque aos resultados que direcionam a (L, R)-associatividade para ideais de uma $\mathbb{K}$-álgebra.

Definição 3.1. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo, e seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa. Definimos como* **multiplicador** *de $\mathcal{I} \lhd \mathcal{A}$ o par (L, R) de $\mathbb{K}$-transformações lineares de $\mathcal{I}$, que satisfaz:*

(i) $L(ab) = L(a)b$;

(ii) $R(ab) = aR(b)$;

(iii) $R(a)b = aL(b)$.

No caso de $\mathbb{K}$ possuir unidade, temos: $L(1_{\mathcal{A}}) = R(1_{\mathcal{A}})$.

Exemplo 3.2. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo, e seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa com unidade. Um* **multiplicador** *de $\mathcal{I} \lhd \mathcal{A}$ é o par (L_x, R_x) de $\mathbb{K}$-transformações lineares de $\mathcal{I}$, definido para algum $x \in \mathcal{A}$ via:*

$$L_x : \mathcal{I} \ni a \mapsto xa \in \mathcal{I}, \qquad e\ ;$$
$$R_x : \mathcal{I} \ni a \mapsto ax \in \mathcal{I}.$$

Quando, para alguns resultados, for indiferente o elemento x na álgebra $\mathcal{A}$ que relaciona o multiplicador, podemos omitir a notação de x no par, tratando o multiplicador simplismente por (L, R).

De modo geral chamamos L / L_x de **multiplicador à esquerda** de $\mathcal{I}$, e R / R_x de **multiplicador à direita** de $\mathcal{I}$.

Definição 3.3. *A* **álgebra de multiplicadores** $M(\mathcal{I})$ *de uma álgebra $\mathcal{I} \lhd \mathcal{A}$ é o conjunto de todos multiplicadores de $\mathcal{I}$, quais para dois multiplicadores (L, R) e (L', R') em $M(\mathcal{I})$ e um elemento k do corpo $\mathbb{K}$, as operações são dadas por:*

$$\begin{aligned} k(L, R) &= (kL, kR); \\ (L, R) + (L', R') &= (L + L', R + R'); \\ (L, R)(L', R') &= (L \circ L', R' \circ R). \end{aligned}$$

Observação 3.4. *Para quaisquer $x, y \in \mathcal{A}$, as transformações, que constituem um multiplicador, são lineares, dessa forma:*

$$\begin{aligned} L_{x+y}(a) = (x+y)(a) = xa + ya = L_x(a) + L_y(a) = (L_x + L_y)(a); \\ L_{xy}(a) = (xy)(a) = x(ya) = x(L_y(a)) = L_x(L_y(a)) = L_x \circ L_y(a); \\ L_{kx}(a) = (kx)(a) = k(xa) = k(L_x(a)) = (kL_x)(a); \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} R_{x+y}(a) = (a)(x+y) = ax + ay = R_x(a) + R_y(a) = (R_x + R_y)(a); \\ R_{xy}(a) = (a)(xy) = (ax)y = (R_x(a))y = R_y(R_x(a)) = R_y \circ R_x(a); \\ R_{kx}(a) = (a)(kx) = k(ax) = k(R_x(a)) = (kR_x)(a). \end{aligned}$$

A construção de cada multiplicador com transformações lineares, a unidade da álgebra $\mathcal{A}$ e as operações que definem $M(\mathcal{I})$, garantem que esta última é uma álgebra associativa, cuja unidade é o par $(L_{1_\mathcal{A}}, R_{1_\mathcal{A}})$ qual cada entrada é a transformação identidade lateral.

Ainda assim, para verificar os fatos mencionados, enunciamos a proposição a seguir:

Proposição 3.5. *$M(\mathcal{I})$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa com unidade, onde $1_{M(\mathcal{I})} = (Id_\mathcal{I}, _\mathcal{I} Id)$ equivale ao par $(L_{1_\mathcal{A}}, R_{1_\mathcal{A}})$, ou seja, a unidade de $M(\mathcal{I})$ é formada pelas transformações identidades laterais em $\mathcal{I}$.*

Demonstração. Para $j, k \in \mathbb{K}$ e $(L_i, R_i) \in M(\mathcal{I})$ com $i \in \{1, 2, \dots\}$. Aqui os índices dos multiplicadores não têm relação com o elemento indexador da álgebra, mas apenas para distinguir cada um dos operadores e analisar a questão da associatividade.

Levando em consideração que cada multiplicador é uma aplicação $\mathbb{K}$-linear, temos:

$$\begin{aligned}
[(L_1, R_1)(L_2, R_2)](L_3, R_3) &= (L_{12}, R_{21})(L_3, R_3) \\
&= (L_{(12)3}, R_{3(21)}) \\
&= (L_{1(23)}, R_{(32)1}) \\
&= (L_1, R_1)(L_{23}, R_{32}) \\
&= (L_1, R_1)[(L_2, R_2)(L_3, R_3)]; \\
(jk)(L_1, R_1) &= ((jk)L_1, (jk)R_1) \\
&= (j(kL_1), j(kR_1)) \\
&= j(kL_1, kR_1) \\
&= j(k(L_1, R_1)).
\end{aligned}$$

Por último, mas não menos importante, precisamos provar que

$$k[(L_1, R_1)(L_2, R_2)] = [k(L_1, R_1)](L_2, R_2) = (L_1, R_1)[k(L_2, R_2)];$$

mas de fato:

$$\begin{aligned}
k(L_1, R_1)(L_2, R_2) &= k(L_{12}, R_{21}) \\
&= (kL_{12}, kR_{21}) \\
&= ((kL_1)L_2, R_2(kR_1)) \\
&= (kL_1, kR_1)(L_2, R_2) \\
&= [k(L_1, R_1)](L_2, R_2);
\end{aligned}$$

analogamente:

$$\begin{aligned}
k(L_1, R_1)(L_2, R_2) &= k(L_{12}, R_{21}) \\
&= (L_1(kL_2), (kR_2)R_1) \\
&= (L_1, R_1)(kL_2, kR_2) \\
&= (L_1, R_1)[k(L_2, R_2)]
\end{aligned}$$

Isso porque k está em $\mathbb{K}$, e portanto comuta com os indexadores de cada multiplicador. É de imediato que $(L_{1_{\mathcal{A}}}, R_{1_{\mathcal{A}}})(L_1, R_1) = (L_1, R_1)$ assim como $(L_1, R_1)(L_{1_{\mathcal{A}}}, R_{1_{\mathcal{A}}}) = (L_1, R_1)$. □

Observação 3.6. *A aplicação ϕ, como definida abaixo, é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras.*

$$\phi : \mathcal{I} \to M(\mathcal{I})$$

$$x \mapsto (L_x, R_x) \ .$$

Queremos mostrar que $\forall x, y \in \mathcal{I}$ e $k \in \mathbb{K}$ temos:

$$\begin{aligned} \phi(x+y) &= \phi(x) + \phi(y); \\ \phi(xy) &= \phi(x)\phi(y); \\ \phi(kx) &= k\phi(x). \end{aligned}$$

Consequentemente, levando em consideração a Observação 3.4, temos:

$$\begin{aligned} \phi(x+y) &= (L_{x+y}, R_{x+y}) = (L_x + L_y, R_x + R_y) = (L_x, R_x) + (L_y, R_y) \\ &= \phi(x) + \phi(y); \\ \phi(xy) &= (L_{xy}, R_{xy}) = (L_x L_y, R_y R_x) = (L_x, R_x)(L_y, R_y) \\ &= \phi(x)\phi(y); \\ \phi(kx) &= (L_{kx}, R_{ky}) = (kL_x, kR_x) = k(L_x, R_x) = k\phi(x). \end{aligned}$$

Definição 3.7. *Dizemos que uma* ***álgebra*** $\mathcal{I}$ *é* **não degenerada** *se* $\phi : \mathcal{I} \to M(\mathcal{I})$ *for um monomorfismo.*

Notemos que, se o núcleo do homomorfismo ϕ for apenas o zero, o homomorfismo será injetivo. Por outro lado, pela definição da aplicação, constatamos que o par de multiplicadores que leva ao núcleo da aplicação são na verdade os anuladores à esquerda e à direita de $\mathcal{I}$ em $\mathcal{I}$.

De forma geral, sendo $\mathcal{I}$ um ideal da álgebra $\mathcal{A}$, então consideramos um homomorfismo ψ tal que $\phi = \psi|_{\mathcal{I}}$, definido do seguinte modo $\psi : \mathcal{A} \ni a \mapsto (L_a, R_a) \in M(\mathcal{I})$, cujo núcleo é a interseção dos anuladores à esquerda de $\mathcal{I}$ em $\mathcal{A}$ com os anuladores à direita também de $\mathcal{I}$ em $\mathcal{A}$.

$\ell.Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{I}) = \{a \in \mathcal{A};\ \forall x \in \mathcal{I}, ax = 0\}$ é o anulador à esquerda de $\mathcal{I}$ em $\mathcal{A}$, e;

$r.Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{I}) = \{a \in \mathcal{A};\ \forall x \in \mathcal{I}, xa = 0\}$ é o anulador à direita de $\mathcal{I}$ em $\mathcal{A}$.

Assim, $Ker(\phi) = \ell.Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{I}) \cap r.Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{I})$, e portanto $\mathcal{I}$ é álgebra *não degenerada* se, e somente se, para todo elemento a em $\mathcal{I}$ e $a \neq 0$; existe um elemento $b \neq 0$ também em $\mathcal{I}$ tal que $ab \neq 0$ ou $ba \neq 0$.

Podemos observar os núcleos para estes homomorfismos assim:

$$\begin{aligned} Ker(\phi) &= \{x \in \mathcal{I};\ \phi(x) = 0_{M(\mathcal{I})}\} \\ &= \{x \in \mathcal{I};\ L_x(a) = R_x(a) = 0_{\mathcal{I}}, \forall a \in \mathcal{I}\} \end{aligned}$$

$$= \{x \in \mathcal{I};\ xa = ax = 0, \forall a \in \mathcal{I}\}$$
$$= \ell.Ann_{\mathcal{I}}(\mathcal{I}) \cap r.Ann_{\mathcal{I}}(\mathcal{I}).$$

E no caso do homomorfismo ψ:

$$\begin{aligned} Ker(\psi) &= \{y \in \mathcal{A};\ \psi(y) = 0_{M(\mathcal{I})}\} \\ &= \{y \in \mathcal{A};\ L_y(a) = R_y(a) = 0_{\mathcal{I}}, \forall a \in \mathcal{I}\} \\ &= \{y \in \mathcal{A};\ ya = ay = 0, \forall a \in \mathcal{I}\} \\ &= \ell.Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{I}) \cap r.Ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{I}). \end{aligned}$$

Para os próximos resultados apresentados, assumiremos $\mathcal{I} \lhd \mathcal{A}$ como uma $\mathbb{K}$-álgebra; e $M(\mathcal{I})$ como a $\mathbb{K}$-álgebra dos multiplicadores de $\mathcal{I}$.

Mantemos também as definições anteriores dos homomorfismos de álgebras ψ e ϕ tais quais: $\phi = \psi|_{\mathcal{I}}$.

Proposição 3.8. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) $\phi(\mathcal{I})$ *é um ideal de* $M(\mathcal{I})$*;*

(ii) $\phi : \mathcal{I} \to M(\mathcal{I})$ *será um isomorfismo se, e somente se,* $\mathcal{I}$ *for uma álgebra com unidade.*

Demonstração. (i) Sejam x um elemento na álgebra $\mathcal{I}$, e (L, R) um elemento arbitrário de $M(\mathcal{I})$. Sabemos que a imagem correspondente a x por ϕ será (L_x, R_x). Queremos que $(L_x, R_x)(L, R) = (L_xL, RR_x)$, e $(L, R)(L_x, R_x) = (LL_x, R_xR)$ estejam em $\phi(\mathcal{I})$. Notemos que $\forall a \in \mathcal{I}$:

$$(L_xL(a)) = L_x(L(a)) = xL(a) = R(x)a = L_{R(x)}(a)$$
$$(RR_x(a)) = R(R_x(a)) = R(ax) = aR(x) = R_{R(x)}(a)$$
$$(LL_x(a)) = L(L_x(a)) = L(xa) = L(x)a = L_{L(x)}(a)$$
$$(R_xR(a)) = R_x(R(a)) = R(a)x = aL(x) = R_{L(x)}(a)$$

Assim $(L_x, R_x)(L, R) = (L_{R(x)}, R_{R(x)})$ e $(L, R)(L_x, R_x) = (L_{L(x)}, R_{L(x)})$. Como $R(x)$ e $L(x)$ estão em $\mathcal{I}$;

$$\phi(x)(L, R), (L, R)\phi(x) \in \phi(\mathcal{I}) \subset M(\mathcal{I}).$$

(ii) ($\Rightarrow$) Por hipótese ϕ é um isomorfismo, e sabemos que $M(\mathcal{I})$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra com unidade $(L_{1_{\mathcal{I}}}, R_{1_{\mathcal{I}}})$. Da sobrejetividade de ϕ, $\exists x \in \mathcal{I}$ tal que $\phi(x) = (L_{1_{\mathcal{I}}}, R_{1_{\mathcal{I}}})$, desse

modo:

$$(L_x, R_x) = (L_{1_\mathcal{I}}, R_{1_\mathcal{I}}) \Leftrightarrow \begin{cases} xa = 1_\mathcal{I}\, a \\ ax = a\, 1_\mathcal{I} \end{cases} ; \forall a \in \mathcal{I}$$
$$\Leftrightarrow x = 1_\mathcal{I}\ .$$

(⇐) Supondo agora, que a álgebra $\mathcal{I}$ possui unidade $1_\mathcal{I}$, então $\phi(1_\mathcal{I}) \in \phi(\mathcal{I}) \subseteq M(\mathcal{I})$. Como ϕ é um homomorfismo de álgebras $\phi(1_\mathcal{I}) = 1_{M(\mathcal{I})}$. Precisamos provar a bijetividade da aplicação ϕ. Dado $y \in M(\mathcal{I})$ arbitrário, denotamo-o por (L_x, R_x), sem perder a generalidade; analisando os multiplicadores laterais, temos $\forall a \in \mathcal{I}$ que:

$$L_x(a) = L_x(1_\mathcal{I}\, a) = L_x(1_\mathcal{I})a = L_{L_x(1_\mathcal{I})}(a), \text{ e ;}$$
$$R_x(a) = R_x(1_\mathcal{I}\, a) = aR_x(1_\mathcal{I}) = R_{R_x(1_\mathcal{I})}(a).$$

Logo, $(L, R) = (L_{L_x(1_\mathcal{I})}, R_{R_x(1_\mathcal{I})})$, além disso:

$$L_x(1_\mathcal{I}) = 1_\mathcal{I} L_x(1_\mathcal{I}) = R_x(1_\mathcal{I})1_\mathcal{I} = R_x(1_\mathcal{I});$$

uma vez que ϕ é homomorfismo, tomamos $x = x(1_\mathcal{I}) = (1_\mathcal{I})x$; e $\phi(x) = y$. Para a injetividade, exibimos o núcleo da aplicação, seja agora $\phi(x) = (L_x, R_x) = (0, 0)$, isso acontece apenas se $\forall a \in \mathcal{I}$ tivermos $L_x = 0$ e $R_x = 0$; ou seja $x\, a = 0 = a\, x$; em particular, assumindo $a = 1_\mathcal{I}$, $x\, 1_\mathcal{I} = 0 = 1_\mathcal{I}\, x \Leftrightarrow x = 0$. Como $Ker(\phi) = 0$, a aplicação é injetiva, e portanto um isomorfismo.

□

Com a preocupação da comutatividade entre dois multiplicadores laterais para uma álgebra preferencialmente não unitária, (i.e.)

$$R' \circ L = L \circ R' \ ; \tag{3.1}$$

sendo os pares (L, R) e (L', R') pertencentes à álgebra de multiplicadores de uma álgebra $\mathcal{I}$, queremos caracterizar as álgebras que respeitam o que definiremos a seguir por (L, R)-associatividade. Na maior parte dos casos, a fórmula é mantida por questão da associatividade, vejamos que, para $x, x' \in \mathcal{I} \lhd \mathcal{A}$ e $(L, R) = (L_x, R_x)$, $(L', R') = (L_{x'}, R_{x'})$:

$$R_{x'}(L_x(a)) = R_{x'}(xa) = (xa)x' = x(ax') = L_x(ax') = L_x(R_{x'}(a)).$$

Definição 3.9. *Dizemos que uma* ***álgebra*** $\mathcal{I}$ *é* (L, R)***-associativa****, se para dois pares de multiplicadores* (L, R) *e* (L', R')*, pertencentes à álgebra de multiplicadores* $M(\mathcal{I})$*, obtivermos:*

$$R' \circ L = L \circ R'.$$

Duas condições suficientes para a (L, R)-associatividade de uma álgebra $\mathcal{I}$ são dadas pela proposição a seguir:

Proposição 3.10. *Uma álgebra* $\mathcal{I}$ *é dita* (L, R)*-associativa se qualquer uma das duas condições abaixo for satisfeita.*

(i) $\mathcal{I}$ *for uma álgebra não degenerada; ou*

(ii) $\mathcal{I}$ *for idempotente.*

Demonstração. Para a demonstração dos itens, assumimos os pares (L, R) e (L', R') pertencentes à álgebra de multiplicadores $M(\mathcal{I})$; com $a, b \in \mathcal{I}$. Como visto:

$$L(R'(a))b = L(R'(a)b) = L(aL'(b)) = L(a)L'(b) = R'(L(a))b.$$

De forma análoga, $b(L(R'(a))) = R(b)R'(a) = R'(R(b)a) = R'(bL(a)) = b(R'(L(a)))$.

Isso nos garante que $L(R'(a)) - R'(L(a)) \in Ker(\phi) = \ell.Ann_{\mathcal{I}}(\mathcal{I}) \cap r.Ann_{\mathcal{I}}(\mathcal{I})$.

Vejamos que as relações acima identificadas são apenas a exibição da associatividade, comutatividade da composição de multiplicadores laterais indexados por elementos distintos, $R' \circ L = L \circ R'$, ainda que operada com elementos da álgebra.

Por hipótese do item (i), $\mathcal{I}$ é não degenerada, ou seja, ϕ é monomorfismo e portanto a igualdade $L(R'(a)) = R'(L(a))$ é válida $\forall a \in \mathcal{I}$, então $L \circ R' = R' \circ L$ e $\mathcal{I}$ é (L, R)-associativa;

Agora por hipótese do item (ii), suponhamos que $\mathcal{I}$ é idempotente, com isso queremos que a igualdade $L'(R(a)) = R(L'(a))$ seja mantida para todo $a \in \mathcal{I}$ tal que $a = a_1 a_2$ com $a_1, a_2 \in \mathcal{I}$. E de fato a igualdade se mantém, notemos que:

$$\begin{aligned} L'(R(a)) = L'(R(a_1a_2)) = L'(a_1R(a_2)) = L'(a_1)R(a_2) \Rightarrow \\ \Rightarrow L'(a_1)R(a_2) = R(L'(a_1)a_2) = R(L'(a_1a_2)) = R(L'(a)) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Com $\mathcal{I}$ idempotente, temos que $\mathcal{I}^2$ coincide exatamente com $\mathcal{I}$; tomemos um elemento arbitrário $a \in \mathcal{I}$, na melhor das hipóteses ele será idempotente $aa = a$, senão $a = a_1 a_2$ para dois elementos a_1 e a_2 de $\mathcal{I}$, condicionando que a_2 simetriza a_1 à direita. Com uso de (3.2), vemos

que para $b = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}a_{2i} \in \mathcal{I}$ teremos:

$$\begin{aligned}(L' \circ R)(b) &= (L' \circ R)\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}a_{2i}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} L'(R(a_{1i}a_{2i}))\\ &\overset{(3.2)}{=} \sum_{i=1}^{n} R(L'(a_{1i}a_{2i}))\\ &= (R \circ L')\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}a_{2i}\right)\\ &= (R \circ L')(b).\end{aligned}$$

Provamos neste último caso a (L, R)-associatividade de $\mathcal{I}$. □

Voltando ao mérito das ações parciais, estará explícito no capítulo a seguir, que para discutirmos a associatividade do *skew* anel de grupo parcial precisamos ter o entendimento da (L, R)-associatividade dos ideais D_g de uma $\mathbb{K}$-álgebra.

A caminho de facilitar a identificação dessa caracteristica associativa para certos ideais, enunciamos a seguinte proposição.

Proposição 3.11. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra com unidade. As afirmações a seguir são equivalentes:*

(i) Todo ideal não nulo de $\mathcal{A}$ é não degenerado;

(ii) Todo ideal não nulo de $\mathcal{A}$, ou é não degenerado, ou é idempotente;

(iii) Todo ideal não nulo de $\mathcal{A}$ é não degenerado à direita ($r.Ann_{\mathcal{I}}(\mathcal{I}) = \{0\}$);

(iv) Todo ideal não nulo de $\mathcal{A}$ é não degenerado à esquerda; ($\ell.Ann_{\mathcal{I}}(\mathcal{I}) = \{0\}$)

(v) $\mathcal{A}$ é semiprima.

Em qualquer dos casos, todo ideal de $\mathcal{A}$ será (L, R)-associativo.

Demonstração. **(i)⇒(ii)** Essa primeira implicação acaba sendo resultado imediato da Proposição 3.10.

(ii)⇒(v) Se $\mathcal{A}$ possui um ideal $\mathcal{I}$ nilpotente não nulo (i.e. $\mathcal{I}^n = 0$ para algum $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$, então existirá um ideal não nulo $\mathcal{J} \triangleleft \mathcal{A}$ que é divisor de zero, onde n foi tomado como o menor inteiro positivo tal que $\mathcal{I}^n = 0$, daí $\mathcal{J} = \mathcal{I}^{n-1} \neq 0$.

Vejamos que, se $\mathcal{J} = \mathcal{I}^{n-1}$, garantimos que $\mathcal{J}^2 = (\mathcal{I}^{n-1})^2 = \mathcal{I}^{2n-2} \subseteq \mathcal{I}^n = 0$. Mas desse modo $\mathcal{I}$ não seria idempotente tampouco não degenerada, o que por absurdo prova que $\mathcal{A}$ é álgebra semiprima, conforme a Definição B.1.9.

(v)⇒(iv) Seja $\mathcal{I}$ um ideal de $\mathcal{A}$ possuindo um elemento não nulo a tal que $a\mathcal{I} = \{0\}$. Então o ideal gerado por a é um ideal não nulo, e se chamarmos este ideal de $J = \mathcal{A}a\mathcal{A}$ junto com a assunção de $\mathcal{A}$ unitária, percebemos que:

$$J^2 = (\mathcal{A}a\mathcal{A})(\mathcal{A}a\mathcal{A}) = \mathcal{A}a(\mathcal{A}\mathcal{A}a)\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}a\mathcal{I}\mathcal{A} = \{0\} \ .$$

O que viola o fato de $\mathcal{A}$ ser semiprima, pois exibimos um ideal não nulo J tal que $J^2 = 0$.

(v)⇒(iii) Como provamos a implicação anterior, de forma análoga e simétrica provamos a atual implicação.

(iii)⇒(i) Agora, seja $\mathcal{I}$ um ideal não nulo de $\mathcal{A}$. Por hipótese, para cada $a \neq 0$, com $a \in \mathcal{I}$, $\mathcal{I}a \neq 0$, $\exists b \in \mathcal{I};\ ba \neq 0 \Rightarrow b\mathcal{I} \neq 0$. Em outras palavras, é o mesmo que afirmar o fato de $\mathcal{I}$ ser não degenerado. E pela arbitrariedade do ideal, provamos a implicação.

Provamos os itens da proposição através do ciclo (i)⇒(ii)⇒(v)⇒(iii)/(iv)⇒(i). □

Ainda sejam os ideais $\mathcal{I} \triangleleft \mathcal{A}$, $\mathcal{J} \triangleleft \mathcal{A}$ e um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\pi : \mathcal{I} \to \mathcal{J}$, então notamos que para os pares:

$$(L, R) \in M(\mathcal{I}), \text{ e } ;$$

$$(\pi \circ L \circ \pi^{-1}, \pi \circ R \circ \pi^{-1}) \in M(\mathcal{J});$$

podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 3.12. *A aplicação*

$$\overline{\pi} : M(\mathcal{I}) \to M(\mathcal{J}),$$

definida por $\overline{\pi}(L, R) = (\pi \circ L \circ \pi^{-1}, \pi \circ R \circ \pi^{-1})$ *é um isomorfismo de* $\mathbb{K}$*-álgebras.*

Demonstração. Dado um par arbitrário $(L, R) \in M(\mathcal{I})$, temos $(\pi \circ L \circ \pi^{-1})$ e $(\pi \circ R \circ \pi^{-1})$ definidos para cada multiplicador lateral L e R, respectivamente, por meio da aplicação em um elemento j da álgebra $\mathcal{J}$ levando em algum elemento nesta mesma álgebra. Constatemos que a composição de $\mathbb{K}$-homomorfismos é também $\mathbb{K}$-homomorfimo, que é o caso de cada componente no par $\overline{\pi}(L, R)$. Mais explicitamente, notemos a composição $\pi \circ L \circ \pi^{-1} : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ para $j \in \mathcal{J}$:

$$\pi \circ L \circ (\underbrace{\pi^{-1}(j)}_{=i \in \mathcal{I}}) = \pi(\underbrace{L(i)}_{={}^*i \in \mathcal{I}}) = \pi({}^*i) = {}^*j \in \mathcal{J}.$$

De forma análoga mostramos para o multiplicador à direita:

$$\pi \circ R \circ (\pi^{-1}(j)) = \pi(R(i)) = \pi(i^*) = j^* \in \mathcal{J}.$$

E por arbitrariedade dos multiplicadores, mostramos a boa definição de $\overline{\pi}$.

Precisamos verificar agora se o conjunto dos pares $(\pi \circ L \circ \pi^{-1}, \pi \circ R \circ \pi^{-1})$ caracteriza uma álgebra de multiplicadores, de acordo com a definição. Como $\mathcal{J} \lhd \mathcal{A}$ fica quase explícito as propriedades dadas na Definição 3.1. Mas vejamos que para $x, y \in \mathcal{J}$:

$$\begin{aligned}(\pi \circ L \circ \pi^{-1})(xy) &= \pi \circ L(\pi^{-1}(x)\pi^{-1}(y)) = \pi(L(\pi^{-1}(x))\pi\pi^{-1}(y)) \\ &= \pi(L(\pi^{-1}(x))(y)) = (\pi \circ L \circ \pi^{-1})(x)y; \\ (\pi \circ R \circ \pi^{-1})(xy) &= \pi \circ R(\pi^{-1}(x)\pi^{-1}(y)) = \pi(\pi^{-1}(x)(R\pi^{-1}(y))) \\ &= \pi\pi^{-1}(x)(\pi(R\pi^{-1}(y))) = x(\pi \circ R \circ \pi^{-1})(y).\end{aligned}$$

Sabemos também que para $x \in \mathcal{J}, \exists z \in \mathcal{I};\ \pi(z) = y$, com isso:

$$\begin{aligned}(\pi \circ R \circ \pi^{-1})(x)y &= (\pi \circ R \circ \pi^{-1})(x)\pi(z) = \pi(R(\pi^{-1}(x))z) \\ &= \pi(\pi^{-1}(x)L(z)) = x(\pi L(\pi^{-1}(y))) \\ &= x(\pi \circ L \circ \pi^{-1})(y).\end{aligned}$$

Falta mostrarmos a linearidade da aplicação para a soma de multiplicadores, multiplicação para algum escalar do corpo e composição dos multiplicadores tomados par a par. Vejamos que, para $(L, R), (L', R') \in M(\mathcal{I})$ e algum $k \in \mathbb{K}$, qualquer que seja j tomado em $\mathcal{J}$ teremos:

$$\begin{aligned}(\pi \circ (L + kL') \circ \pi^{-1})(j) &= (\pi \circ (L + kL'))(\pi^{-1})(j)) \\ &= \pi(L(\pi^{-1}(j)) + kL'(\pi^{-1}(j))) \\ &= \pi(L(\pi^{-1}(j))) + k\pi(L'(\pi^{-1}(j))) \\ &= (\pi \circ L \circ \pi^{-1} + k(\pi \circ L' \circ \pi^{-1}))(j).\end{aligned}$$

De forma análoga vale que $\pi \circ (R + kR') \circ \pi^{-1} = (\pi \circ R \circ \pi^{-1}) + k(\pi \circ R' \circ \pi^{-1})$, tendo provada a igualdade $\pi \circ (L + kL') \circ \pi^{-1} = (\pi \circ L \circ \pi^{-1}) + k(\pi \circ L' \circ \pi^{-1})$ temos que:

$$\overline{\pi}((L, R) + k(L', R')) = \overline{\pi}(L, R) + k\overline{\pi}(L', R').$$

Ainda:

$$\begin{aligned}\overline{\pi}((L, R)(L', R')) &= \overline{\pi}(LL', R'R) = (\pi(LL')\pi^{-1}, \pi(R'R)\pi^{-1}) \\ &= (\pi(L\pi^{-1}\pi L')\pi^{-1}, \pi(R'\pi^{-1}\pi R)\pi^{-1}) \\ &= ((\pi L\pi^{-1})(\pi L'\pi^{-1}), (\pi R'\pi^{-1})(\pi R\pi^{-1}))\end{aligned}$$

$$= (\pi L\pi^{-1}, \pi R\pi^{-1})(\pi L'\pi^{-1}, \pi R'\pi^{-1})$$
$$= \overline{\pi}(L, R)\overline{\pi}(L', R').$$

Nessa última passagem desconsideramos o uso de "$\circ$" para denotar a composição dos $\mathbb{K}$-homomorfismos na tentativa de não sobrecarregar com notações.

Agora nos resta mostrar a bijetividade da aplicação $\overline{\pi}$. Reparemos que para algum par $(L, R) \in M(\mathcal{J})$, é de imediato que $(\pi^{-1} \circ L \circ \pi, \pi^{-1} \circ R \circ \pi) \in M(\mathcal{I})$, e assim $\overline{\pi}(\pi^{-1} \circ L \circ \pi, \pi^{-1} \circ R \circ \pi) = (L, R)$. Mais ainda, seja $(L, R) \in Ker(\overline{\pi})$, temos

$$\pi \circ L \circ \pi^{-1} = 0 = \pi \circ R \circ \pi^{-1} \Rightarrow L = 0 = R \Rightarrow Ker(\overline{\pi}) = 0,$$

pois π e π^{-1} são isomorfismos. □

CAPÍTULO 4

A associatividade do *skew* anel de grupo parcial

Nem sempre o *skew* anel de grupo parcial $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ será associativo, contudo, exibimos uma caracterização de associatividade com o teorema a seguir. Quando uma condição específica for satisfeita, o anel $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ será associativo.

Teorema 4.1. *Se $\mathcal{A}$ for uma $\mathbb{K}$-álgebra, e G for um grupo que age parcialmente sobre $\mathcal{A}$ via a ação parcial α, além disso, se cada ideal $D_g(g \in G)$ for (L, R)-associativo, então o* skew *anel de grupo parcial $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ será associativo.*

Demonstração. $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ é associativo $\iff$ $(a\delta_h b\delta_g)c\delta_f = a\delta_h(b\delta_g c\delta_f)$ $\forall h, g, f \in G$ e $a \in D_h, b \in D_g, c \in D_f$.

Veremos que a medida que verificamos a igualdade que garante a associatividade do *skew* anel de grupo parcial $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$, chegaremos à condição de (L, R)-associatividade para os ideais da álgebra.

Pelo lado esquerdo da igualdade temos a composição dada por:

$$a\delta_h b\delta_g = \alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b)\delta_{hg};$$

vejamos:

$$(a\delta_h b\delta_g)c\delta_f = \alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b)\delta_{hg}c\delta_f = \alpha_{hg}\underbrace{[\alpha_{(hg)^{-1}}(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b))c]}_{(*)}\delta_{hgf}.$$

Recordando as condições na definição de ação parcial, veremos que $\alpha_{h^{-1}}(a)b \in D_{h^{-1}} \cap D_g$ e portanto $\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b) \in \alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_g) = D_h \cap D_{hg}$. Notemos $(*)$ anteriormente entre colchetes:

$$\begin{aligned}\alpha_{(hg)^{-1}}(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b))c &= \alpha_{g^{-1}h^{-1}}(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b))c \\ &= \alpha_{g^{-1}}\alpha_{h^{-1}}(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b))c \\ &= \alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b)c \in D_{g^{-1}} \cap D_{(hg)^{-1}}.\end{aligned}$$

Pelo último pertencimento denotado acima, podemos separar α_{hg} aplicando primeiro α_g, reparemos:

$$\begin{aligned}(a\delta_h b\delta_g)c\delta_f &= \alpha_{hg}[\alpha_{(hg)^{-1}}(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b))c]\delta_{hgf} \\ &= \alpha_h(\alpha_g[\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b)c])\delta_{hgf}. \qquad (4.1)\end{aligned}$$

Agora pelo outro lado da igualdade:

$$\begin{aligned}a\delta_h(b\delta_g c\delta_f) &= a\delta_h(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c))\delta_{gf} \\ &= \alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c))\delta_{hgf}. \qquad (4.2)\end{aligned}$$

Para que seja válida a igualdade primeiramente mencionada, precisamos ter para quaisquer $a \in D_g, b \in D_h, c \in D_f$:

$$\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b)c) = \alpha_{h^{-1}}(a)\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c);$$

igualdade que é obtida ao aplicarmos simultâneamente $\alpha_{h^{-1}}$ em (4.1) e (4.2) e em seguida igualando-as.

Notemos que $\alpha_{h^{-1}} : D_h \to D_{h^{-1}}$ é um isomorfismo e a arbitrariedade de $a \in D_h$ faz com que $\alpha_{h^{-1}}(a)$ percorra todo o ideal $D_{h^{-1}}$, podemos usar a notação $a^* = \alpha_{h^{-1}}(a)$ e escrever para quaisquer $a^* \in D_{h^{-1}}, b \in D_g, c \in D_f$ de modo equivalente à igualdade:

$$\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a^*b)c) = a^*\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c). \qquad (4.3)$$

Esta última baseada nos isomorfismos indexados por g, o que nos permite considerar por exemplo $h = f = 1_{\mathcal{A}} \Rightarrow D_f = D_h = \mathcal{A}$, e acima de tudo, afirmar que o *skew* anel de grupo parcial $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ será associativo se, e somente se, a igualdade (4.3) for mantida, quaisquer que sejam $g \in G$, $a, c, \in \mathcal{A}$ e $b \in D_g$. Podemos escrever (4.3) como uma igualdade baseada nos

multiplicadores do ideal D_g:

$$(\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}}) \circ L_a(b) = L_a \circ (\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}})(b), \tag{4.4}$$

válida em $D_g(g \in G), \forall a, c \in \mathcal{A}$.

Vejamos que em (4.4) consideramos R_c como multiplicador à direita de $D_{g^{-1}}$ e L_a como multiplicador à esquera de D_g, observemos que dessa forma $(\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}}) = R'_c$ é um multiplicador à direita de D_g pela Proposição 3.12. E dizer que $L_a \circ R'_c = R'_c \circ L_a$ é dizer que D_g é (L, R)-associativo, com essa condição $(a\delta_h b\delta_g)c\delta_f = a\delta_h(b\delta_g c\delta_f)$, o que diretamente infere-nos que há associatividade no *skew* anel de grupo parcial. □

Corolário 4.2. *Se um grupo G age parcialmente via α sobre uma álgebra $\mathcal{A}$, sendo que cada álgebra $D_g(g \in G)$ é ou idempotente ou não degenerada, então o* skew *anel de grupo parcial $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ é associativo.*

Demonstração. A prova é imediata através do Teorema 4.1 anterior acompanhado da Proposição 3.10 que garante a (L, R)-associatividade para cada $D_g(g \in G)$, já que por hipótese é ou idempotente ou não-degenerado. □

Definição 4.3. *Dizemos que uma $\mathbb{K}$-**álgebra** $\mathcal{A}$ é* **fortemente associativa** *se para qualquer grupo G e uma ação parcial arbitrária α de G sobre $\mathcal{A}$ o* skew *anel de grupo parcial $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ é associativo.*

Corolário 4.4. *Uma $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{A}$ semiprima é fortemente associativa.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra semiprima, e G um grupo que age parcialmente via α sobre $\mathcal{A}$. Por equivalência demonstrada na Proposição 3.11, cada ideal $D_g(g \in G)$ da álgebra $\mathcal{A}$ é ou idempotente ou não-degenerado, e por último, o Corolário 4.2 afirma a associatividade de $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$. A arbitrariedade do grupo e da ação parcial encaixa a álgebra semiprima $\mathcal{A}$ como fortemente associativa. □

Exemplo 4.5. *Sejam $\mathcal{A}$ um $\mathbb{K}$-módulo e $\mathbb{K}$ um corpo, isto é, $\mathcal{A}$ é um $\mathbb{K}$-módulo livre, cuja base é $\{t, u, v, 1\}$. Como todo elemento do módulo pode ser escrito por expansão da base, além de notar que $(\mathcal{A}, +)$ é grupo abeliano pela definição de módulo, precisamos tão somente exibir uma operação binária fechada $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, uma unidade para a operação e o cumprimento da condição $k(xy) = (kx)y = x(ky); \quad \forall k \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in \mathcal{A}$, para caracterizarmos como uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa com unidade e com $dim(\mathcal{A}) = 4$.*

Definimos a multiplicação por:

$$\begin{cases} t^2 = u^2 = v^2 = 0 \\ vt = tv = u \\ 1a = a1 = a; \quad \forall a \in \mathcal{A}. \end{cases}$$

Observemos que com as duas primeiras regras da multiplicação tiramos as relações de igualdade $ut = tu = uv = vu = 0$*, e claramente* $\mathcal{A}$ *é uma* $\mathbb{K}$*-álgebra associativa.*

Agora sejam o grupo $G = \langle g; g^2 = 1 \rangle$ *e o ideal* $\mathcal{I} \lhd \mathcal{A};\ \mathcal{I} = [v]$*, isto é* $\mathcal{I}$ *é gerado por* v*, ou ainda,* $\mathcal{I} = \mathcal{A}v\mathcal{A}$*;* $\mathcal{I} = \mathcal{A}v$ *já que* $\mathcal{A}$ *é álgebra comutativa.*

Olhemos que para $k_i \in \mathbb{K},\ i \in \{1, 2, 3, 4\}$*, um elemento* $a \in \mathcal{A}$ *pode ser escrito como a combinação* $a = k_1t + k_2u + k_3v + k_41$*.*

Agora para algum $x \in \mathcal{I}$*,* $x = av = (k_1t + k_2u + k_3v + k_41)v = k_1u + k_4v$*. Concluímos que* $x \in \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$*. Agora por outro lado, se tomarmos um elemento* $y \in \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$*, então podemos escrever* $y = k_1u + k_2v = k_1tv + k_2v = (k_1t + k_2)v$ *assim* $y \in \mathcal{I}$*. Portanto temos a igualdade:* $\mathcal{I} = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$*, que quer dizer nada menos que* $\mathcal{I}$ *é o* $\mathbb{K}$*-submódulo de* $\mathcal{A}$ *gerado por* u *e* v*.*

Definimos por conseguinte um ação parcial α *de* G *sobre* $\mathcal{A}$*, onde* $\mathcal{I} = D_g$ *e* $\mathcal{A} = D_1$ *são os ideais, e* $Id_{\mathcal{A}} = \alpha_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *juntamente com* $\alpha_g : \mathcal{I} \ni k_1u + k_2v \mapsto k_1v + k_2u \in \mathcal{I}$ *são os isomorfismos.*

Como $\alpha = (\{\mathcal{A}, \mathcal{I}\}, \{\alpha_1, \alpha_g\})$*, entendemos o* skew *anel de grupo parcial pela soma direta* $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G = \mathcal{A}\delta_1 \oplus \mathcal{I}\delta_g$*. E mostramos facilmente que* $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ *não é associativo.*

Notemos que dado o elemento $x = t\delta_1 + u\delta_g \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha G$*, teremos* $x(xx) \neq (xx)x$*. Primeiro computamos* $xx = (t\delta_1 + u\delta_g)(t\delta_1 + u\delta_g)$

$$\begin{aligned} xx &= t\delta_1 t\delta_1 + t\delta_1 u\delta_g + u\delta_g u\delta_g + u\delta_g t\delta_1 \\ &= \alpha_1(\alpha_{1^{-1}}(t)t)\delta_1 + \alpha_1(\alpha_{1^{-1}}(t)u)\delta_g + \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(u)u)\delta_g + \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(u)t)\delta_g \\ &= \alpha_1(tt)\delta_1 + \alpha_1(tu)\delta_g + \alpha_g(vu)\delta_g + \alpha_g(vt)\delta_g \\ &= \alpha_1(0)\delta_1 + \alpha_1(0)\delta_g + \alpha_g(0)\delta_g + \alpha_g(u)\delta_g = v\delta_g. \end{aligned}$$

Agora por um lado:

$$\begin{aligned} x(xx) = (t\delta_1 + u\delta_g)(v\delta_g) &= (t\delta_1 v\delta_g + u\delta_g v\delta_g) \\ &= \alpha_1(\alpha_{1^{-1}}(t)v)\delta_g + \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(u)v)\delta_g \\ &= \alpha_1(tv)\delta_g + \alpha_g(v^2)\delta_g = \alpha_1(u)\delta_g + \alpha_g(0)\delta_g = u\delta_g. \end{aligned}$$

E por outro lado:

$$\begin{aligned}(xx)x &= (v\delta_g)(t\delta_1 + u\delta_g) = (v\delta_g t\delta_1 + v\delta_g u\delta_g)\\ &= \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(v)t)\delta_g + \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(v)u)\delta_g\\ &= \alpha_g(ut)\delta_g + \alpha_g(u^2)\delta_g = \alpha_g(0)\delta_g + \alpha_g(0)\delta_g = 0.\end{aligned}$$

Portanto, com a desigualdade $x(xx) \neq (xx)x$ verificada, neste exemplo $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ não é associativo.

Mais um exemplo de álgebra não-semiprima é dado pela álgebra das matrizes quadradas $(n \times n)$ triangulares superiores sobre um corpo $\mathbb{K}$, denotada por $uT(n, \mathbb{K})$.

Proposição 4.6. *A álgebra $\mathcal{A} = uT(n, \mathbb{K})$ é fortemente associativa se, e somente se, $n \leq 2$.*

Demonstração. É válido observar que no caso de $n = 1$, $\mathcal{A}$ é claramente uma álgebra fortemente associativa, fitamos que com $n = 1$, $uT(1, \mathbb{K}) = \mathbb{K}$.

Agora, no caso de $n = 2$, percebemos que o único ideal não-idempotente de $\mathcal{A}$ é na verdade o ideal cujos elementos em $\mathcal{A}$ anulam quaisquer $\mathcal{A}$-módulo simples à direita, ou seja, a intersecção dos ideais maximais à direita de $\mathcal{A}$ que é a definição de $J(\mathcal{A})$, que é o radical de Jacobson da álgebra.

Vejamos que para um corpo $\mathbb{K}$ e a álgebra $\mathcal{A} = uT(n, \mathbb{K})$, o radical de Jacobson $J(\mathcal{A})$ serão todas as matrizes de $\mathcal{A}$ com zeros na diagonal principal.

Na proposição, quando $n = 2$, a matriz a seguir com $k \in \mathbb{K}$ é o gerador de $J(\mathcal{A})$ unidimensional sobre $\mathbb{K}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dessa forma todos os multiplicadores de $J(\mathcal{A})$ comutam, logo $uT(2, \mathbb{K})$ é (L, R)-associativa.

Supondo $n \geq 3$ e sendo $G = \langle g \rangle$ o grupo cíclico infinito, temos que:

$$\mathcal{A} = uT(n, \mathbb{K}) = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n};\ \text{ se } i > j, a_{ij} = 0$$

E ainda denotemos para algum $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, a matriz elementar $e_{i,j}$ como sendo a matriz cujo único elemento não nulo e igual a 1 está na posição da coluna j e da linha i.

Tomemos os ideais:

$$D_{g^{-1}} = e_{1,n-1}\mathbb{K} \oplus e_{1,n}\mathbb{K};$$

$$D_g = e_{1,n}\mathbb{K} \oplus e_{2,n}\mathbb{K}, \text{ e ;}$$

$$D_{g^m} = e_{1,n}\mathbb{K};\ \ |m| \geq 2.$$

Juntamente com os isomorfismos $Id : \alpha_{g^m} : D_{g^{-m}} = D_{g^m} \to D_{g^m}$ e $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ este último definido por $\alpha_g(xe_{1,n-1} + ye_{1,n}) = (ye_{1,n} + xe_{2,n})$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$.

A verificação de que $\alpha = (\{D_g, D_{g^{-1}}, D_{g^m}\}, \{\alpha_g, \alpha_{g^{-1}}, \alpha_{g^m}\})$ é uma ação parcial é dada facilmente: costatamos que a intersecção de qualquer par de ideais tomados é o próprio D_{g^m} o que deixa óbvio a aplicação de qualquer um dos isomorfismos, além do fato de que o grupo G é o grupo cíclico infinito gerado por g, o que garante a indexação na composição dos isomorfismos.

Agora, por conta de um contra exemplo, mostramos a não-associatividade de $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ neste caso. Perceba que sempre $e_{1,1}e_{2,n} = 0$. Segue que:

$$(e_{1,1}\delta_1 e_{2,n}\delta_g)e_{n-1,n}\delta_1 = (e_{1,1}e_{2,n}\delta_g)e_{n-1,n}\delta_1 = 0.$$

Mas por outro lado:

$$\begin{aligned} e_{1,1}\delta_1(e_{2,n}\delta_g e_{n-1,n}\delta_1) &= e_{1,1}\delta_1(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(e_{2,n})e_{n-1,n})\delta_g) \\ &= e_{1,1}\delta_1(\alpha_g(e_{1,n-1}e_{n-1,n})\delta_g) \\ &= e_{1,1}\delta_1\alpha_g(e_{1,n})\delta_g = e_{1,1}\delta_1 e_{1,n}\delta_g \\ &= (e_{1,1}e_{1,n})\delta_g = e_{1,n}\delta_g. \end{aligned}$$

Como $(e_{1,1}\delta_1 e_{2,n}\delta_g)e_{n-1,n}\delta_1 \neq e_{1,1}\delta_1(e_{2,n}\delta_g e_{n-1,n}\delta_1)$, então $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ é não-associativa no caso de $\mathcal{A} = uT(n, \mathbb{K});\ \ n \geq 3$. □

CAPÍTULO 5

Ações Envolventes

No Capítulo 1 trazemos uma representação gráfica, através da Figura 2.2, do que seria um exemplo natural de uma ação parcial obtida a partir da restrição de uma ação global a um subconjunto não necessariamente invariante. Sempre podemos construir uma ação parcial α fazendo uma ou mais restrições sobre uma ação global β.

Na tentativa de consubstanciar essa ideia, aqui reiteramos supondo que um grupo G age sobre uma $\mathbb{K}$-álgebra com unidade $\mathcal{B}$ via automorfismos $\beta_{g\in G}$:

$$\begin{aligned} \beta : G &\to Aut_{\mathbb{K}}(\mathcal{B}) \\ g &\mapsto \beta_g. \end{aligned}$$

Para um ideal $\mathcal{A} \lhd \mathcal{B}$, claramente $\mathcal{A}$ é um subanel de $\mathcal{B}$ e vejamos que para quaisquer $k \in \mathbb{K}$ e $a, a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ temos $ka \in \mathcal{A}$ e as igualdades a seguir válidas $k(a) = k(1_{\mathcal{B}}a) = (k1_{\mathcal{B}})a$ e $k(a_1a_2) = (ka_1)a_2 = a_1(ka_2)$ por manutenção das operações em $\mathcal{B}$, com isso afirmamos que $\mathcal{A}$ é uma $\mathbb{K}$-subálgebra de $\mathcal{B}$.

Antes restringimos Y em um subconjunto X não necessariamente invariante via β, agora consideramos uma $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{B}$ no lugar de Y e um ideal $\mathcal{A}$ no lugar de X; sendo assim, precisamos considerar para todo $g \in G$ a seguinte interesecção $D_g = \mathcal{A} \cap \beta_g(\mathcal{A})$ e a restrição $\alpha_g = \beta_g|_{D_{g^{-1}}}$, isto é, $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ para que possamos verificar facilmente que $\alpha = (\{D_g\}, \{\alpha_g\})$ constitui uma ação parcial do grupo G sobre a então $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{A}$. Vamos a seguir verificar que α é uma ação parcial e diremos que é uma restrição de β à $\mathcal{A}$.

Como $\mathcal{A} \triangleleft \mathcal{B}$ e para algum $g \in G$ temos que β_g é um $\mathbb{K}$-automorfismo de $\mathcal{B}$, com isso é evidente que $\beta_g(\mathcal{A}) \triangleleft \mathcal{B}$. E por último $\mathcal{A} \cap \beta_g(\mathcal{A}) = D_g \triangleleft \mathcal{A}$.

Obviamente, de forma análoga ao que fizemos para o ideal $\mathcal{A}$ anteriormente, para cada $g \in G$, D_g será uma $\mathbb{K}$-álgebra. Vejamos que, qualquer que seja o elemento x em D_g, dado um $k \in \mathbb{K}$ teremos $kx \in \mathcal{A}$, pois pela maneira que construimos o ideal indexado por g, $x \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra; mais ainda, $kx \in \beta_g(\mathcal{A})$ já que $x \in \beta_g(\mathcal{A})$ e $\beta_g \in Aut_{\mathbb{K}}(\mathcal{B})$. Finalmente, porque $kx \in \mathcal{A}$ e $kx \in \beta_g(\mathcal{A})$, $kx \in \mathcal{A} \cap \beta_g(\mathcal{A}) = D_g$.

Antes de verificarmos as condições que definem uma ação parcial, notaremos para todo $g \in G$ a boa condição de α_g assim como verificaremos que o mesmo é um isomorfismo.

Tomamos $x \in D_{g^{-1}}$, sabemos que $x \in \mathcal{A} \cap \beta_{g^{-1}}(\mathcal{A})$, sabemos ainda que pela construção $\alpha_g = \beta_g|_{D_{g^{-1}}}$ o que implica ao fato de $\beta_g(x) \in \beta_g(\mathcal{A}) \cap \beta_g(\beta_{g^{-1}}(\mathcal{A})) = \beta_g(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}$. A arbitrariedade de x nos permite afirmar $\alpha_g(x) = \beta_g(x) \in \beta_g(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A} = D_g$, logo, $\alpha_g(D_{g^{-1}}) \subset D_g$.

É evidente, com a retomada do passo anterior, a injetividade de α_g como um $\mathbb{K}$-homomorfismo. E tomando um $y \in D_g$, sabemos que existe um elemento $x \in \mathcal{A}$ cujo $\beta_g(x) = y$, e dessa forma, $\beta_{g^{-1}}(y) = x$. Notemos que $x \in \mathcal{A} \cap \beta_{g^{-1}} = D_{g^{-1}}$, com isso provamos a sobrejetividade de α_g, que é então um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras.

Pela construção da restrição nos automorfismos, notamos que a condição (i) na definição de ação parcial é satisfeita de imediato. A seguir verificamos a condição (ii) $D_{(gh)^{-1}} \supseteq \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}})$ pela condição equivalente (ii') $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$.

Sejam $g, h \in G$ quaisquer, por um lado seja $x \in \alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h)$. Sabemos que haverá um y em $D_{g^{-1}} \cap D_h$ qual $x = \alpha_g(y)$, isto é $x \in \mathcal{A} \cap \beta_g(\mathcal{A})$. Mas y também está em D_h, e existe um isomorfismo $\alpha_h : \mathcal{A} \cap \beta_{h^{-1}}(\mathcal{A}) = D_{h^{-1}} \to D_h$ que nos permite exibir um elemento z tal qual $y = \alpha_h(z)$. Agora $x = \alpha_g(y) = \alpha_g(\alpha_h(z)) = \beta_g(\beta_h(z)) = \beta_{gh}(z) \in \beta_{gh}(\mathcal{A})$, se tivessemos provado a composição da condição (iii') poderiamos encurtar nossa verificação. Mas vejamos que nosso último passo mostra que $x \in D_{gh}$, mas de início $x = \alpha_g(y) \in D_g$, então, $x \in D_g \cap D_{gh}$.

Por outro lado, ainda sejam $g, h \in G$ quaisquer, e x um elemento em $D_g \cap D_{gh}$; a existência de um isomorfismo α_g vai garantir que para algum $y \in D_{g^{-1}}$, teremos $\alpha_g(y) = x$. Mas x pertence simultaneamente a $D_{gh} = \mathcal{A} \cap \beta_{gh}(\mathcal{A})$ o que implica em $\alpha_g(y) \in \beta_{gh}(\mathcal{A}) = \beta_g(\beta_h(\mathcal{A}))$, logo, $y \in \beta_h(\mathcal{A})$. Vejamos que y pertence também a $\mathcal{A}$, assim $y \in D_h = \mathcal{A} \cap \beta_h(\mathcal{A})$. De início tomamos $x \in D_g \cap D_{gh}$ tal que $x = \alpha_g(y)$, e chegamos ao pertencimento de y em $D_h \cap D_{g^{-1}}$.

Por último vericamos a condição (iii') $(\alpha_g \circ \alpha_h)(x) = \alpha_{gh}(x) \quad \forall x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$. Observemos que ao tomarmos $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$, dizemos que $x \in D_{(gh)^{-1}}$ e através do

isomorfismo α_{gh} podemos concluir que existe um elemento y tal que $\alpha_{(gh)^{-1}}(y) = x$, que por sua vez nos permite dizer $x = \beta_{h^{-1}g^{-1}}(y) = \beta_{h^{-1}}(\beta_{g^{-1}}(y))$ se aplicarmos o isomorfismo β_h teremos que $\beta_h(x) = \beta_{g^{-1}}(y) \in \beta_{g^{-1}}(\mathcal{A})$, e portanto nos garante que $\alpha_h(x) \in D_{g^{-1}} = \mathcal{A} \cap \beta_{g^{-1}}(\mathcal{A})$, pois sabemos que $x \in D_{h^{-1}}$ e como $\alpha_h = \beta_h|_{D_{h^{-1}}}$ implica ao fato de que $\alpha_h(x) = \beta_h(x) \in \beta_{h^{-1}}(\mathcal{A})$, e sabemos também que $\alpha_h(x) \in \mathcal{A}$. Notamos que tomamos um $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$ e verificamos que $\alpha_h(x) \in D_{g^{-1}}$ o que permite a composição $(\alpha_g \circ \alpha_h)(x)$. Se olharmos por outro lado, como $\alpha_{gh} = \beta_{gh}|_{D_{(gh)^{-1}}}$, podemos considerar $\alpha_{gh}(x) = \beta_{gh}(x) = \beta_g(\beta_h(x)) = \beta_g(\alpha_h(x)) = \alpha_g(\alpha_h(x)) = (\alpha_g \circ \alpha_h)(x)$. E finalmente verificamos a validade da ação parcial advinda da restrição de β em $\mathcal{A}$.

Seria muito importante sabermos dentro de quais condições particulares podemos obter uma ação parcial a partir de uma ação global, a menos de equivalência, esta última que definimos a seguir.

Mas notamos que para tantos automorfismos indexados por elementos de um grupo G, podemos exibir uma $\mathbb{K}$-subálgebra de $\mathcal{B}$, seja ela $\mathcal{B}^* = \langle \bigcup_{g\in G} \beta_g(\mathcal{A})\rangle$. Evidentemente pode ocorrer que $\mathcal{B}^* \neq \mathcal{B}$, e é notável que $\beta_{g\in G}(\mathcal{B}^*) \subset \mathcal{B}^*$. De modo semelhante ao feito até agora podemos definir uma ação parcial $\alpha = \beta|_{\mathcal{B}^*}$, e neste caso dizemos que α é uma **restrição admissível** de β se $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$.

Definição 5.1. *Sejam G um grupo, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ $\mathbb{K}$-álgebras. Para cada $x \in G$, consideramos ainda uma ação parcial $\alpha = (\{D_g\}, \{\alpha_g\})$ de G sobre $\mathcal{A}$, onde $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$; e consideramos mais ainda uma ação parcial $\alpha' = (\{D'_g\}, \{\alpha'_g\})$ de G sobre $\mathcal{A}'$, com $\alpha'_g : D'_{g^{-1}} \to D'_g$. Dizemos que α **é equivalente a** α' se existir um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\lambda : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ que para qualquer $g \in G$ tenhamos:*

(i) $\lambda(D_g) = D'_g$;

(ii) $(\lambda \circ \alpha_g)(x) = (\alpha'_g \circ \lambda)(x)$; $\forall x \in D_{g^{-1}}$.

Definimos a seguir o que seria uma ação envolvente, ainda que dificultoso seja decidir quando uma ação parcial dada possuirá uma ação envolvente (global).

Definição 5.2. *Seja G um grupo, que age via β sobre uma $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{B}$, e age parcialmente via α sobre uma $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{A}$. Dizemos que β é* ***ação envolvente*** *de α se α for equivalente a uma restrição admissível de β em algum ideal de $\mathcal{B}$.*

Podemos ainda definir uma ação envolvente de forma similar, ainda entendendo G como um grupo, que age via β sobre uma $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{B}$, e age parcialmente via α sobre uma $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{A}$, vejamos a seguir.

Definição 5.3. *Dizemos que β é uma **ação envolvente** de α se existe um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras $\overline{\lambda}$ de $\mathcal{A}$ em um ideal de $\mathcal{B}$, tal que, para todo $g \in G$, são satisfeitas as seguintes condições:*

(i) $\overline{\lambda}(D_g) = \overline{\lambda}(\mathcal{A}) \cap \beta_g(\overline{\lambda}(\mathcal{A}))$;

(ii) $(\overline{\lambda} \circ \alpha_g)(x) = (\beta_g \circ \overline{\lambda})(x) \ ; \quad \forall x \in D_{g^{-1}}$;

(iii) $\mathcal{B} = \langle \bigcup_{g\in G} \beta_g(\overline{\lambda}(\mathcal{A})) \rangle$.

Proposição 5.4. *Seja G um grupo que age via β sobre uma $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{B}$, mais ainda, G age parcialmente via α sobre uma $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{A}$. Se β é ação envolvente de α, então o* skew *anel de grupo parcial $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ tem uma imersão em $\mathcal{B} \rtimes_\beta G$. Em particular, $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ é associativo.*

Demonstração. Precisamos exibir um homomorfismo entre os anéis $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ e $\mathcal{B} \rtimes_\beta G$. Antes vamos pontuar algumas informações importantes advindas do fato de β ser ação envolvente de α, o que implica na existência de um isomorfismo $\overline{\lambda}$ de $\mathbb{K}$-álgebras entre $\mathcal{A}$ e um ideal de $\mathcal{B}$.

Por definição $(\overline{\lambda} \circ \alpha_g)(x) = (\vartheta_g \circ \overline{\lambda})(x) \quad \forall x \in D_{g^{-1}}$, pois sabemos que α é equivalente a ϑ. Ressaltando que ϑ_g é restrição admissível de β.

Dessa maneira definimos a aplicação:

$$\begin{aligned} \theta : \mathcal{A} \rtimes_\alpha G &\to \mathcal{B} \rtimes_\beta G \\ \sum_{g\in G} a_g\delta_g &\mapsto \sum_{g\in G} \overline{\lambda}(a_g)\delta_g. \end{aligned}$$

Notamos a boa definição da aplicação pelo fato de $a_g \in D_g$ o que aloca $\overline{\lambda}(a_g)$ em um ideal em $\mathcal{B}$ o que permite de fato a aplicação de ϑ_g que é restrição admissível de β.

Queremos mostrar que θ é um homomorfismo de anéis, e mais ainda, um homomorfismo de $\mathbb{K}$-módulos, que nos permitirá fazer mais algumas conclusões com essa prova.

Sejam $x, y \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ e $k \in \mathbb{K}$, sabemos que x e y são das formas $x = \sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g$ e $y = \sum\limits_{g\in G} b_g\delta_g$. Queremos de início que $\theta(x + y) = \theta(x) + \theta(y)$. Vejamos:

$$\begin{aligned} \theta\left(\sum_{g\in G} a_g\delta_g + \sum_{g\in G} b_g\delta_g\right) &= \theta\left(\sum_{g\in G}(a_g + b_g)\delta_g\right) = \sum_{g\in G} \overline{\lambda}(a_g + b_g)\delta_g \\ &= \sum_{g\in G}(\overline{\lambda}(a_g) + \overline{\lambda}(b_g))\delta_g = \sum_{g\in G} \overline{\lambda}(a_g)\delta_g + \sum_{g\in G} \overline{\lambda}(b_g)\delta_g \\ &= \theta\left(\sum_{g\in G} a_g\delta_g\right) + \theta\left(\sum_{g\in G} b_g\delta_g\right). \end{aligned}$$

Queremos agora provar que $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$, e é suficiente provar $\theta(a_g\delta_g b_h\delta_h) = \theta(a_g\delta_g)\theta(b_h\delta_h)$, notamos que indexamos y nesse caso com outro elemento do grupo G. Precisamos provar também que $\theta(kx) = k\theta(x)$, observe:

$$\begin{aligned}
\theta(a_g\delta_g b_h\delta_h) &= \theta(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}) = \overline{\lambda}(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh} \\
&= (\overline{\lambda}\circ\alpha_g)(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h))\delta_{gh} = (\vartheta_g\circ\overline{\lambda})(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh} \\
&= \vartheta_g(\overline{\lambda}(\alpha_{g^{-1}}(a_g))\overline{\lambda}(b_h))\delta_{gh} \\
&= \vartheta_g((\vartheta_{g^{-1}}\circ\overline{\lambda})(a_g)\overline{\lambda}(b_h))\delta_{gh} \\
&= \overline{\lambda}(a_g)\delta_g\overline{\lambda}(b_h)\delta_h \\
&= \theta(a_g\delta_g)\theta(b_h\delta_h).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\theta(kx) = \theta\left(k\left(\sum_{g\in G} a_g\delta_g\right)\right) &= \theta\left(\sum_{g\in G}(ka_g)\delta_g\right) \\
= \sum_{g\in G}\overline{\lambda}(ka_g)\delta_g = k\left(\sum_{g\in G}\overline{\lambda}(a_g)\delta_g\right) &= k\theta(x).
\end{aligned}$$

Queremos que para $1_{\mathcal{A}}\delta_1$ tenhamos $\theta(1_{\mathcal{A}}\delta_1) = 1_{\theta(\mathcal{A}\rtimes_\alpha G)}$. De fato:

$$\begin{aligned}
\theta(1_{\mathcal{A}}\delta_1)\theta(x) &= \overline{\lambda}(1_{\mathcal{A}})\delta_1\left(\sum_{g\in G}\overline{\lambda}(a_g)\delta_g\right) = \sum_{g\in G}(\overline{\lambda}(1_{\mathcal{A}})\delta_1)(\overline{\lambda}(a_g)\delta_g) \\
&= \sum_{g\in G}\vartheta_1(\vartheta_1^{-1}(\overline{\lambda}(1_{\mathcal{A}}))\overline{\lambda}(a_g))\delta_g = \sum_{g\in G}\overline{\lambda}(1_{\mathcal{A}})\overline{\lambda}(a_g)\delta_g \\
&= \sum_{g\in G}\overline{\lambda}(a_g)\delta_g = \theta(x)\ ; \\
\theta(x)\theta(1_{\mathcal{A}}\delta_1) &= \left(\sum_{g\in G}\overline{\lambda}(a_g)\delta_g\right)\overline{\lambda}(1_{\mathcal{A}})\delta_1 = \sum_{g\in G}(\overline{\lambda}(a_g)\delta_g)(\overline{\lambda}(1_{\mathcal{A}})\delta_1) \\
&= \sum_{g\in G}\vartheta_g(\vartheta_{g^{-1}}(\overline{\lambda}(a_g))\overline{\lambda}(1_{\mathcal{A}}))\delta_g = \sum_{g\in G}\overline{\lambda}(a_g)\vartheta_g(\overline{\lambda}(1_{\mathcal{A}}))\delta_g = (*) \\
(*) &= \sum_{g\in G}\vartheta_g(\overline{\lambda}(b_g))\vartheta_g(\overline{\lambda}(1_{\mathcal{A}}))\delta_g = \sum_{g\in G}\vartheta_g(\overline{\lambda}(b_g 1_{\mathcal{A}}))\delta_g \\
&= \sum_{g\in G}\vartheta_g(\overline{\lambda}(b_g))\delta_g = \sum_{g\in G}\overline{\lambda}(a_g)\delta_g = \theta(x).
\end{aligned}$$

Onde a passagem $(*)$ é resultado de que $\forall g \in G$ vale:

$$\overline{\lambda}(D_g) = \overline{\lambda}(\mathcal{A}) \cap \vartheta(\overline{\lambda}(\mathcal{A})) \Rightarrow \overline{\lambda}(a_g) = \vartheta_g(\overline{\lambda}(b_g));\ \ b_g \in \mathcal{A}.$$

Podemos facilmente mostrar a injetividade de θ. Tomemos $x = \sum_{g\in G} a_g\delta_g \in Ker(\theta)$, então $\theta(x) = \sum_{g\in G} \overline{\lambda}(a_g)\delta_g = 0$. Mas percebemos que por assumirmos β como ação envolvente de α e ϑ restrição admissível de β, pela forma como definimos o *skew* anel de grupo $\mathcal{B} \rtimes_\beta G$ como a soma direta $\bigoplus_{g\in G} D'_g\delta_g$, então cada elemento de $\mathcal{B} \rtimes_\beta G$ tem uma composição única, o que implica em $\forall g \in G, \quad \overline{\lambda}(a_g) = 0 \Rightarrow a_g = 0$ pois $\overline{\lambda}$ é injetiva. Portanto, $x = \sum_{g\in G} a_g\delta_g = 0$, e θ é injetiva.

Antes provamos inclusive que $\theta(1_\mathcal{A}\delta_1) = \overline{\lambda}(1_\mathcal{A})\delta_1 = 1_{\theta(\mathcal{A}\rtimes_\alpha G)}$. E isso permite afirmarmos que $\theta : \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \to \theta(\mathcal{A} \rtimes_\alpha G)$ é um isomorfismo. Provada a imersão de $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ em $\mathcal{B} \rtimes_\beta G$, na tentativa de mostrar a associatividade de $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$, basta mostrarmos que $\mathcal{B} \rtimes_\beta G$ é associativa. De fato, para concluirmos tomemos, $a_g\delta_g, b_h\delta_h, c_f\delta_f \in \mathcal{B} \rtimes_\beta G$:

$$\begin{aligned}
(a_g\delta_g b_h\delta_h)c_f\delta_f &= \beta_g(\beta_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{hg}c_f\delta_f \\
&= \beta_{gh}(\beta_{(gh)^{-1}}(\beta_g(\beta_{g^{-1}}(a_g)(b_h)))c_f)\delta_{(gh)f} \\
&= \beta_g(\beta_{g^{-1}}(a_g)(b_h))\beta_{gh}(c_f)\delta_{g(hf)} \\
&= \beta_g(\beta_{g^{-1}}(a_g)b_h\beta_{gh}(c_f))\delta_{g(hf)} \\
&= a_g\delta_g(b_h\beta_h(c_f)\delta_{hf}) \\
&= a_g\delta_g(\beta_h(\beta_{h^{-1}}(b_h)c_f)\delta_{hf}) \\
&= a_g\delta_g(b_h\delta_h c_f\delta_f).
\end{aligned}$$

□

Já vimos exemplos de *skew* anéis de grupos parciais que não são associativos, o que de fato implica que nem toda ação parcial admite uma ação envolvente. Precisamos dos seguintes fatos, relacionados a álgebras com unidade, antes de enunciarmos um teorema que garante a existência de uma ação envolvente para determinada ação parcial cujos ideais da álgebra associada respeitam uma condição.

Lema 5.5. *Seja $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{I}_i$ uma $\mathbb{K}$-álgebra definida por uma soma (não necessariamente direta) finita de ideais, onde cada ideal $\mathcal{I}_i$; $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra com unidade. Então $\mathcal{A}$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra com unidade.*

Demonstração. Fazemos essa demonstração por indução, no primeiro e mais simples passo, $\mathcal{A}$ será a soma de dois ideais, sejam estes $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$, ambos com unidade e sejam elas $1_\mathcal{I}$ e $2_\mathcal{I}$ respectivamente. Notamos que, como $\mathcal{A} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$ qualquer elemento $a \in \mathcal{A}$ pode ser escrito da forma $a = x + y$, para algum $x \in \mathcal{I}_1$ e um $y \in \mathcal{I}_2$.

Precisamos exibir uma unidade para a $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{A}$. Observemos que dada uma $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{A}$ e um ideal $\mathcal{I} \lhd \mathcal{A}$ com unidade $1_{\mathcal{I}}$, dizemos que $1_{\mathcal{I}}$ é um idempotente central de $\mathcal{A}$, pelo fato de que, para algum $a \in \mathcal{A}$, teremos $a1_{\mathcal{I}} \in \mathcal{I}$ e mais ainda $a1_{\mathcal{I}} = 1_{\mathcal{I}}(a1_{\mathcal{I}}) = (1_{\mathcal{I}}a)1_{\mathcal{I}} = 1_{\mathcal{I}}a \ \in \mathcal{I}$, desse modo: $1_{\mathcal{I}}\mathcal{A} = \mathcal{I} = \mathcal{A}1_{\mathcal{I}}$.

Agora pelo modo que supomos a construção da nossa $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{A}$ com dois ideais, temos que as unidades destes ideais são idempotentes centrais de $\mathcal{A}$. E similar às operações feitas com os idempotentes centrais de um anel, queremos que, ou um ou outro idempotente seja a unidade da $\mathbb{K}$-álgebra, o que neste caso implica que $1_{\mathcal{I}} + 2_{\mathcal{I}} - 1_{\mathcal{I}}2_{\mathcal{I}} = 1_{\mathcal{A}}$, onde $1_{\mathcal{A}}$ é a unidade de $\mathcal{A}$. De fato:

$$\begin{aligned}
a(1_{\mathcal{A}}) &= a(1_{\mathcal{I}} + 2_{\mathcal{I}} - 1_{\mathcal{I}}2_{\mathcal{I}}) = (x+y)(1_{\mathcal{I}} + 2_{\mathcal{I}} - 1_{\mathcal{I}}2_{\mathcal{I}}) \\
&= x1_{\mathcal{I}} + x2_{\mathcal{I}} - x(1_{\mathcal{I}}2_{\mathcal{I}}) + y1_{\mathcal{I}} + y2_{\mathcal{I}} - y(1_{\mathcal{I}}2_{\mathcal{I}}) \\
&= x + x2_{\mathcal{I}} - x2_{\mathcal{I}} + y1_{\mathcal{I}} + y - y1_{\mathcal{I}} = x + y = a \ ; \\
(1_{\mathcal{A}})a &= (1_{\mathcal{I}} + 2_{\mathcal{I}} - 1_{\mathcal{I}}2_{\mathcal{I}})a = (1_{\mathcal{I}} + 2_{\mathcal{I}} - 1_{\mathcal{I}}2_{\mathcal{I}})(x+y) \\
&= 1_{\mathcal{I}}x + 2_{\mathcal{I}}x - (1_{\mathcal{I}}2_{\mathcal{I}})x + 1_{\mathcal{I}}y + 2_{\mathcal{I}}y - (1_{\mathcal{I}}2_{\mathcal{I}})y \\
&= x + 2_{\mathcal{I}}x - 2_{\mathcal{I}}x + 1_{\mathcal{I}}y + y - 1_{\mathcal{I}}y = x + y = a.
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.6. ***Existência de uma ação envolvente para ações parciais.***

Seja G um grupo que age parcialmente via α sobre uma $\mathbb{K}$-álgebra com unidade $\mathcal{A}$. Então α possui uma ação envolvente β se, e somente se, cada ideal $D_{g\in G}$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra com unidade. Mais ainda, caso a ação envolvente β exista, ela será única, a menos de equivalência.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que exista uma ação envolvente β à ação parcial α; e um $\mathbb{K}$-isomorfismo de álgebras φ de $\mathcal{A}$ em um ideal de $\mathcal{B}$ que nos dá a equivalência correspondente.

Da definição de ação envolvente temos, para cada $g \in G$, que $\varphi(D_g) = \varphi(\mathcal{A}) \cap \beta_g(\varphi(\mathcal{A}))$ é ideal de $\mathcal{B}$ pois $\varphi(\mathcal{A})$ e $\beta_g(\varphi(\mathcal{A}))$ são ideais de $\mathcal{B}$.

É evidente que $\varphi(D_g)$ é uma $\mathbb{K}$-subálgebra de $\mathcal{B}$, pois φ e β_g são $\mathbb{K}$-homomorfismos de álgebras e $\mathcal{A}$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra.

Afirmamos que $\varphi(1_{\mathcal{A}})\beta_g(\varphi(1_{\mathcal{A}})) \in \varphi(\mathcal{A}) \cap \beta_g(\varphi(\mathcal{A}))$ é a unidade de $\varphi(D_g)$.

De fato, seja $y \in \varphi(D_g)$, então $y = \varphi(a) = \beta_g(\varphi(b))$ para algum $a \in \mathcal{A}$ e $b \in \mathcal{A}$. Portanto:

$$\begin{aligned}
(\varphi(1_{\mathcal{A}})\beta_g(\varphi(1_{\mathcal{A}})))y &= (\varphi(1_{\mathcal{A}})\beta_g(\varphi(1_{\mathcal{A}})))\beta_g(\varphi(b)) \\
&= \varphi(1_{\mathcal{A}})(\beta_g(\varphi(1_{\mathcal{A}}))\beta_g(\varphi(b)))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi(1_{\mathcal{A}})(\beta_g(\varphi(1_{\mathcal{A}})\varphi(b))) \\
&= \varphi(1_{\mathcal{A}})\beta_g(\varphi(1_{\mathcal{A}}b)) \\
&= \varphi(1_{\mathcal{A}})\beta_g(\varphi(b)) \\
&= \varphi(1_{\mathcal{A}})\varphi(a) \\
&= \varphi(a) = y.
\end{aligned}
$$

Analogamente $y(\varphi(1_{\mathcal{A}})\beta_g(\varphi(1_{\mathcal{A}}))) = y$. Logo, $\varphi(D_g)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra unitária e isso nos diz que D_g é por si só uma $\mathbb{K}$-álgebra unitária.

($\Leftarrow$) Por hipótese temos que cada $D_{g\in G} \lhd \mathcal{A}$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra com unidade, e como já observado antes, temos que: $\forall g \in G,\ \exists 1_g \in \mathcal{A};\ 1_g\mathcal{A} = D_g = \mathcal{A}1_g$. Isto é, haverá um idempotente central em $\mathcal{A}$ para cada g no grupo G.

Agora, seja $\mathcal{F} = \mathcal{F}(G, \mathcal{A})$ a $\mathbb{K}$-álgebra de todas as funções de G em $\mathcal{A}$, tal que, para quaisquer funções $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ e elementos $g \in G$, $\forall k \in \mathbb{K}$, definimos as operações em $\mathcal{F}$ da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
(f_1 + f_2)(g) &= f_1(g) + f_2(g); \\
(f_1 \cdot f_2)(g) &= f_1(g) \cdot f_2(g); \\
(kf_1)(g) &= kf_1(g);
\end{aligned}
$$

mais ainda, haverá uma unidade $1_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$ tal que:

$$1_{\mathcal{F}}(g) = 1_{\mathcal{A}}.$$

Por conveniência de notação, aqui denotamos $f(g) \equiv f|_g$ tal que $f \in \mathcal{F}$ e $g \in G$.

Na tentativa de definir uma ação β de G sobre $\mathcal{F}$, definimos a seguir:

$$
\begin{aligned}
\beta : G &\to Aut_{\mathbb{K}}(\mathcal{F}) \\
g &\mapsto \beta(g)\ ;
\end{aligned}
$$

e $\beta(g) = \beta_g$ é um automorfismo de $\mathcal{F}$ definido como a seguir $\forall h \in G$:

$$
\begin{aligned}
\beta_g : \mathcal{F} &\to \mathcal{F} \\
f|_h &\mapsto f(g^{-1}h).
\end{aligned}
$$

Observemos que para quaisquer funções $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ e elementos $g, h, j \in G$, $\forall k \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
\beta_g(f_1+f_2)|_h &= (f_1+f_2)(g^{-1}h) = f_1(g^{-1}h) + f_2(g^{-1}h) \\
&= \beta_g(f_1)|_h + \beta_g(f_2)|_h = (\beta_g(f_1)+\beta_g(f_2))|_h \ ; \\
\beta_g(f_1f_2)|_h &= (f_1f_2)(g^{-1}h) = f_1(g^{-1}h)f_2(g^{-1}h) \\
&= \beta_g(f_1)|_h\beta_g(f_2)|_h = (\beta_g(f_1)\beta_g(f_2))|_h \ ; \\
\beta_g(kf_1)|_h &= (kf_1)(g^{-1}h) = k(f_1(g^{-1}h)) \\
&= k(\beta_g(f_1)|_h) = (k\beta_g(f_1))|_h \ ; \\
\beta_{gj}(f_1)|_h &= f_1((gj)^{-1}h) = f_1(j^{-1}g^{-1}h) = f_1(j^{-1}(g^{-1}h)) \\
&= \beta_j(f_1)|_{(g^{-1})h} = \beta_g(\beta_j(f_1))|_h \\
&= (\beta_g \circ \beta_j)(f)|_h = ((\beta_g \circ \beta_j)(f))|_h.
\end{aligned}$$

Com as verificações acima evidenciamos a boa definição do automorfismo, notamos também que como $\beta_g(kf) = k\beta_g(f),\ \forall g \in G,\ \forall k \in \mathbb{K},\ \forall f \in \mathcal{F}$, obviamente $\beta_g(1_\mathcal{F}) = 1_\mathcal{F}$. E ainda por $\beta_{gj} = \beta_g \circ \beta_j,\ \forall g, j \in G$ verificamos que β é uma ação de G sobre $\mathcal{F}$.

Ainda por hipótese temos que $D_{g\in G}$ é álgebra com unidade, então notamos que para quaisquer $g, h \in G$ existe um elemento 1_g1_h que é na verdade o idempotente de $D_g \cap D_h$, e dessa forma, $1_g1_h\mathcal{A} = D_g \cap D_h = \mathcal{A}1_g1_h$.

Agora, se supormos uma ação parcial α, temos a igualdade a seguir garantida por definição $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$, notamos que α_g é isomorfismo, isso nos permite afirmar que:

$$\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h) = 1_g1_{gh}. \tag{5.1}$$

Vejamos que $\forall g \in G,\ D_g \lhd \mathcal{A}$, logo, $\forall a \in \mathcal{A}, a1_g \in D_g$, e definimos uma aplicação $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{F}$ por $\rho(a)|_g = \alpha_{g^{-1}}(a1_g)$.

Observemos que $\rho(a+b) = \rho(a) + \rho(b)$ e que $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$. De fato:

$$\begin{aligned}
\rho(a+b)|_g &= \alpha_{g^{-1}}((a+b)1_g) = \alpha_{g^{-1}}(a1_g + b1_g) \\
&= \alpha_{g^{-1}}(a1_g) + \alpha_{g^{-1}}(b1_g) = \rho(a)|_g + \rho(b)|_g = (\rho(a)+\rho(b))|_g \\
\rho(ab)|_g &= \alpha_{g^{-1}}((ab)1_g) = \alpha_{g^{-1}}((ab)1_g1_g) \\
&= \alpha_{g^{-1}}((a1_g)(b1_g)) = \alpha_{g^{-1}}(a1_g)\alpha_{g^{-1}}(b1_g) \\
&= \rho(a)|_g\rho(b)|_g = (\rho(a)\rho(b))|_g.
\end{aligned}$$

Notemos que ρ configura um homomorfismo, e mais ainda, tomemos $a \in Ker(\rho)$, isto é, $\rho(a) = 0 \Rightarrow \rho(a)|_g = \alpha_{g^{-1}}(a1_g) = 0, \ \forall g \in G$, em particular, se tomarmos $g = 1$, teremos $\alpha_{g^{-1}}(a1_g) = 0 \Rightarrow \alpha_{1^{-1}}(a1_1) = 0 \Rightarrow a = 0$. Garantimos que ρ é um monomorfismo.

Seja k um elemento de $\mathbb{K}$, podemos ver que:

$$k\rho(a)|_g = k(\alpha_{g^{-1}}(a1_g)) = \alpha_{g^{-1}}(k(a1_g)) = \alpha_{g^{-1}}((ka)1_g) = \rho(ka)|_g$$

Pela arbitrariedade do elemento do grupo, temos que $k\rho(a) = \rho(ka)$, e com isso, ρ é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-módulos. Como $\mathcal{A}$ tem unidade por seus idempotentes centrais, $\rho^* : \mathcal{A} \to \rho(\mathcal{A})$ é um isomorfismo.

Com todas assunções tomadas por hipótese, consideraremos uma $\mathbb{K}$-subálgebra $\mathcal{B}$ da álgebra $\mathcal{F}$, tal que:

$$\mathcal{B} = \left\langle \bigcup_{g \in G} \beta_g(\rho(\mathcal{A})) \right\rangle.$$

Chegamos ao nosso objetivo, provar que uma restrição admissível de β é equivalente à ação parcial α. Isto é provar que β é ação envolvente de α. Para não sobrecarregarmos com notações, a partir de agora, manteremos para a restrição admissível a notação β.

Precisamos tão somente verificar as condições que aparecem na Definição 5.3. Como isomorfismo $\overline{\lambda}$ consideraremos no mérito da demonstração $\rho^* \equiv \overline{\lambda}$, e queremos que $\overline{\lambda}(\mathcal{A}) \equiv \rho^*(\mathcal{A}) = \rho(\mathcal{A})$ seja um ideal de $\mathcal{B}$. Já vimos pela Equação 5.1 dentro do contexto dos idempotentes centrais que para quaisquer $g, h \in G, \ \alpha_g(1_{g^{-1}}1_h) = 1_g 1_{gh}$, a partir disso:

$$\begin{aligned}
\alpha_{h^{-1}g}(a1_{(h^{-1}g)^{-1}}) &= \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h}) \\
&= \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h}) \\
&= \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}})\alpha_{h^{-1}g}(1_{g^{-1}h}) \\
&= \alpha_{h^{-1}g}(a)\alpha_{h^{-1}g}(1_{g^{-1}h}) \\
&\overset{(*)}{=} \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a))\alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h})) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a))\alpha_{h^{-1}}(1_g 1_h) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a))\alpha_{h^{-1}}(1_g 1_h) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)1_g 1_h) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)1_h).
\end{aligned}$$

Podemos garantir $(*)$ pelo fato de $a \in D_{g^{-1}}$ e $a1_{g^{-1}h} \in D_{g^{-1}} \cap D_{g^{-1}h}$. Com isso temos:

$$\alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h}) = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)1_h). \tag{5.2}$$

Agora como tese, requeremos que $\rho(\mathcal{A}) \triangleleft \mathcal{B}$. Mas da forma como construimos $\mathcal{B}$, como $\mathbb{K}$-subálgebra de $\mathcal{F}$ gerada através de $\bigcup_{g\in G} \beta_g(\rho(\mathcal{A}))$, tomamos um $x = \rho(b)$ para algum $b \in \mathcal{A}$ e um elemento $y \in \mathcal{B}$ definido por

$$y = \sum_{g_i \in G} \beta_{g_i}(\rho(a_j));\ \ a_j \in \mathcal{A},\ \ \forall i, j \in \{1, 2, \cdots\}.$$

Queremos que $xy \in \rho(\mathcal{A})$ e $yx \in \rho(\mathcal{A})$, mas o somatório e os produtos não serão relevantes, assim como a indexação de ρ no grupo G. É obvio que $\rho(\mathcal{A})$ é subanel de $\mathcal{B}$, por isso verificamos somente a invariância que o caracterizará como ideal.

Demandamos que para qualquer $h \in G$;

$$(\beta_g(\rho(a))\rho(b))|_h \in \rho(\mathcal{A}) \quad \text{e} \quad (\rho(b)\beta_g(\rho(a)))|_h \in \rho(\mathcal{A}).$$

Lembrando que para qualquer função f na $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{F}$ e para quaisquer g e h no grupo G teremos por definição $\beta_g(f|_h) = f(g^{-1}h) = f|_{g^{-1}h}$. Vejamos:

$$\begin{aligned}
(\beta_g(\rho(a))\rho(b))|_h &= \beta_g(\rho(a))|_h\rho(b)|_h = \rho(a)|_{g^{-1}h}\rho(b)|_h \\
&= \alpha_{(g^{-1}h)^{-1}}(a1_{g^{-1}h})\alpha_{h^{-1}}(b1_h) \\
&= \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h})\alpha_{h^{-1}}(b1_h) \\
&= \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h})1_{h^{-1}g}\alpha_{h^{-1}}(b1_h)1_{h^{-1}} \\
&= \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h})1_{h^{-1}g}1_{h^{-1}}\alpha_{h^{-1}}(b1_h) \\
&\overset{(5.1)}{=} \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h})\alpha_{h^{-1}g}(1_{g^{-1}h}1_{g^{-1}})\alpha_{h^{-1}}(b1_h) \\
&= \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h}1_{g^{-1}})\alpha_{h^{-1}}(b1_h) \\
&= \alpha_{h^{-1}g}((a1_{g^{-1}})1_{g^{-1}h})\alpha_{h^{-1}}(b1_h) \\
&\overset{(5.2)}{=} \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a1_{g^{-1}})1_h)\alpha_{h^{-1}}(b1_h) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a1_{g^{-1}})b1_h) = \rho(\alpha_g(a1_{g^{-1}})b)|_h \in \rho(\mathcal{A}).
\end{aligned}$$

Similarmente:

$$(\rho(b)\beta_g(\rho(a)))|_h = \rho(b)|_h\beta_g(\rho(a))|_h = \rho(b)|_h\rho(a)|_{g^{-1}h}$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha_{h^{-1}}(b1_h)\alpha_{(g^{-1}h)^{-1}}(a1_{g^{-1}h}) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(b1_h)\alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h}) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(b1_h)1_{h^{-1}}\alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h})1_{h^{-1}g} \\
&= \alpha_{h^{-1}}(b1_h)\alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h})1_{h^{-1}}1_{h^{-1}g} \\
&\overset{(5.1)}{=} \alpha_{h^{-1}}(b1_h)\alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h})\alpha_{h^{-1}g}(1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h}) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(b1_h)\alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h}1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h}) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(b1_h)\alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h}) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(b1_h)\alpha_{h^{-1}g}((a1_{g^{-1}})1_{g^{-1}h}) \\
&\overset{(5.2)}{=} \alpha_{h^{-1}}(b1_h)\alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a1_{g^{-1}})1_h) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(b1_h\alpha_g(a1_{g^{-1}})) = \alpha_{h^{-1}}(b\alpha_g(a1_{g^{-1}})1_h) \\
&= \rho(b\alpha_g(a1_{g^{-1}}))|_h \in \rho(\mathcal{A}).
\end{aligned}
$$

De toda forma a condição **(iii)** da Definição 5.3 de ação envolvente é claramente garantida.

(ii) Queremos que exista um isomorfismo ρ, qual $\rho \circ \alpha_g(x) = \beta_g \circ \rho(x),\ \ \forall x \in D_{g^{-1}}$. Para $g, h, \in G$ e $a \in D_{g^{-1}}$, temos:

$$\beta_g \circ \rho(a)|_h = \rho(a)|_{g^{-1}h} = \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h}) \overset{(5.2)}{=} \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)1_h) = \rho \circ \alpha_g(a)|_h$$

(i) Na tentativa de mostrar o primeiro item da definição de ação envolvente, haverão $a, b \in \mathcal{A}$ quais $\rho(a) = \beta_g(\rho(b))$, e verificamos as inclusões:

(⊇) Temos que $\rho(a)|_h = \alpha_{h^{-1}}(a1_h)$ assim como $\beta_g(\rho(b))|_h = \rho(b)|_{g^{-1}h} = \alpha_{g^{-1}h}(b1_{g^{-1}h})$, isto é;

$$\alpha_{h^{-1}}(a1_h) = \alpha_{g^{-1}h}(b1_{g^{-1}h});\ \ \forall h \in G \tag{5.3}$$

portanto, se $h = 1$:

$$a = \alpha_{g^{-1}}(b1_{g^{-1}}) \ \ \in D_g. \tag{5.4}$$

Notemos que $a \in D_g$ então $\rho(D_g) \supseteq \rho(\mathcal{A}) \cap \beta_g(\rho(\mathcal{A}))$.

(⊆) Para a inclusão reversa basta tomarmos $b = \alpha_{g^{-1}}(a) \in \mathcal{A}$ que para algum $a \in D_g$, o lado direito da equação 5.3 passa a ser

$$\alpha_{h^{-1}g}(\alpha_{g^{-1}}(a)1_{g^{-1}h}) = \alpha_{h^{-1}}(a1_{g^{-1}h}) = \alpha_{h^{-1}}(a1_h).$$

Assim $\rho(D_g) \subseteq \rho(\mathcal{A}) \cap \beta_g(\rho(\mathcal{A}))$, que prova $\rho(D_g) = \rho(\mathcal{A}) \cap \beta_g(\rho(\mathcal{A}))$. E portanto

verificamos **(i)**.

Acabamos de mostrar a existência da ação envolvente β, falta mostrarmos a unicidade desta ação.

Suponhamos que β' seja outra ação de G sobre uma álgebra $\mathcal{B}'$, que é envolvente à ação α. Seja ρ' uma imersão de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}'$. De acordo com a definição de ação envolvente, é propício definir $\mathcal{B}'$ como a soma de ideais $\beta'_{g\in G}(\rho'(\mathcal{A}))$. Assim $\forall x \in \mathcal{B}',\ x = \sum \beta'_{g_i}(\rho'(a_i))$ com $g_i \in G$ e $a_i \in \mathcal{A}$.

Propomos a aplicação $\lambda : \mathcal{B}' \ni \beta'_g(\rho'(a)) \mapsto \beta_g(\rho(a)) \in \mathcal{B}$, e precisamos mostrar a sua boa definição.

Supondo que $\sum_{i=1}^n \beta'_{g_i}(\rho'(a_i)) = 0$, queremos que $\sum_{i=1}^n \beta_{g_i}(\rho(a_i)) = 0$. E sabemos que para $h \in G$ e $a \in \mathcal{A}$, teremos por suposição:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \beta'_{g_i}(\rho'(a_i))\beta'_h(\rho'(a)) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \beta'_{h^{-1}}\left(\sum_{i=1}^n \beta'_{g_i}(\rho'(a_i))\beta'_h(\rho'(a))\right) = \beta'_{h^{-1}}(0) \\ \Rightarrow \quad & \sum_{i=1}^n \beta'_{h^{-1}g_i}(\rho'(a_i))\rho'(a) = 0. \end{aligned}$$

Como $\rho'(\mathcal{A}) \lhd \mathcal{B}'$; sem perda de generalidade, ao tomarmos qualquer $g_i \in G$ teremos: $\beta'_{h^{-1}g_i}(\rho'(a_i))\rho'(a) \in \beta'_{h^{-1}g_i}(\rho'(\mathcal{A})) \cap \rho'(\mathcal{A})$. E $\beta'_{h^{-1}g_i}(\rho'(\mathcal{A})) \cap \rho'(\mathcal{A}) = \rho'(D_{h^{-1}g_i}) = \rho'(\mathcal{A}1_{h^{-1}g_i}) = \rho'(\mathcal{A})\rho'(1_{h^{-1}g_i})$. Fica claro que $\rho'(1_{h^{-1}g_i})$ é a unidade da álgebra $\rho'(D_{h^{-1}g_i})$. Usando a condição **(ii)** da Definição 5.3 de ação envolvente, teremos:

$$\begin{aligned} \beta'_{h^{-1}g_i}(\rho'(a_i))\rho'(a) &= \beta'_{h^{-1}g_i}(\rho'(a_i))\rho'(1_{h^{-1}g_i})\rho'(a) \\ &= \beta'_{h^{-1}g_i}(\rho'(a_i))(\rho' \circ \alpha_{h^{-1}g_i}(1_{g_i^{-1}h}))\rho'(a) \\ &= \beta'_{h^{-1}g_i}(\rho'(a_i))(\beta'_{h^{-1}g_i} \circ \rho'(1_{g_i^{-1}h}))\rho'(a) \\ &= \beta'_{h^{-1}g_i}(\rho'(a_i))(\beta'_{h^{-1}g_i}(\rho'(1_{g_i^{-1}h})))\rho'(a) \\ &= \beta'_{h^{-1}g_i}(\rho'(a_i 1_{g_i^{-1}h}))\rho'(a) \\ &= \beta'_{h^{-1}g_i} \circ \rho'(a_i 1_{g_i^{-1}h})\rho'(a) \\ &= \rho' \circ \alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})\rho'(a) \\ &= \rho'(\alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h}))\rho'(a) \\ &= \rho'(\alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a). \end{aligned}$$

Analogamente, temos que $\beta_{h^{-1}g_i}(\rho(a_i))\rho(a) = \rho(\alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a)$.

Portanto, $\sum_{i=1}^{n} \beta'_{h^{-1}g_i}(\rho'(a_i))\rho'(a) = \sum_{i=1}^{n} \rho'(\alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a) = 0$ o que implica em $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h}) = 0$.

E por outro lado, $0 = \sum_{i=1}^{n} \rho(\alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{h^{-1}g_i}(\rho(a_i))\rho(a)$, que ao aplicarmos β_h, teremos

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(\rho(a_i))\beta_h(\rho(a)) = 0, \ \ \forall a \in \mathcal{A}. \tag{5.5}$$

Ao considerarmos $\bigcup_{i=1}^{n} \beta_{g_i \in G}(\rho(a_i))$ como conjunto gerador de uma álgebra $\mathcal{B}_1$, vemos que na Equação 5.5 anterior, o primeiro fator anula cada $\beta_h(\rho(\mathcal{A}))$.

Assim, seja a $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{B}_1 = \langle \bigcup_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(\rho(\mathcal{A})) \rangle$, o Lema 5.5 nos garante que $\mathcal{B}_1$ possui unidade $1_{\mathcal{B}_1}$, e decorre que:

$$\mathcal{B}_1 \ni \sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(\rho(a_i)) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(\rho(a_i))1_{\mathcal{B}_1},$$

mas também sabemos que $1_{\mathcal{B}_1}$ é escrito como soma finita de elementos que $\beta_{g_i}(\rho(a_i))$ anula, logo, $\sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(\rho(a_i))1_{\mathcal{B}_1} = 0$. Com isso mostramos a boa definição de $\lambda : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$, pela implicação $\sum_{i=1}^{n} \beta'_{g_i}(\rho'(a_i)) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(\rho(a_i)) = 0$.

Simetricamente à aplicação λ, podemos definir $\lambda' : \mathcal{B} \ni \beta_g(\rho(a)) \mapsto \beta'_g(\rho'(a)) \in \mathcal{B}'$, esta que tem sua boa definição provada analogamente ao que fizemos com a prova da boa definição de λ.

Verificamos a sobrejetividade de λ, mostrando primeiramente que λ é uma aplicação $\mathbb{K}$-linear.

Para $k \in \mathbb{K}$ e $x \in \mathcal{B}'$, escrevemos x como a soma finita $\sum_{i=1}^{n} \beta'_{g_i \in G}(\rho'(a_i))$ e disso:

$$\begin{aligned}
\lambda(kx) &= \lambda\left(k \sum_{i=1}^{n} \beta'_{g_i \in G}(\rho'(a_i))\right) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} k\beta'_{g_i \in G}(\rho'(a_i))\right) \\
&= \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \beta'_{g_i \in G}(k\rho'(a_i))\right) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \beta'_{g_i \in G}(\rho'(ka_i))\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i \in G}(\rho(ka_i)) = k\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i \in G}(\rho(a_i))\right) \\
&= k\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \beta'_{g_i \in G}(\rho'(a_i))\right) = k\lambda(x).
\end{aligned}$$

Sabendo agora que λ é uma aplicação $\mathbb{K}$-linear e sobrejetora. Disso concluimos que para todo $y \in \mathcal{B}$, teremos algum $x \in \mathcal{B}'$ tal que:

$$\lambda(1_{\mathcal{B}'})y = \lambda(1_{\mathcal{B}'})\lambda(x) \overset{(*)}{=} \lambda(1_{\mathcal{B}'}x) = \lambda(x) = y.$$

Portanto, $\lambda(1_{\mathcal{B}'}) = 1_{\mathcal{B}}$.

Consideramos, no passo $(*)$ acima, que λ é uma aplicação multiplicativa. Mas de fato, tomamos $g, h, j \in G$, e sem perda de generalidade, identificamos $\mathcal{A}$ como imagem de ρ e ρ', para que possamos omitir estas aplicações. Dessa forma, basta provar $\lambda(\beta'_g(a)\beta'_h(b)) = \beta_g(a)\beta_h(b)$ em vez de $\lambda(\beta'_g(\rho'(a))\beta'_h(\rho'(b))) = \beta_g(\rho(a))\beta_h(\rho(b))$.

Notamos também que $\mathcal{A} \triangleleft \mathcal{B} \Rightarrow \beta_j(\mathcal{A}) \triangleleft \mathcal{B}$. Portanto, quaisquer que sejam os elementos $a, b \in \mathcal{A}$, teremos que $a\beta_j(b) \in \mathcal{A} \cap \beta_j(\mathcal{A}) = D_j$. Sabemos que a unidade de D_j é 1_j, com isso:

$$a\beta_j(b) = 1_j a\beta_j(b) = \beta_j(\beta_{j^{-1}}(1_j a)b) = \beta_j(\alpha_{j^{-1}}(1_j a)b).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lambda(\beta'_g(a)\beta'_h(b)) &= \lambda(\beta'_h(\alpha_{h^{-1}g}(1_{(h^{-1}g)^{-1}}a)b)) \\
&= \beta_h(\alpha_{h^{-1}g}(1_{(h^{-1}g)^{-1}}a)b) \\
&= \beta_g(\beta_{g^{-1}h}(\alpha_{(g^{-1}h)^{-1}}(1_{g^{-1}h}a)b)) \\
&= \beta_g(a\beta_{g^{-1}h}(b)) \\
&= \beta_g(a)\beta_h(b) \\
&= \lambda(\beta'_g(a))\lambda(\beta'_h(b)).
\end{aligned}$$

Exibimos duas aplicações bem definidas, tais que $\lambda \circ \lambda' = \lambda' \circ \lambda = 1$, e consequentemente λ será um isomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras.

Por último, mas não menos importante, precisamos verificar a equivalência entre β' e β. Isto é, que para todo $g \in G$ e $x \in D_{g^{-1}}$ tenhamos $\beta_g(\lambda(x)) = \lambda(\beta'_g(x))$.

Pelos itens da definição de ações parciais equivalentes:

(i) - $\lambda(D'_g) = D_g, \ \forall g \in G$. Notemos que pela injetividade de λ,

$$\lambda(D'_g) = \lambda(\rho'(\mathcal{A}) \cap \beta'_g(\rho'(\mathcal{A}))) = \lambda(\rho'(\mathcal{A})) \cap \lambda(\beta'_g(\rho'(\mathcal{A}))).$$

Temos que $\lambda(\beta'_g(\rho(\mathcal{A}))) = \beta_g(\rho(\mathcal{A}))$. Mais ainda $\lambda(\rho'(\mathcal{A})) = \rho(\mathcal{A})$,

$$\lambda(\rho'(\mathcal{A})) \cap \lambda(\beta'_g(\rho'(\mathcal{A}))) = \rho(\mathcal{A}) \cap \beta_g(\rho(\mathcal{A})).$$

(ii) - Tome $x = \beta'_{g^{-1}}(\rho'(a)) \in D'_g$ para algum $a \in \mathcal{A}$, dessa forma:

$$\begin{aligned}
\beta_g(\lambda(x)) &= \beta_g(\lambda(\beta'_{g^{-1}}(\rho'(a)))) \\
&= \beta_g(\lambda(\beta'_{g^{-1}}(\rho'(a)))) = \beta_g(\beta_{g^{-1}}(\rho(a)))
\end{aligned}$$

$$= \rho(a) = \lambda(\rho'(a)) = \lambda(\beta'_g(\beta'_{g^{-1}}(\rho'(a))))$$
$$= \lambda(\beta'_g(x)).$$

□

CAPÍTULO 6

Considerações finais

Os capítulos 4 e 5 deste trabalho apresentam os resultados dos objetivos principais referidos na introdução, foi possível demonstrar a existência de ação envolvente para uma determinada ação parcial de grupo, e antes disso caracterizamos a associatividade do produto cruzado por ações parciais. Para tal feito foi preciso nos apropriar de técnicas de demonstração comuns em problemas algébricos de estruturas, permitindo a busca de provas alternativas e facilitando a fluidez da arquitetação algébrica matemática. O assunto deste trabalho é raramente comentado na graduação, sendo esta pesquisa um dos motivadores para o prosseguimento dos estudos a nível de pós-graduação em Matemática Pura; uma vez que o aluno do curso de Licenciatura em Matemática, por vezes se sente distante dessa possibilidade, partindo do pressuposto que deparar-se-ia com muitas dificuldades devido a carência de disciplinas de álgebra abstrata na grade curricular de seu curso.

Um enriquecimento de conhecimentos matemáticos aconteceu com o estudo das características de produtos cruzados via ações parciais de grupo lidado neste trabalho. Percorrendo leituras, para a melhor compreensão do tema, foi possível conhecer a estrutura generalizada de ação parcial, e mais especificamente a ação parcial de grupos desde suas raízes até os mais recentes trabalhos. O conteúdo das pesquisas feitas no decorrer desta obra potencializou a compreensão de tópicos mais avançados na teoria de módulos, e outros assuntos específicos como a teoria de categorias e um aprofundamento na teoria de anéis. A cada passo de decifração das definições e assuntos mencionados no corpo desta produção, aconteceu-nos um considerável amadurecimento matemático, o que nos aproximou de mais inquietações, promovendo curio-

sidades sobre os possíveis "silogismos"que estão sendo desenvolvidos em grupos de pesquisa de vários países; entre o que já se conhece relacionado às ações de grupo, e a recente estrutura definida de ação parcial de grupo. Foi possível aglomerar com substancialidade conhecimentos que contribuem para um entrosamento no meio científico e profissional matemático.

Com a finalização do material encorpado nas partes desta dissertação foi possível dar início a leitura de novos artigos, que vem a tratar das representações parciais de álgebras de grupo e de álgebras de matrizes, percorrendo a definição e aspectos das álgebras de grupóides como também suas notações via grafos associados. Embasado no que já foi estudado sobre teoria de categorias, foi possível inclusive estudar a teoria de morita (contexto de morita) para *skew* anéis de grupo parciais.

Referências

BATISTA, E. Partial actions: What they are and why we care. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin*, v. 24, n. 1, p. 35–71, mar 2017. URL: arXiv:1604.06393. Citado na página 16.

BERBERIAN, S. K. *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory*. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 1975. v. 015. (Graduate Texts in Mathematics, v. 015). ISBN 3-540-90080-2, 0-3879-0080-X. Nenhuma citação no texto.

DOKUCHAEV, M.; EXEL, R. Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations. *Transactions of The American Mathematical Society*, v. 357, n. 5, p. 1931–1952, jul 2004. URL: arXiv:math/0212056. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.

DOKUCHAEV, M.; EXEL, R.; PICCIONE, P. Partial representations and partial group algebras. *Journal of Algebra*, v. 226, n. 1, p. 505–532, apr 2000. DOI <https://doi.org/10.1006/jabr.1999.824>. Citado na página 16.

DOKUCHAEV, M.; FERRERO, M.; PAQUES, A. Partial actions and galois theory. *Journal of Pure and Applied Algebra*, v. 208, n. 1, p. 77–87, jan 2007. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2005.11.009>. Citado na página 16.

EXEL, R. Circle actions on C^*-algebras, partial automorphisms and a generalized pimsner-voiculescu exact sequence. *Journal of Functional Analysis*, v. 122, n. 2, p. 361–401, jun 1994. URL: https://arxiv.org/abs/funct-an/9211001. Citado na página 15.

FERRERO, M. Partial actions of groups on algebras, a survey. *São Paulo Journal of Mathematical Sciences*, v. 3, n. 1, p. 95–107, jun 2009. DOI <http://dx.doi.org/10.11606/issn.2316-9028.v3i1p95-107>. Citado na página 16.

FERRERO, M.; LAZZARIN, J. Partial actions and partial skew group rings. *Journal of Algebra*, v. 319, n. 12, p. 5247–5264, jun 2008. DOI <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2007.12.009>. Citado na página 16.

FLORES, D. *Ação de Grupóides sobre Álgebras: Teoremas de Estrutura*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS - PPG-Mat, 2011. Citado na página 16.

FREITAS, D. *Extensões Galois-Azumaya Hopf Parciais*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS - PPG-Mat, 2010. Citado na página 16.

FREITAS, D.; PAQUES, A. On partial galois azumaya extensions. *Algebra and Discrete Mathematics*, v. 11, n. 2, p. 64–77, apr/jun 2011. URL: http://adm.luguniv.edu.ua/downloads/issues/2011/N2/adm-n2(2011)-4.pdf. Citado na página 16.

JACOBSON, N. *Basic Algebra*. 2. ed. [S.l.]: Dover Publications, 1985. v. 1. ISBN 0-7167-1480-9, 9780-7167-1480-4. Citado na página 17.

JACOBSON, N. *Basic Algebra II*. 2. ed. [S.l.]: Dover Publications, 2009. v. 2. ISBN 0-4864-7187-X, 9780-7167-1933-5, 9780-4864-7187-7, 0-7167-1933-9. Citado na página 17.

KöNIG, S.; SLUNGAARD, I. H.; XI, C. Double centralizer properties, dominant dimension, and tilting modules. *Journal of Algebra*, v. 240, n. 1, p. 393–412, jun 2001. DOI <https://doi.org/10.1006/jabr.2000.8726>. Citado na página 16.

LAM, T. Y. *A first course in noncommutative rings*. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 2001. v. 131. (Graduate Texts in Mathematics, v. 131). ISBN 0-387-97523-3, 3-540-97523-3. Citado na página 17.

LANG, S. *Algebra*. 3. ed. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 2002. v. 211. (Graduate Texts in Mathematics, v. 211). ISBN 9780-3879-5385-4, 0-3879-5385-X. Nenhuma citação no texto.

LANG, S. *Undergraduate Algebra*. 3. ed. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 2005. v. 009. (Undergraduate texts in mathematics, v. 009). ISBN 9780387220253,0387220259. Nenhuma citação no texto.

PAQUES, A.; RODRIGUES, V.; SANT'ANA, A. Galois correspondences for partial galois azumaya extensions. *Journal of Algebra and Its Applications*, v. 10, n. 5, p. 835–847, out 2011. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219498811004999>. Citado na página 16.

PASSMAN, D. S. *Group Rings, Crossed Products and Galois Theory*. [S.l.]: AMS, 1986. (CBMS Regional Conference Series in Mathematics/Conference Board of the Mathematical Sciences, 64). ISSN 0160-7642. ISBN 0-8218-0714-5. Citado na página 16.

PASSMAN, D. S. Skew group rings and free rings. *Journal of Algebra*, v. 131, n. 2, p. 502–512, jun 1990. DOI <https://doi.org/10.1016/0021-8693(90)90191-P>. Citado na página 16.

APÊNDICE A

Introdução à Teoria de Módulos

A.1 Módulos

Definição A.1.1. *Dado um anel $(R, +, *)$, não necessariamente comutativo, supondo ainda que o anel R possua unidade 1_R, definimos um R-**módulo** M (à esquerda) pelo grupo abeliano $(M, +)$ comumente escrito com a notação aditiva, munido ainda da operação binária definida por:*

$$\cdot : R \times M \ni (r, m) \to r \cdot m \in M;$$

chamada de multiplicação escalar ($r \cdot m = rm$), operação que satisfaz os seguintes axiomas, ou propriedades, para quaisquer $r, r_1, r_2 \in R$ e $m, m_1, m_2 \in M$:

M1. $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$;

M2. $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$;

M3. $(r_1 * r_2)m = r_1(r_2m)$;

M4. $1_Rm = m$.

***Observação**: R-módulos à direita são definidos de forma análoga com a operação binária à direita ($M \times R \to M$), mudando os axiomas de acordo.*

Seguem ainda algumas observações:

1ª. Eventualmente o anel R não precisa ter unidade, então omite-se o axioma ***M4.*** nesse caso;

2ª. Em alguns casos precisamos de um módulo simultaneamente à esquerda e à direita. Nesse caso definimos sobre um anel R, um R-**bimódulo** M que satisfaça o axioma extra $(r_1 m)r_2 = r_1(mr_2);\ \forall r, r_1, r_2 \in R, \forall m \in M$; nos anéis comutativos, qualquer módulo M de A, é um bimódulo quando definimos $rm = mr$;

3ª. Sejam R e R' dois anéis, e M um R-módulo à esquerda que é também um R'-módulo à direita, dizemos que M é um (R, R')-bimódulo;

4ª. Qualquer R-módulo à esquerda é naturalmente um R^{op}-módulo à direita. Como na primeira observação, verificamos apenas o axioma ***M3.***.

Definição A.1.2. *Um **submódulo** de um R-módulo M é um subgrupo aditivo N que é também fechdo sob a multiplicação escalar, isto é, $rn \in N$ para quaisquer $r \in R$ e $n \in N$. Escrevemos $N \leq M$ para denotar que N é um submódulo de M.*

Lema A.1.3. *Se M é um R-módulo e N um subconjunto não vazio de M, então N é um R-submódulo de M se, e somente se, $r_1 n_1 + r_2 n_2 \in N$ para quaisquer $n_1, n_2 \in N$ e $r_1, r_2 \in R$.*

Lema A.1.4. *Sejam M um R-módulo e $\{N_i\}_{i \in I \subseteq \mathbb{N}}$ uma família de submódulos de M. Então $N = \bigcap_{i \in I} N_i$ é um submódulo de M.*

Definição A.1.5. *Sejam R um anel e M_1, M_2 dois R-módulos. Um **homomorfismo de R-módulos** é uma aplicação $\phi : M_1 \to M_2$, tal que, para quaisquer $r \in R$ e $m_1, m_2 \in M_1$ satisfaz:*

(i) $\phi(m_1 + m_2) = \phi(m_1) + \phi(m_2)$;

(ii) $\phi(rm_1) = r\phi(m_1)$.

De forma resumida: $\phi(rm_1 + m_2) = r\phi(m_1) + \phi(m_2)$.

Proposição A.1.6. *Seja $\phi : M_1 \to M_2$ é um homomorfismo de R-módulos.*

Então $Ker(\phi) \leq M_1$ e $Im(\phi) \leq M_2$.

Quando ϕ for monomorfismo e epimorfismo simultâneamente, dizemos que ϕ é um isomorfismo de R-módulos.

Definição A.1.7. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Então um $\mathbb{K}$-módulo V é dito um **espaço vetorial** sobre $\mathbb{K}$. Sejam V_1 e V_2, espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$, isto é, $\mathbb{K}$-módulos, então uma transformação linear de V_1 em V_2 é um homomorfismo de $\mathbb{K}$-módulos.*

Proposição A.1.8. *Se e é um idempotente central de R (isto é, $e^2 = e$ e $er = re$ para todo $r \in R$), e M é um R-módulo à esquerda, então*

$$M \cong e \cdot M \bigoplus\nolimits_R (1_R - e) \cdot M.$$

Definição A.1.9. *Dado um anel R e um R-módulo M, para qualquer $m \in M$ podemos definir uma aplicação que chamamos de **multiplicação à direita sobre** R, tomando-o como módulo sobre si mesmo:*

$$\begin{aligned} f_m : R &\to M \\ r &\mapsto rm. \end{aligned}$$

Claramente $f_m(R) = Rm := \{rm;\ r \in R\}$.

*O **anulador à esquerda** de $m \in M$ em R, denotado por $\ell.Ann_R(m)$ é definido pelo núcleo $Ker(f_m)$, ou de forma equivalente:*

$$\ell.Ann_R(m) = \{r \in R;\ rm = 0\}.$$

*Analogamente, tomamos ${}_mf$ a multiplicação à esquerda, e definimos **anulador à direita** como sendo $Ker({}_mf)$.*

*Denotamos por $Ann_R(M)$ o anulador à direita ou à esquerda para todo elemento de M. Quando $Ann_R(M) = \{0\}$ então chamamos M de R-**módulo fiel**.*

Por definição cada módulo é a priori um grupo abeliano, então de forma análoga à teoria de grupos, onde qualquer subgrupo de um grupo abeliano é um subgrupo normal, definimos **módulo quociente** de forma usual, através do submódulo $N \leq M$.

Temos em $M/N = \{m + N :\ \ m \in M\}$ uma estrutura de módulo, uma vez que os módulos são primeiramente grupos abelianos. Há então naturalmente um epimorfismo f:

$$\begin{aligned} f : M &\to M/N \\ m &\mapsto m + N. \end{aligned}$$

De forma clara $Ker(f) = N$, com isso afirmamos que *todo submódulo é núcleo de um epimorfismo conveniente*. Assim, dada uma aplicação $f : M \to N$ cujo núcleo contém um submódulo $K \leq M$, podemos definir uma segunda aplicação:

$$\overline{f} : M/K \ni (m + k) \mapsto f(m) \in Im(f) \subseteq N\ .$$

Então $Ker(\overline{f}) = {}^{Ker(f)}/_{K}$ com isso $\overline{f}({}^{M}/_{K}) = f(M)$. Enunciamos os teoremas de isomorfismo de Noether a seguir.

Teorema A.1.10. ***Teoremas de Isomorfismo de Noether***

Sejam M e N módulos sobre um anel R. Seja ainda $f : M \to N$ um homomorfismo de R-módulos. E sejam também K e P submódulos de M tais que $P \subseteq K$. Então:

NOETHER I. ${}^{M}\Big/_{Ker(f)} \cong Im(f)$;

NOETHER II. ${}^{(K+P)}/_{P} \cong {}^{K}\Big/_{(K \cap P)}$;

NOETHER III. ${}^{M}/_{K} \cong \left({}^{M}/_{P}\right)\Big/\left({}^{K}/_{P}\right)$.

Observação A.1.11. ***Teorema da correspondência***

Como correspondência aos teoremas anteriores, temos que:

Dados um R-módulo M, $N \leq M$, e a projeção canônica $\pi : M \to {}^{M}/_{N}$, com P e N semelhantes ao definido no Teorema A.1.10 anterior; então a função $P \to {}^{P}/_{N}$ define uma bijeção entre o conjunto de todos submódulos de M que contêm N e o conjunto de todos submóduos de ${}^{M}/_{N}$.

A.2 Submódulos gerados e sequências exatas

Definição A.2.1. *Se S é um subconjunto de um R-módulo M, então $\langle S \rangle$ será definido como a* ***intersecção dos submóduos de*** *M* ***que contêm*** *S. Este é chamado então de* ***submódulo de*** *M* ***gerado por*** *S, enquanto os elementos de S são chamados de geradores de $\langle S \rangle$.*

Da teoria de grupos, temos uma implicação direta sobre a Definição A.2.1 anterior; $\langle S \rangle$ é submódulo de M que contém S e está contido em todos submódulos de M que contêm S, isto é, o menor submódulo de M que contém S.

Lema A.2.2. *Sejam M um R-módulo e $S \subseteq M$. Caso $S = \varnothing$ então $\langle S \rangle = \{0\}$, caso contrário, isto é, $S \neq \varnothing$, então temos*

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{1 \leq i \leq n} r_i s_i ; n \in \mathbb{N},\ r_i \in R,\ s_i \in S \right\}.$$

Definição A.2.3. *Dizemos que o R-módulo M é* ***finitamente gerado*** *(usaremos a abreviação* ***f.g.****) se $M = \langle S \rangle$ para algum subconjunto finito S de M. Dizemos também que M é* ***cíclico*** *se $M = \langle m \rangle$ para algum elemento $m \in M$.*

Definição A.2.4. *Seja $\{M_i\}_{i\in I\subseteq\mathbb{N}}$ uma família finita de R-módulos. O **produto cartesiano de módulos** desta família é um conjunto $M_1 \times \cdots \times M_n$ quando $\#(I) = n$, dado em R-módulos pelas seguintes operações:*

$$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + x_1, \cdots, x_n + y_n);$$
$$r(x_1, \cdots, x_n) = (rx_1, \cdots, rx_n).$$

*Definimos a **soma direta** de $\{M_i\}$ como sendo o conjunto M de n-tuplas $(m_1, m_2, ..., m_n)$ com respeito às operações acima, onde cada m_i pertence ao módulo M_i. Denotamos a soma direta por $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$, ou $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$.*

Desse modo $\bigoplus_{i\in I} M_i$ tem estrutura de R-módulo; em outras palavras, é um submódulo de $\prod_{i\in I} M_i$ (produto direto dos M_i's grupos abelianos) formado pelos elementos $\{m_i\}_{i\in I}$ dos quais apenas uma quantidade finita dos m_i's é não nulo.

Teorema A.2.5. *Seja M um R-módulo, e seja ainda $\{M_i\}_{\substack{1\leq i\leq n\\ n\in\mathbb{N}}}$ uma família de submódulos de M tais que:*

(i) $M = M_1 + \cdots + M_n$*; e*

(ii) $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$ *e* $j \neq i$; $M_i \cap \sum M_j = \{0\}$.

Então $M \cong M_1 \bigoplus \cdots \bigoplus M_n$.

Definição A.2.6. *Seja M um R-módulo e $M_1 \leq M$. Dizemos que M_1 é um **somando direto** de M, ou é **complemento em** M, se há um submódulo $M_2 \leq M$ tal que*

$$M \cong M_1 \bigoplus M_2 \ .$$

Definição A.2.7. *Seja R um anel. Uma sequência de R-módulos e aplicações*

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

*é dita exata em M_i se $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$. A sequência é dita **sequência exata** se for exata em cada M_i.*

Proposição A.2.8. ***Casos particulares de sequências exatas***

(i) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ *é exata se, e somente se, f for monomorfismo;*

(ii) $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ *é exata se, e somente se, f for epimorfismo;*

(iii) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ *é exata se, e somente se,* f *for um isomorfismo;*

(iv) A sequência

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \ ; \tag{A.1}$$

é exata se, e somente se, f *é monomorfismo,* g *é epimorfismo, e* $Im(f) = Ker(g)$.

Definição A.2.9. *Definimos:*

(i) Por NOETHER I. $C \cong {}^{B}\big/_{Im(f)}$, *chamamos* ${}^{B}\big/_{Im(f)}$ *de* ***conúcleo*** *e denotamos por* $Coker(f)$;

(ii) A sequência (A.1), se exata, é dita ***sequência exata curta****;*

(iii) Dizemos que uma ***sequência exata cinde*** *se a sequência (A.1) for exata e* $Im(f) = Ker(g)$ *for somando direto de* B.

Teorema A.2.10. *Se* $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$ ***(*)*** *é uma sequência exata curta de* R*-módulos, então os itens a seguir são equivalentes:*

(i) Existe um homomorfismo $\alpha : M \to M_1$ *tal que* $\alpha \circ f = Id_{M_1}$;

(ii) Existe um homomorfismo $\beta : M_2 \to M$ *tal que* $g \circ \beta = Id_{M_2}$;

(iii) A sequência exata ***(*)*** *cinde. Nesse caso:*

$$\begin{aligned} M &\cong Im(f) \bigoplus Ker(\alpha) \\ &\cong Ker(g) \bigoplus Im(\beta) \\ &\cong M_1 \bigoplus M_2. \end{aligned}$$

Os homomorfismos α *e* β *são ditos divisores da sequência exata.*

Definição A.2.11. *O* ***conjunto de todos homomorfismos*** *de* R*-módulos, de* M_1 *em* M_2*, é denotado por* $Hom_R(M_1, M_2)$. *Quando* $M := M_1 = M_2$*, os homomorfismos passam a se chamar* ***endomorfismos*** *e escrevemos comumente* $End_R(M)$. *Se todo elemento* $f \in End_R(M)$ *for invertível, chamamos* f *de* ***automorfismo*** *e denotamos por* $Aut_R(M)$.

Proposição A.2.12. *Sejam* M, N *dois* R*-módulos à esquerda quaisquer,* $Hom_R(M, N)$ *é um grupo abeliano.*

A.3 Módulos Livres

Definição A.3.1. *Seja R um anel e M um R-módulo. Um subconjunto de M, $S \subseteq M$ é dito ser R-**linearmente dependente** se existem $x_1, \cdots, x_n$ dois a dois distintos em S e elementos $r_1, \cdots, r_n$ de R nem todos nulos, tais que*

$$r_1 x_1 + \cdots r_n x_n = 0 \ .$$

*Um conjunto que não é R-linearmente dependente é dito R-**linearmente independente**.*

Definição A.3.2. *Seja M um R-módulo. Um subconjunto S de M é uma **base** de M se S gera M como um R-módulo e se S é R-linearmente independente. Isto é, $S \subseteq M$ é uma base se, e somente se, $M = \{0\} \Leftrightarrow S = \varnothing$ ou se $M \neq \{0\}$ e valem:*

(i) $\forall m \in M$, m pode ser escrito como combinação linear de elementos de S e R;

(ii) sempre que tivermos a equação $r_1 s_1 + \cdots r_n s_n = 0$, com $s_i \in S$ todos distintos e $r_i \in R$, então $r_i = 0$ para qualquer indices i.

Definição A.3.3. *Um R-módulo M é livre se possui uma base. Chamamos M de R-**módulo livre** nesse caso.*

Teorema A.3.4. ***Propriedade fundamental de módulos livres***

Seja M um R-módulo livre com base S, seja também N um R-módulo qualquer, se tomarmos $h : S \to N$ uma função qualquer. Então existe um único $f \in Hom_R(M, N)$ tal que $f|_S = h$. Mais ainda, se $h(S)$ é uma base de N, então f é isomorfismo.

Corolário A.3.5. *Dois módulos livres, com bases possuindo mesma cardinalidade são idênticos a menos de isomorfismo.*

APÊNDICE B

Álgebras semiprimas

B.1 $\mathbb{K}-$álgebras

Definição B.1.1. *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo, e $(\mathcal{A}, +, *)$ um $\mathbb{K}$-módulo (espaço vetorial). Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma $\mathbb{K}$-**álgebra** se existir uma aplicação bilinear $\cdot$ entre o produto direto $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ definido por $\cdot(a_1, a_2) = a_1 a_2$ que satisfaça $\forall\, a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{A},\ \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ as seguintes condições:*

(i) $a_1(a_2 a_3) = (a_1 a_2)a_3$;

(ii) $a_1(a_2 + a_3) = a_1 a_2 + a_1 a_3$;

(iii) $(k_1 k_2)(a_1 a_2) = (k_1 a_1)(k_2 a_2)$.

Uma outra definição de $\mathbb{K}$-álgebra é dada a seguir:

Definição B.1.2. *Seja $\mathbb{K}$ um anel comutativo. Uma $\mathbb{K}$-**álgebra** $\mathcal{A}$ é um anel tal que $\mathcal{A}$ é um $\mathbb{K}$-módulo à esquerda (e à direita), qual $\forall k \in \mathbb{K}, \forall a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ temos:*

$$k(a_1 a_2) = (ka_1)a_2 = a_1(ka_2).$$

Caso o anel $\mathbb{K}$ tenha unidade, a $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{A}$ é o $\mathbb{K}$-módulo unitário. Uma $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{A}$, se enquanto anel for anel de divisão, então chamamos $\mathcal{A}$ de álgebra de divisão.

Proposição B.1.3. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo e M um $\mathbb{K}$-módulo. Então $\mathcal{A} = End_{\mathbb{K}}(M)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra.*

Proposição B.1.4. *Todo anel comutativo $\mathbb{K}$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra.*

Definição B.1.5. *Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra, um subanel $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ é dito $\mathbb{K}$-**subálgebra** de $\mathcal{A}$ se $\mathcal{A}'$ é por si uma $\mathbb{K}$-álgebra com as mesmas operações de $\mathcal{A}$.*

Definição B.1.6. *Um **homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras** $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ é um homomorfismo de anéis e de $\mathbb{K}$-módulos tal que $f(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{A}'}$, se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ possuirem unidades $1_{\mathcal{A}}$ e $1_{\mathcal{A}'}$ respectivamente.*

Observação B.1.7. *Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra com unidade e $I \lhd \mathcal{A}$. Então I é uma $\mathbb{K}$-subálgebra de $\mathcal{A}$.*

Definição B.1.8. *Um ideal I numa $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{A}$ é dito **ideal primo** se $I \neq \mathcal{A}$ e, para quaisquer ideais $I_1, I_2 \subseteq \mathcal{A}$, temos que se $I_1 I_2 \subseteq I$, então $I_1 \subseteq I$ ou $I_2 \subseteq I$. Em outras palavras, o ideal $I \subsetneq \mathcal{A}$ é primo se $\forall a, b \in \mathcal{A}$, $a\mathcal{A}b \subseteq I$ implica em $a \in I$ ou $b \in I$.*

*Dizemos que uma $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{A}$ é $\mathbb{K}$-**álgebra prima** se o seu ideal zero é primo.*

Definição B.1.9. *Seja $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{K}$-álgebra. Chamamos um ideal I de $\mathcal{A}$ de **ideal semiprimo** se para qualquer ideal J de $\mathcal{A}$, $J^2 \subseteq I$ implica o fato de $J \subseteq I$ (Por esta definição, todo ideal primo é a priori um ideal semiprimo). Em particular, se I é um ideal semiprimo, então $\forall a \in I$ temos que a satisfaz uma das seguintes condições:*

(i) Se $a^n \in I$ para algum inteiro positivo n, então $a \in I$;

(ii) Se $a \in \mathcal{A}$ mas $a \notin I$, então $\forall n \in \mathbb{N}$ temos que $a^n \notin I$.

*Dizemos que uma $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{A}$ é $\mathbb{K}$-**álgebra semiprima** se o seu ideal zero é semiprimo.*

Definição B.1.10. *Sejam G um grupo multiplicativo e $\mathbb{K}$ um corpo. Definimos por **álgebra de grupo**, e denotamos por $\mathbb{K}G$ o $\mathbb{K}$-módulo (livre) cuja base é o grupo G. Cada elemento da álgebra de grupo tem uma expressão única, de forma $\sum a_g g$, onde o somatório é indexado pelos tantos elementos $g \in G$, e $a_g \in \mathbb{K}$ (em cada combinação linear temos um número finito de a_g's não nulos).*

Sejam dois elementos quaisquer $g, h \in G$, tomamos $x, y \in \mathbb{K}G$ de modo $x = \sum_{g\in G} a_g g$ e $y = \sum_{h\in G} b_h h$. Assumimos a operação produto entre x e y como sendo a extensão por linearidade do produto no grupo, definimos:

$$x \cdot y = \left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left(\sum_{h\in G} b_h h\right) = \sum_{\ell\in G}\left(\sum_{gh=\ell} a_g b_h\right)\ell \ .$$

De fato a operação como definida é uma operação bilinear associativa e com elemento neutro, vejamos:

$$\begin{aligned}
(\alpha x_1 + \beta x_2)y &= \left(\alpha\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) + \beta\left(\sum_{g\in G} b_g g\right)\right)\left(\sum_{h\in G} c_h h\right)\\
&= \left(\left(\sum_{g\in G} \alpha a_g g\right) + \left(\sum_{g\in G} \beta b_g g\right)\right)\left(\sum_{h\in G} c_h h\right)\\
&= \left(\sum_{g\in G} \alpha a_g g + \beta b_g g\right)\left(\sum_{h\in G} c_h h\right)\\
&= \left(\sum_{g\in G} (\alpha a_g + \beta b_g) g\right)\left(\sum_{h\in G} c_h h\right)\\
&= \sum_{\ell\in G}\left(\sum_{gh=\ell} (\alpha a_g + \beta b_g)c_h\right)\ell\\
&= \sum_{\ell\in G}\left(\left(\sum_{gh=\ell} \alpha a_g c_h\right)\ell + \left(\sum_{gh=\ell} \beta b_g c_h\right)\ell\right)\\
&= \sum_{\ell\in G}\left(\sum_{gh=\ell} \alpha a_g c_h\right)\ell + \sum_{\ell\in G}\left(\sum_{gh=\ell} \beta b_g c_h\right)\ell\\
&= \alpha\sum_{\ell\in G}\left(\sum_{gh=\ell} a_g c_h\right)\ell + \beta\sum_{\ell\in G}\left(\sum_{gh=\ell} b_g c_h\right)\ell\\
&= \alpha\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left(\sum_{h\in G} c_h h\right) + \beta\left(\sum_{g\in G} b_g g\right)\left(\sum_{h\in G} c_h h\right)\\
&= \alpha x_1 y + \beta x_2 y.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
x(\alpha y_1 + \beta y_2) &= \left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left(\alpha\left(\sum_{h\in G} b_h h\right) + \beta\left(\sum_{h\in G} c_h h\right)\right)\\
&= \left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left(\left(\sum_{h\in G} \alpha b_h h\right) + \left(\sum_{h\in G} \beta c_h h\right)\right)\\
&= \left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left(\sum_{h\in G} \alpha b_h h + \beta c_h h\right)\\
&= \left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left(\sum_{h\in G} (\alpha b_h + \beta c_h) h\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\ell\in G}\left(\sum_{gh=\ell} a_g(\alpha b_h + \beta c_h)\right)\ell \\
&= \sum_{\ell\in G}\left(\sum_{gh=\ell} a_g\alpha b_h\right)\ell + \sum_{\ell\in G}\left(\sum_{gh=\ell} a_g\beta c_h\right)\ell \\
&= \alpha\sum_{\ell\in G}\left(\sum_{gh=\ell} a_g b_h\right)\ell + \beta\sum_{\ell\in G}\left(\sum_{gh=\ell} a_g c_h\right)\ell \\
&= \alpha\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left(\sum_{h\in G} b_h h\right) + \beta\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left(\sum_{h\in G} c_h h\right) \\
&= \alpha xy_1 + \beta xy_2.
\end{aligned}
$$

E a associatividade:

$$
\begin{aligned}
x(yz) &= \left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left[\left(\sum_{h\in G} b_h h\right)\left(\sum_{\ell\in G} c_\ell \ell\right)\right] \\
&= \left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left[\sum_{\ell'\in G}\left(\sum_{h\ell=\ell'} b_h c_\ell\right)\ell'\right] \\
&= \sum_{\ell''\in G}\left[\sum_{g\ell'=\ell''} a_g\left(\sum_{h\ell=\ell'} b_h c_\ell\right)\right]\ell'' \\
&= \sum_{\ell''\in G}\left(\sum_{g(h\ell)=\ell''} a_g(b_h c_\ell)\right)\ell'' \\
&= \sum_{\ell''\in G}\left(\sum_{(gh)\ell=\ell''} (a_g b_h)c_\ell\right)\ell'' \\
&= \sum_{\ell''\in G}\left[\sum_{k\ell=\ell''}\left(\sum_{gh=k} a_g b_h\right)c_\ell\right]\ell'' \\
&= \left[\sum_{k\in G}\left(\sum_{gh=k} a_g b_h\right)k\right]\left(\sum_{\ell\in G} c_\ell\ell\right) \\
&= \left[\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left(\sum_{h\in G} b_h h\right)\right]\left(\sum_{\ell\in G} c_\ell\ell\right) \\
&= (xy)z.
\end{aligned}
$$

Garantimos a existência da identidade da álgebra de grupo ao tomarmos $1_{\mathbb{K}G} = 1_{\mathbb{K}}1_G$:

$$
1_{\mathbb{K}}1_G(x) = 1_{\mathbb{K}}1_G\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{g\in G}(1_{\mathbb{K}}1_G a_g g) \\
&= \sum_{g\in G}(1_{\mathbb{K}}a_g 1_G g) = \sum_{g\in G} a_g g = x; \\
x(1_{\mathbb{K}}1_G) &= \left(\sum_{g\in G} a_g g\right) 1_{\mathbb{K}}1_G \\
&= \sum_{g\in G}(a_g g 1_{\mathbb{K}}1_G) \\
&= \sum_{g\in G}(a_g 1_{\mathbb{K}} g 1_G) = \sum_{g\in G} a_g g = x \ .
\end{aligned}
$$