UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE – FURG

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA – IMEF

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PROPOSTA PEDAGÓGICA: A COMUNICAÇÃO ESTABELECIDA ENTRE GRÁFICOS E OS PROCESSOS COGNITIVOS ANALÍTICOS DA MATEMÁTICA

Aline Manuela Klein de Almeida

Rio Grande, RS

Dezembro de 2023

Aline Manuela Klein de Almeida

PROPOSTA PEDAGÓGICA: A COMUNICAÇÃO ESTABELECIDA ENTRE GRÁFICOS E OS PROCESSOS COGNITIVOS ANALÍTICOS DA MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso II submetido por Aline Manuela Klein de Almeida como requisito parcial para obtenção do grau de licenciada, pelo Curso Matemática - Licenciatura junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Orientadora: Profª. Drª. Catia Maria dos Santos Machado

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Dezembro, 2023

Universidade Federal do Rio Grande – FURG
Instituto de Matemática, Estatística e Física
Curso de Licenciatura em Matemática
Av. Itália km 8 Bairro Carreiros
Rio Grande-RS CEP: 96.203-900 Fone (53)3293.5411
e-mail: imef@furg.br Sítio: www.imef.furg.br

Ata de Defesa de Monografia

No décimo quinto dia do mês de dezembro de 2023, às 14h40min, na sala 2107, pavilhão 2, foi realizada a defesa do Trabalho de Conclusão de Curso da acadêmica **Aline Manuela Klein de Almeida** intitulada **Proposta Pedagógica: A Comunicação Estabelecida entre Gráficos e os Processos Cognitivos Analíticos da Matemática**, sob orientação da Profa. Dra. Catia Maria dos Santos Machado, deste instituto. A banca avaliadora foi composta pelo Prof. Dr. Eneilson Campos Fontes – IMEF/FURG e pela Profa. Dra. Diana Francisca Adamatti – C3/FURG. A candidata foi: (**X**) aprovada por unanimidade; ( ) aprovada somente após satisfazer as exigências que constam na folha de modificações, no prazo fixado pela banca; ( ) reprovada. Na forma regulamentar, foi lavrada a presente ata que é abaixo assinada pelos membros da banca, na ordem acima relacionada.

gov.br
Documento assinado digitalmente
CATIA MARIA DOS SANTOS MACHADO
Data: 18/12/2023 15:22:18-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Catia Maria dos Santos Machado

Orientadora

gov.br
Documento assinado digitalmente
ENEILSON CAMPOS FONTES
Data: 18/12/2023 12:14:04-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Eneilson Campos Fontes

gov.br
Documento assinado digitalmente
DIANA FRANCISCA ADAMATTI
Data: 18/12/2023 11:34:35-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Diana Francisca Adamatti

“Saber que ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção” FREIRE, 2002

RESUMO

O texto descreve uma atividade pedagógica focada no avanço do pensamento matemático, destacando a centralidade das representações gráficas. Enfatiza a importância dos elementos visuais na construção de conceitos matemáticos, abordando desafios inerentes à abstração do pensamento. A proposta busca integrar a teoria matemática ao contexto real, visando uma aprendizagem mais significativa para os estudantes. O objetivo da atividade é analisar como as representações gráficas podem simplificar e generalizar o pensamento matemático. A pesquisa inclui questionamentos sobre conhecimentos prévios, discussões em grupo sobre situações-problema, esclarecimento de conceitos e manipulação de fórmulas algébricas, utilizando ferramentas como o GeoGebra e imagens de gráficos associados. Realizada em um encontro de 4 horas, a atividade envolveu a coleta de impressões dos estudantes sobre o ensino de Estatística e Matemática, com análise de dados pela metodologia de Análise de Conteúdo (BARDIN, 2016), identificando categorias como simbologia matemática, recursos matemáticos e desejo de aprender. Os resultados enfatizam a importância de abordagens pedagógicas variadas para fortalecer o pensamento matemático e estimular o interesse dos estudantes. Com a realização desta atividade, os estudantes revisitaram conceitos de Geometria Plana e Espacial, e aplicaram tópicos da Álgebra Linear de forma aplicável.

Palavras-chave: Estratégias de ensino; Matemática; Pensamento matemático; Representação gráfica.

SUMÁRIO

1. Introdução

Este texto relata uma atividade que foi desenvolvida na disciplina de Ensino de Estatística, do Curso de Matemática - Licenciatura na Universidade Federal do Rio Grande - FURG, no município de Rio Grande/RS, Brasil. A proposta da atividade concentra-se em examinar, explorar e evidenciar as potencialidades do uso de recursos do campo da Visualização de Dados (VD) no processo de abstração e generalização do pensamento matemático, aliada a representações gráficas delineando, dessa forma, estratégias para introduzir inovações visando aprimorar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. A interpretação de dados estatísticos, desempenham um papel significativo na cultura, política, comunicação e, claro, na educação matemática.

A *Base Nacional Comum Curricular* - BNCC (2018), enfatiza que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente ligada à compreensão dos significados dos objetos matemáticos, considerando suas aplicações. Esses significados surgem das conexões entre objetos, elementos visuais e do cotidiano dos alunos, abrangendo diversos temas matemáticos. Segundo o autor Duval (2009), os elementos visuais, como malhas quadriculadas, cores e tabelas podem desempenhar um papel crucial na compreensão matemática ajudando na construção de representações de objetos matemáticos e dando início a um processo de formalização e generalização do pensamento.

Entretanto, pelo fato de um mesmo objeto matemático possuir meio de representações bastante diferentes, é imprescindível saber "distinguir um objeto de sua representação" (DUVAL, 2009, p.14). Quando essa compreensão existe, torna-se possível desenvolver habilidades de abstração que permitem construir significativamente conceitos básicos de Matemática. A atividade elaborada, como ferramenta pedagógica, a partir de construção gráfica, revela-se como uma estratégia eficaz e criativa para desenvolver o pensamento matemático mais avançado. Corroborando com a ideia de Duval, o Doutor em Ciências, Valente (1993), destaca a importância de visualizar a aplicabilidade da Matemática no mundo real para uma aprendizagem significativa. Nessa perspectiva, de acordo com as ideias dos referidos autores até então, a representação gráfica, ao incorporar elementos visuais para contextualizar conceitos, torna-se uma aliada na superação de desafios enfrentados pelos alunos ao lidar com abstrações intrínsecas à disciplina de Matemática. A utilização de representações gráficas, conforme preconizado por D'Ambrósio (1996), relaciona os conceitos matemáticos a situações reais, facilitando a compreensão e promovendo uma aprendizagem mais profunda. A integração dessas abordagens, alinhada ao contexto educacional brasileiro, destaca-se como uma maneira eficaz de tornar a Matemática mais acessível, participativa e relevante para os estudantes.

Também, Moran (2015) enfatiza a necessidade do uso de estratégias que promovam ambientes de aprendizado que estimulem a criatividade dos estudantes. Ao incorporar elementos visuais ao ensino da Matemática, a abordagem propicia oportunidades para os alunos explorarem conceitos de maneiras inovadoras. Essa perspectiva encontra respaldo na visão de Jo Boaler (2015), que destaca a importância de métodos facilitadores que aprimorem o processo de simplificação e abstração do pensamento matemático, enfatizando que a matemática se beneficia significativamente quando os conceitos são visualmente representados e conectados a situações do mundo real.

Sendo assim, a visualização gráfica e os recursos associados a esse universo surgem como instrumentos de representações que viabilizam a análise dos procedimentos matemáticos na resolução de problemas, proporcionando pluralidade e independência tanto para os educadores de Matemática quanto aos formadores daqueles que ensinam (DUVAL, 2009). Além de auxiliar "os indivíduos a reconhecerem o papel que a Matemática exerce no mundo", também os tornam engajados e reflexivos aos acontecimentos à sua volta, trazendo criticidade na tomada de decisão (BRASIL, 2018, p.226).

Percebe-se pelas leituras realizadas que a visualização de dados é pouco explorada para abordar conceitos básicos de Estatística. Professores ensinam cálculos de médias e desvios em torno de médias, mas pouco incentivam seus alunos a uma alfabetização sobre leitura de dados, representação de dados, significados e interpretações. É possível que a representação dos catetos (lados do triângulo que formam o ângulo reto) poderão representar médias e desvios. Partindo dessas considerações pretende-se, com a atividade elaborada, fazer com que futuros professores de Matemática comecem a refletir sobre as crenças em cima do processo de formalização do pensamento matemático e assim, buscar estratégias que contribuem para a desmistificação da aprendizagem da disciplina.

Para elucidar as discussões que serão abordadas a partir da observação da atividade realizada com os estudantes, um resumo sucinto dos fundamentos teóricos que orientaram às reflexões será apresentado. Posteriormente, sera exposto os passos que leveram a elaboração de uma proposta pedagogica. Em seguida um detalhamento da metodologia utilizada no desenvolvimento da atividade e da escrita será apresentada. Na sequência, serão expostos os resultados e as discussões, culminando, por fim, nas considerações finais.

2. Alicerce teórico: caminho percorrido para elaboração da atividade

Uma nova linha de pesquisa na Educação Matemática por Premeg (2006), colocou em discussão o papel da visualização e do pensamento matemático. Percebe-se que muitos pesquisadores enfatizam a importância da visualização e do raciocínio visual para aprender Matemática, é um meio que pode servir como auxílio para que exista o entendimento no processo de atribuição de significados a conceitos matemáticos.

A natureza abstrata da Matemática pode funcionar como uma barreira, já que alguns estudantes enfrentam dificuldades em visualizar conceitos e aplicá-los a situações do mundo real. Além disso, a ansiedade em relação à Matemática é uma questão relevante que pode ter um impacto negativo no desempenho dos estudantes (DOWKER; SARKAR; LOOI, 2016). Com frequência, os estudantes deparam-se com desafios ao manipular conceitos matemáticos, sendo a ausência de compreensão prévia destes um obstáculo significativo, uma vez que novos conhecimentos são frequentemente construídos sobre bases anteriores (BOALER, 2008).

Assim, a ausência da manipulação e aplicação dos conceitos matemáticos básicos podem levar a uma compreensão superficial e à incapacidade de formalizar e generalizar conceitos a problemas mais complexos. Superar esses desafios demanda estratégias pedagógicas variadas, incluindo abordagens práticas, a integração de aplicações do mundo real e a promoção de um ambiente de aprendizado colaborativo e de apoio (HIEBERT; GROUWS, 2007).

Assim, a busca por estratégias que facilitem a compreensão e promovam a aplicação prática dos conceitos matemáticos é uma preocupação relevante, especialmente no contexto educacional brasileiro. Conforme enfatiza Valente (2014), é crucial abordar a Matemática de maneira que o aluno visualize sua aplicabilidade no mundo real, estimulando uma aprendizagem significativa. Este entendimento é reforçado por Ausubel (2000), que destaca que a simples apresentação de novas informações não é suficiente para efetivamente ensinar o aluno. A aprendizagem significativa exige atribuição de significado ao conhecimento, garantindo sua integração à estrutura cognitiva do aluno e fomentando um desejo genuíno de aprender. Nessa perspectiva, ao estimular as estruturas cognitivas do aluno, o professor facilita a organização mental e o armazenamento sequenciado do conhecimento.

A falta de estratégias que conectem a teoria matemática ao mundo real pode resultar em uma compreensão superficial dos conceitos, alerta Valente (2014), ressaltando a importância de evitar uma abordagem desvinculada da realidade, que dificulta a internalização dos conhecimentos pelos alunos. Assim, estratégias pedagógicas que incorporam atividades práticas e situações cotidianas podem contribuir significativamente para os processos de ensino e aprendizagem.

Assim, refletir sobre as estratégias adotadas pelos educadores em busca de inovações ao ensinar conceitos matemáticos complexos que tornem a aprendizagem mais acessível e envolvente torna-se essencial. Duval (2009) e Valente (2014) propõe uma perspectiva que destaca a importância de integrar elementos tangíveis e contextualizados no processo educacional, argumentando que a incorporação de estratégias visuais e contextualização dos conceitos proporciona uma compreensão mais profunda sobre eles. Esta abordagem converge com a visão da renomada professora de Matemática, Educadora Matemática e pesquisadora em Educação Matemática na Universidade de Stanford Jo Boaler (2015), que enfatiza a necessidade de métodos facilitadores que aprimorem o processo de simplificação e abstração do pensamento matemático, argumentando que a Matemática se beneficia significativamente quando os conceitos são visualmente representados e conectados a situações do mundo real.

Ao incorporar as ideias de Duval (2009), destaca-se a importância da atenção às representações gráficas no processo de aprendizagem matemática. Ele ainda ressalta que a compreensão matemática está intrinsecamente ligada à capacidade de interpretar e manipular representações simbólicas. Sendo assim, um gráfico não apenas ilustra, mas também funciona como uma linguagem que facilita a construção de significado.

A contribuição dos elementos visuais transcende a simples ilustração, como salientado por Mayer (2009), que enfatiza a eficácia do processo de aprendizagem quando informações são apresentadas de maneira visual e verbal simultaneamente. Essa abordagem possibilita ao cérebro processar as informações de forma mais profunda e integrada. Unindo as perspectivas de Freire, Duval e Mayer, compreende-se que a eficácia dos elementos visuais reside na capacidade de complementar e reforçar os conteúdos, simplificando conceitos complexos de maneira mais abrangente.

Para viabilizar processos de abstração e generalização do pensamento matemático, é imperativo buscar regularidades, testar e validar conjecturas, além de situar-se no contexto temporal e espacial (DUVAL, 2017). A habilidade de generalização, enfatizada como central na prática matemática, desempenha um papel proeminente na Álgebra (DAVIS; HERSH, 1985). Em contrapartida, a abstração, como apontado por esses autores, é uma característica fundamental da Matemática, envolvendo conceitos que não são necessariamente reais. Assim, um dos principais objetivos do ensino de matemática é formar conceitos por meio de representações simbólicas, utilizando o processo de abstração.

A ideia se originou desde as fases iniciais da pesquisa do referencial teórico e na análise de escritos científicos relacionados ao tema "Design Gráfico", "Letramento Estatístico" e "Generalização do pensamento matemático". No entanto, as reflexões de Guzmán (2002) sugerem que é essencial desenvolver a habilidade de escolher abordagens mais apropriadas ao lidar com conceitos matemáticos específicos. Para explorar distintos tipos de atividades matemáticas, frequentemente é necessário empregar processos simbólicos, diagramas visuais e diversas outras formas de processos mentais que envolvem a imaginação.

Assim, em função dos participantes da pesquisa serem futuros professores de Matemática, seria interessante explorar conceitos básicos de Estatística de modo que esses pudessem ser estruturados pela forma visual, numérica e simbólica. Construir propostas pedagógicas interdisciplinares, sobre o ensino de um conteúdo formal matemático por meio de uma abordagem de gráficos é bastante interessante e possui grande poder integrador entre problemáticas reais do cotidiano.

3. Transformando a pesquisa em ação: estruturando ideias

Muitos dos conceitos matemáticos são processados em memórias motoras visuais e sensoriais. Assim, é crucial incentivar a criatividade dos alunos por meio de abordagens visuais, questionando a ideia de que o bom desempenho em Matemática depende apenas da memorização e da velocidade de raciocínio (ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, 1991). Esses autores destacam que a visualização matemática refere-se à capacidade do aluno de criar (formular) um diagrama (ou imagem mental) apropriado, seja utilizando lápis e papel ou um computador, para representar um conceito matemático ou problema. Esse diagrama serve como auxílio na resolução de problemas, conduzindo à compreensão da Matemática. Vale ressaltar que, em Matemática, a visualização não é um fim em si mesma, mas um meio para alcançar a compreensão.

No contexto dos conceitos básicos de média aritmética e desvio em torno da média, que serão informalmente introduzidos por meio de uma situação problema, utilizaremos representações concretas para descobrir as relações abstratas relevantes ao matemático. Ao representar visualmente os dados no plano cartesiano (dimensão 2) e no espaço tridimensional (dimensão 3), o objetivo é que os alunos, a partir da visualização gráfica dos dados, generalizem para dimensões superiores (dimensão n), auxiliando no processo de abstração do pensamento matemático.

A aplicação da representação visual dos dados também se estende à geometria, onde muitas das fórmulas matemáticas encontradas na Estatística podem ser relacionadas à noção geométrica de ângulos, comprimento (norma), área e volume. Essa conexão é significativa, pois as representações geométricas facilitam a compreensão da linguagem matemática utilizada para calcular a média aritmética em conjuntos extensos de dados, como:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

e para o cálculo do desvio padrão (desvio em torno da média) como:

$$\sigma = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_1 - \bar{x})^2}}{n}\,.$$

4. Elaboração e Tradução da Atividade

Situação Problema: Duas provas foram realizadas na disciplina de Estatística, turma C, do Curso de Licenciatura em Matemática. O **Aluno "A_1"** obteve nota 4 (na Prova 1) e nota 5 (na Prova 2). O **Aluno "A_2"** obteve nota 6 (na Prova 1) e nota 3 (na Prova 2).

Geometricamente no espaço bidimensional, fazer a representação dos indivíduos $\boldsymbol{A_i}$ (alunos **"A_1" e "A_2"**) e das variáveis $\boldsymbol{x^j}$(Provas 1 e 2) é possível.

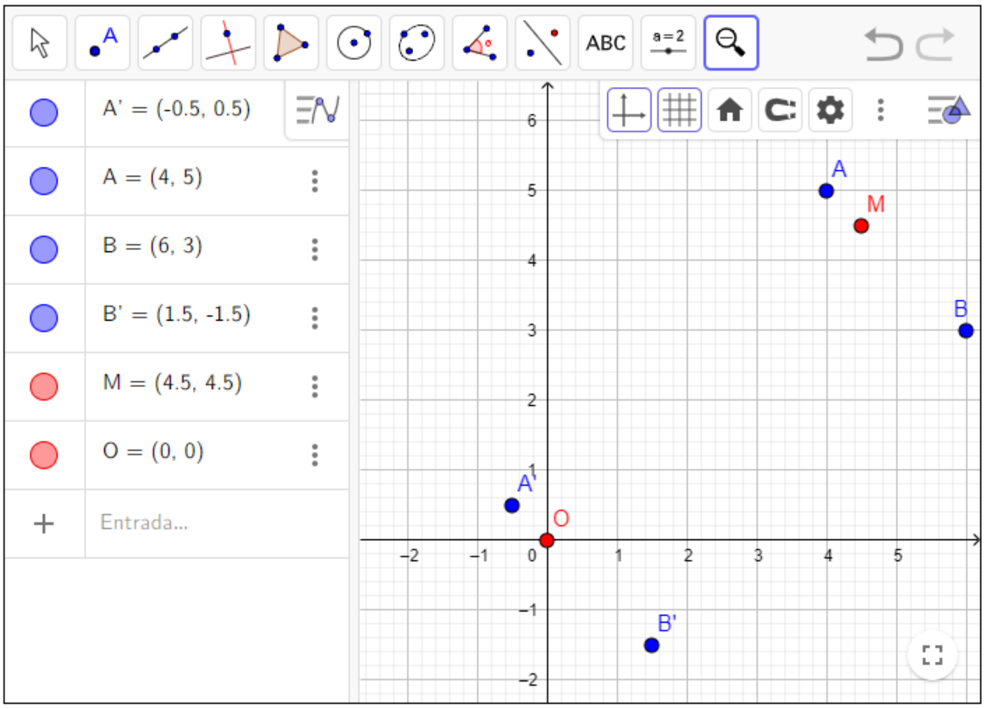
4.1. Representação dos Indivíduos

No plano cartesiano**,** através dos pontos A = (4,5) e B = (6,3) os Alunos **"A_1" e "A_2"** respectivamente, podem ser representados. Também a média artmética $\bar{x}$ obtida pelos alunos na disciplina de Estatística pode ser representadas pelo ponto M= ($\frac{4+5}{2}$, $\frac{6+3}{2}$) = (4.5,4.5).

A Figura 1, mostra a representação dos alunos **“A_1” e “A_2”** com novas coordenadas (ou valores centrados) que foram obtidos a partir do novo referencial (ponto O). Assim, novas coordenadas foram obtidas a partir do cálculo do desvio, onde cada nota da prova é subtraída do seu valor médio como : A’= $(4 - 4.5,\ 5 - 4.5) = (-0.5,\ 0.5)$ e B’= $(6 - 4.5,\ 3 - 4.5) = (1.5,\ -1.5)$. Observe que os valores centrados são os desvios em torno da média aritmética e foram obtidos pelo movimento de translação dos eixos coordenados de origem em M= (4.5,4.5), fazendo coincidir o ponto M = (4.5,4.5) com o ponto O = (0,0), a origem do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. Sendo assim, a média aritmética calculada para os desvios dos valores originais (valores centrados) A’ = $(-0.5,\ 0.5)$ e B’= $(1.5,\ -1.5)$ sempre será igual a zero, isto é, $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(x_i - \overline{x}) = 0$.

Então, na tentativa de manter o conceito de desvio como uma medida de variabilidade é possível utilizar a variância como sendo a média aritmética do quadrado dos desvios dada por $\sigma^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(x_i - \overline{x})^2$. Em linguagem matemática, a fórmula que generaliza o cálculo da variância é: $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

Figura1 - Representação Gráfica dos Alunos **“A_1” e “A_2”**



Fonte: Acervo da pesquisadora

4.2. Representação das Variáveis

Em relação a situação problema, descrita anteriormente, o interesse agora consiste na representação geométrica das $\boldsymbol{p}$ variáveis medidas nos $\boldsymbol{n}$ indivíduos.

Para que não haja confusão, denotar-se-á por:

$\boldsymbol{X}$, matriz de dimensão ($\boldsymbol{n}$ **x** $\boldsymbol{p}$), a qual representa os $\boldsymbol{n}$ indivíduos e as $\boldsymbol{p}$ variáveis.

$\boldsymbol{x^j}$, vetor que representa os elementos da coluna de índice j da matriz X, com j =1....p.

$\boldsymbol{\bar{x}^j}$, vetor de dimensão ($\boldsymbol{n}$x**1**), cujas componentes são todas iguais, representando a média dos elementos da coluna de índice j da matriz X, com j =1....p.

$\boldsymbol{e^j}$, vetor que representa os desvios dos elementos da coluna de índice j da matriz X, em torno de sua média, com j =1....p.

$|\boldsymbol{x^j}|$**,** módulo do vetor $\boldsymbol{x^j}$**.**

$|\boldsymbol{\bar{x}^j}|$**,** módulo do vetor $\boldsymbol{\bar{x}^j}$**.**

$\boldsymbol{u} = \frac{\bar{x}^j}{|\bar{x}^j|}$**,** vetor unitário de mesma direção do vetor média $\boldsymbol{\bar{x}^j}$.

$(\boldsymbol{x^j})^{\boldsymbol{T}}$ vetor transposto do vetor $\boldsymbol{x^j}$**.**

$(\boldsymbol{\bar{x}^j})^{\boldsymbol{T}}$ vetor transposto do vetor $\boldsymbol{\bar{x}^j}$**.**

$\boldsymbol{u^T}$ vetor transposto do vetor $\boldsymbol{u}$**.**

Assim, as notas obtidas pelos alunos **"A_1" e "A_2"** nas Provas 1 e 2, podem ser representadas através de uma matriz $X = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ de dimensão (2x2). A coluna 1 da matriz X, poderá ser representada pelo vetor $x^1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ indicando as notas obtidas pelos alunos **"A_1" e "A_2"** na Prova 1. A coluna 2 da matriz X, poderá ser representada pelo vetor $x^2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ indicando as notas obtidas pelos alunos **"A_1" e "A_2"** na Prova 2. Os vetores médias, $\bar{x}^1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ e $\bar{x}^2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$, possuem componentes iguais, podendo também ser expressos pelo vetor unitário de mema direção que os vetores médias.

Pelo fato dos vetores média terem componentes iguais, eles sempre terão a mesma direção e formarão ângulos iguais com cada um dos eixos coordenados. Sendo assim, o vetor unitário $\boldsymbol{u}$ (de comprimento 1) que posssui mesma direção do vetor média também formará ângulos iguais com os eixos coordenados.

A partir da determinação dos módulos (comprimento dos vetores média) $|\bar{x}^1| = \sqrt{(5)^2 + (5)^2} = \sqrt{50}$ e $|\bar{x}^2| = \sqrt{(4)^2 + (4)^2} = \sqrt{32}$, as componentes do vetor unitário podem ser determinadas, sendo $u = \frac{\bar{x}^1}{|\bar{x}^1|} = \frac{\bar{x}^2}{|\bar{x}^2|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. O vetor unitário forma um ângulo de 45º com os eixos coordenados.

Nesse sentido, cada vetor das médias poderá ser escrito como uma combinação linear do vetor unitário $\boldsymbol{u}$, ou seja $\boldsymbol{\bar{x}^j} = \boldsymbol{k.u} = \boldsymbol{k.}\frac{\bar{x}^j}{|\bar{x}^j|}$. Nessa representação, $\boldsymbol{k}$ é o comprimento do vetor média. Assim, os vetores médias $\bar{x}^1 = \sqrt{50}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right]$ e $\bar{x}^2 = \sqrt{32}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right]$ podem ser representados.

Então, generalizando, os vetores $\boldsymbol{x^j}$ de dimensão (***n*x1*)***, com *j* =1.....*p*, poderão ser definidos em linguagem matemática como sendo $\boldsymbol{x^1} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x^2} = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix}, \ldots . \boldsymbol{x^p} = \begin{bmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \\ \vdots \\ x_{np} \end{bmatrix}$.

E o vetor média de dimensão (***n*x1**), que a partir do vetor de componentes iguais $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ que determina o vetor unitário como $\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$, poderá representar o vetor média $\bar{x} = k.\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right]$, onde a constante k representa o módulo (comprimento) do vetor média.

É interessante mostrar que o vetor médio $\bar{x}^1$ nada mais é do que a projeção do vetor $x^1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ sobre o vetor unitário $u = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

Assim, pela fórmula da projeção tem-se que:

$$(\bar{x}^1)^T = proj_u^{x^1} = \left[(x^1)^T.\frac{u^T}{|u|}\right].\frac{u^T}{|u|} = \left[(4,6).\frac{(1,1)}{\sqrt{2}}\right]\frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \frac{4+6}{\sqrt{2}}\left[\frac{(1,1)}{\sqrt{2}}\right] = (5,5)$$

$$(\bar{x}^2)^T = proj_u^{x^2} = \left[(x^2)^T.\frac{u^T}{|u|}\right].\frac{u^T}{|u|} = \left[(5,3).\frac{(1,1)}{\sqrt{2}}\right]\frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \frac{5+3}{\sqrt{2}}\left[\frac{(1,1)}{\sqrt{2}}\right] = (4,4)$$

O cálculo dos desvios em torno da média, em relação as notas nas Provas 1 e 2, são:

$$e^1 = \begin{bmatrix} 4-5 \\ 6-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \quad e^2 = \begin{bmatrix} 5-4 \\ 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

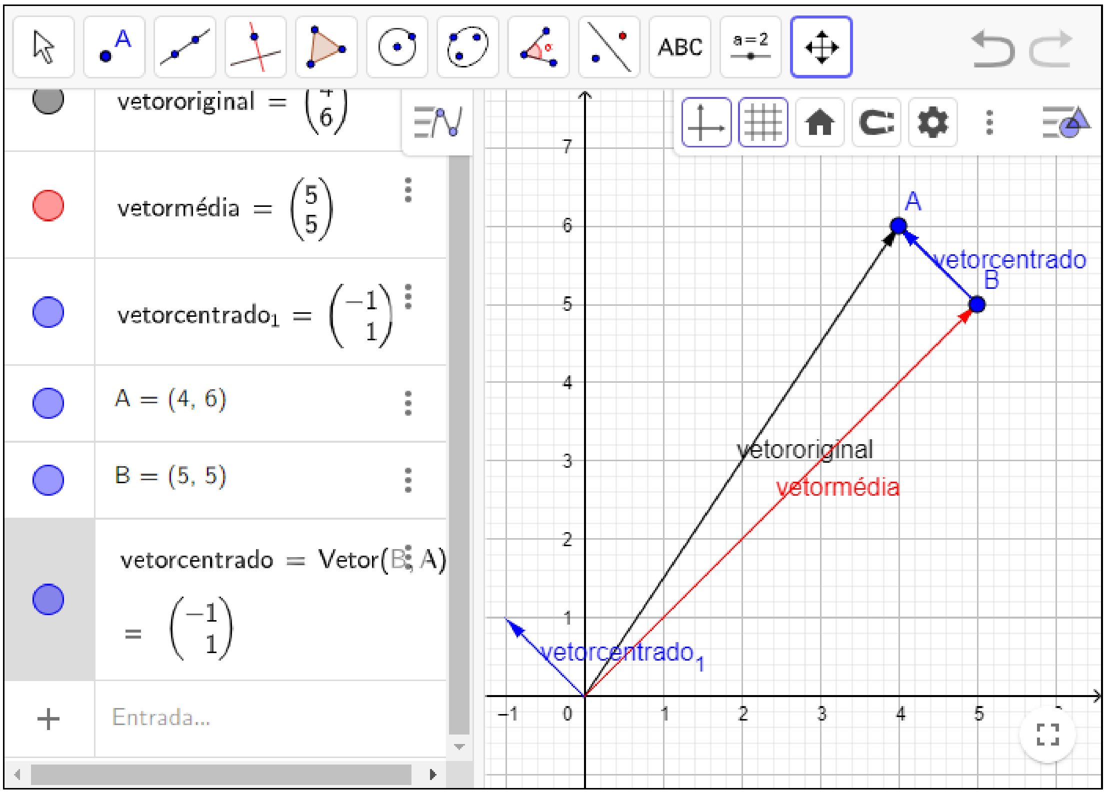
Asssim, o vetor desvio poderá ser representado como

$$e^j = \begin{bmatrix} x_{1j} - \bar{x}^j \\ x_{2j} - \bar{x}^j \\ \vdots \\ x_{nj} - \bar{x}^j \end{bmatrix}, \text{ para todo } j = 1,....p.$$

A Figura 2, mostra o vetor projeção $\bar{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{j}}$ (vetor média), o vetor dos desvios $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}}$ (valor centrado) e o vetor $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}}$ (valor original). Como pode ser observado, o vetor $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}}$ pode ser escrito como uma soma de vetores, onde, $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}} - \bar{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{j}}$**.** O ângulo entre os vetores $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}}$ e o vetor médio é igual a 90º, portanto o produto escalar é nulo. De fato,

$(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j}})^{\boldsymbol{T}}$. $(\bar{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{j}})^{\boldsymbol{T}} = (\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{1}})^{\boldsymbol{T}}$. $(\bar{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{1}})^{\boldsymbol{T}}$ = **(-1,1).(5,5) = 0.**

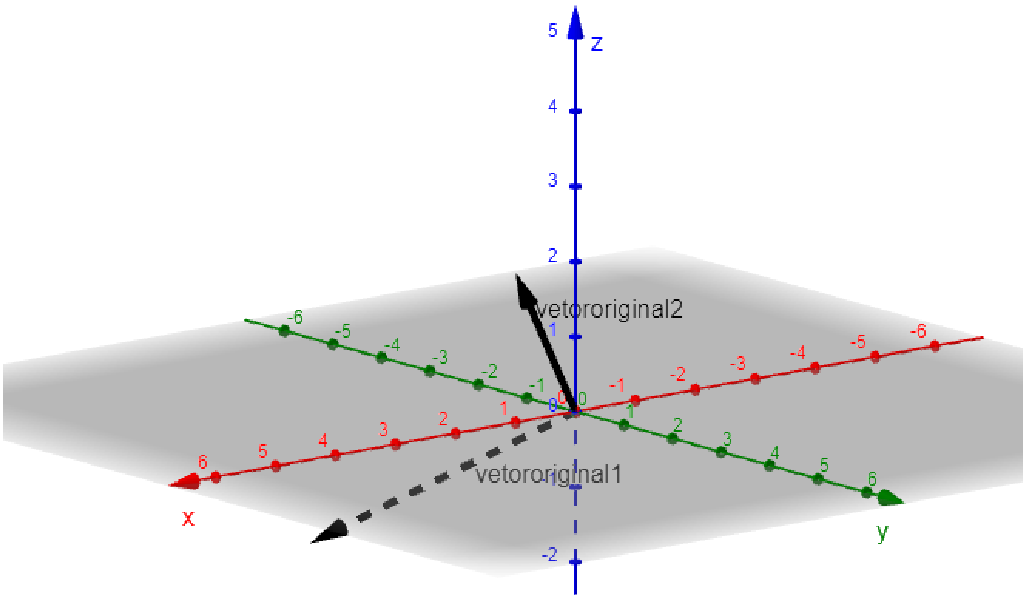
Figura 2 - Representação Gráfica do vetor projeção médio $\overline{\boldsymbol{x}}^{\mathbf{1}}$.



Fonte: Acervo da pesquisadora

Os conceitos mencionados podem ser estendidos para o espaço tridimensional (R^3). Sejam os dados de uma matriz $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ de dimensão (3x2), é possível também mostrar no espaço tridimensional a decomposição do vetor que representa os dados originais nos vetores média e desvio médio.

Figura 3 - Representação Gráfica dos dados no espaço tridimenional



Fonte: Acervo da pesquisadora

A partir do cálculo dos vetores média $\bar{x}^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\bar{x}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, determina-se a projeção do vetor de dados originais na direção do vetor unitário médio $u^T = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

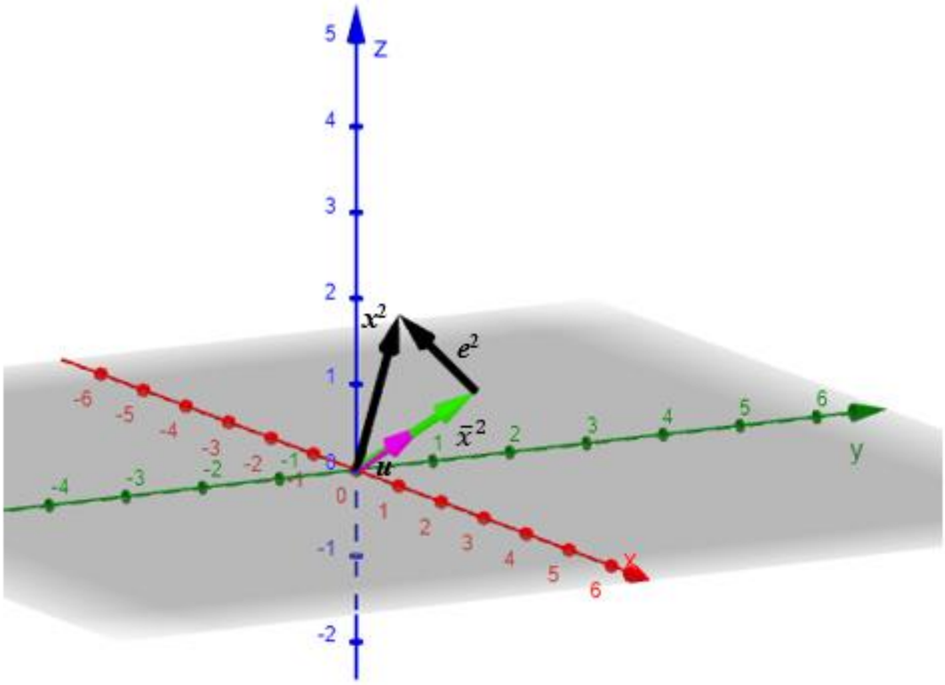
$$(\bar{x}^1)^T = proj_u^{x^1} = \left[(x^1)^T.\frac{u^T}{|u|}\right].\frac{u^T}{|u|} = \left[(2,-3,-2).\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\right]\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \frac{-3}{\sqrt{3}}\left[\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\right] = (-1,-1,-1)$$

$$(\bar{x}^2)^T = proj_u^{x^2} = \left[(x^2)^T.\frac{u^T}{|u|}\right].\frac{u^T}{|u|} = \left[(1,0,2).\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\right]\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}\left[\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\right] = (1,1,1)$$

Os vetores desvios (vetores centrados) são: $e^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $e^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

O cálculo do produto escalar dos vetores $(\bar{x}^1)^T.(e^1)^T = (-1,-1,-1).(3,-2,-1) = 0$ e dos vetores $(\bar{x}^2)^T.(e^2)^T = (1,1,1).(0,-1,1) = 0$. Assim, os vetores $\bar{x}^j$ e e^j são ortogonais. E o vetor original x^j poderá ser escrito como combinação linear de dois vetores ortogonais $\bar{x}^j$ e e^j. A Figura 4, mostra a decomposição em relação ao vetor original x^2.

Figura 4 - Decomposição do vetor original x^2 em função do vetor média $\bar{x}^2$e vetor desvio e^2.



Fonte: Acervo da pesquisadora

Considere o quadrado do módulo do vetor desvio e^j, então:

$$|e^j|^2 = e^j . e^j = \sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}^j)^2 \text{ , } \forall\, j = 1, \dots, p \qquad (1)$$

Observa-se por (1) que o quadrado do módulo (comprimento) dos vetores dos desvios é proporcional a variância da j-ésima variáavel. Equivalentemente, o comprimento é proporcional ao desvio padrão. Vetores longos representam maior variabilidade do que vetores curtos.

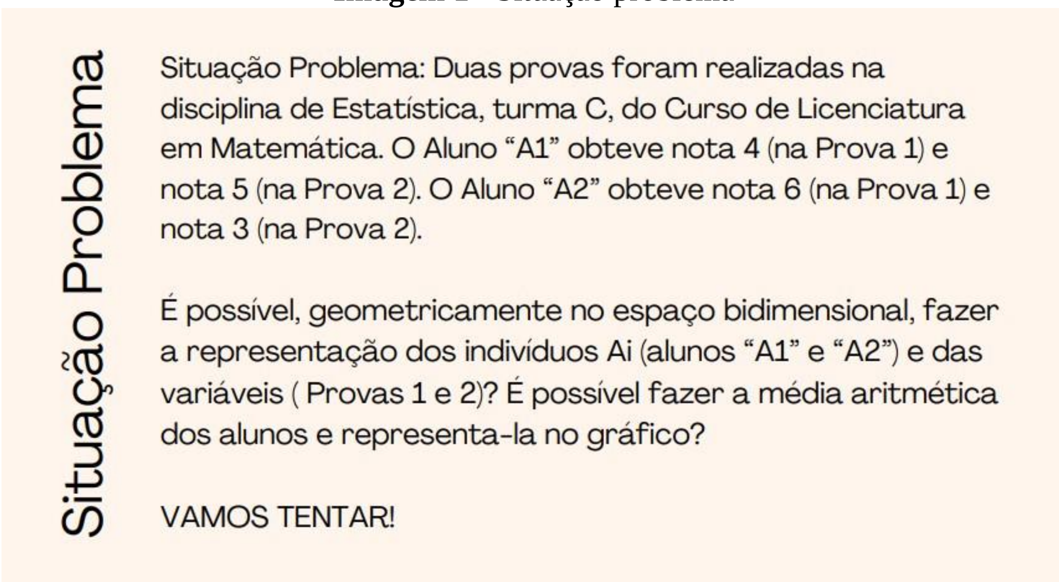
4. Metodologia: Aplicação da proposta

Os sujeitos dessa pesquisa foram onze estudantes matriculados na Disciplina de Ensino de Estatística na Licenciatura (4º semestre) do Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal do Rio Grande - FURG no município de Rio Grande/RS. A disciplina possui como ementa estudos relacionados às Teorias de aprendizagem na sala de aula de Estatística; ciência cognitiva e a Estatística; pensamento, raciocínio e letramento estatístico; estratégias pedagógicas no ensino da Estatística; estatísticas educacionais. Esses estudantes foram selecionados para participar da atividade, dada a relevância do tema não apenas no contexto do ensino de Estatística, mas também na formação de futuros professores de Matemática.

O trabalho tem como objetivo geral, a partir de uma atividade que envolve a análise de dados, observar as potencialidades das representações gráficas no contexto do processo de construção do conhecimento matemático, fazendo a transposição para um pensamento matemático mais avançado. O trabalho visa também, atingir objetivos específicos como: promover o desenvolvimento da capacidade do pensamento abstrato; promover discussões acerca de representações semióticas na Matemática e; mobilizar recursos matemáticos na resolução de problemas.

Inicialmente, para a realização da atividade, a pesquisadora explicou aos estudantes que tratava-se de uma projeto de pesquisa, necessitando do termo de consentimento e assentimento de todos para participação na atividade. Posteriormente, foram feitos questionamentos aos estudantes sobre seus conhecimentos prévios acerca de alguns conceitos estatísticos e matemáticos como: desvio-padrão, média aritmética, ponto médio, espaço bidimensional e tridimensional. Tão logo, foi apresentado aos estudantes, uma situação problema onde eles teriam de discutir, em um grande grupo, como fariam a representação gráfica das informações apresentadas. (Imagem 1).

Imagem 1 - Situação problema



Fonte: Acervo da pesquisadora

Sendo assim, examinou-se o grau de compreensão pelos estudantes em relação às informações apresentadas. Essa investigação foi realizadas com o intuito de esclarecer os conhecimentos prévios dos estudantes. Após essa fase inicial, foram esclarecidos os conceitos essenciais para a elaboração de gráficos bidimensionais, incluindo a representação de pontos (coordenadas) no plano cartesiano e manipulação de fórmulas algébricas relacionadas ao desvio-padrão e à média aritmética.

Durante a explicação, a pesquisadora utilizou diferentes instrumentos explicativos, entre eles: aplicativo do GeoGebra; imagens de outros gráficos que abordavam assuntos similares como preço da criptomoeda Bitcoin e preço de casas financiadas pelo banco Caixa Econômica Federal. A seguir, os estudantes reuniram-se com a intenção de manipular as fórmulas algébricas que definem o conceito média, média aritmética e desvio-padrão, necessárias na resolução da situação-problema dada.

A execução desses procedimentos pelos próprios estudantes já pode ser interpretada como um indício inicial de sistematização nos processos de construção de conhecimentos estatísticos e matemáticos. Essa sistematização, por sua vez, tem o potencial de aprimorar os métodos de ensino do conteúdo quando esses estudantes assumirem o papel de educadores.

Quanto ao desenvolvimento da atividade, foi utilizado um encontro de 4 horas. No decorrer do encontro foi solicitado aos estudantes que relatassem suas impressões sobre a atividade relacionada com o ensino de estatística para acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática. Para facilitar a análise desses relatos, foi realizada a gravação de voz dos estudantes, mediante aprovação dos envolvidos, e foi realizada a transcrição. Também foi confeccionado um diário de campo com as percepções e constatações da pesquisadora.

Nesse sentido, optou-se em seguir duas metodologias ativas específicas de Charles Bonwell e James Eison (1991), sendo elas: a Aprendizagem Baseada em Problemas - possibilita que os estudantes desenvolvam suas habilidades por meio da resolução de desafios, incentivando a criatividade e a reflexão diante de situações que exigem tanto habilidades técnicas quanto emocionais - e Design Thinking - busca inovar ao criar soluções criativas e eficientes para problemas envolvendo lógica, imaginação, intuição, prototipagem e testagem, indo além do design de produtos. Dessa maneira, a avaliação dos dados obtidos por meio das transcrições e do diário da pesquisadora foi realizada de forma conjunta, seguindo os métodos da Análise de Conteúdo (BARDIN, 2016). Essa metodologia engloba um conjunto de técnicas, compreendendo:

1. **Pré-análise:**
2. **Exploração do material:**
3. **Tratamento dos resultados:**
4. **Análise e interpretação:**
5. **Elaboração do relatório**

No processo metodológico aplicado à análise do conteúdo no estudo sobre Educação

Matemática, a definição dos objetivos foi o ponto inicial, envolvendo a compreensão do propósito da pesquisa e a identificação dos temas e questões específicas a serem abordados. Em seguida, a escolha criteriosa do material de análise, composto por documentos e materiais relevantes, formou a base essencial para a investigação. A formulação de hipóteses, como conjecturas iniciais, desempenhou um papel direcionador, orientando a análise e proporcionando guias para as interpretações dos resultados.

A leitura flutuante, realizada nas transcrições de voz do encontro e no diário da pesquisadora, proporcionou uma visão abrangente do material produzido. A etapa subsequente envolveu a elaboração de indicadores, identificando elementos relevantes com o uso de cores para contribuir à compreensão aprofundada dos resultados. Organizando o material, este foi integrado ao diário da pesquisadora, marcando temas comuns por meio de transcrições e cores.

A codificação identificou unidades de análise, atribuindo rótulos conforme categorias previamente estabelecidas, enquanto a categorização agrupou essas unidades em categorias temáticas, destacando três distintas: simbologia matemática, representações gráficas na Matemática e o desejo de aprender. A exploração das relações e padrões emergentes entre as categorias foi conduzida, seguida pelo desenvolvimento de interpretações e inferências a partir dos resultados. A elaboração de conclusões sintetizou as descobertas, respondendo às questões de pesquisa propostas.

Ao final, apresentou de forma clara e organizada os resultados, detalhando os passos metodológicos adotados na análise do conteúdo. Finalmente, a discussão contextualizou os resultados em relação à literatura existente, refletindo sobre implicações teóricas e práticas, proporcionando, assim, uma visão abrangente do estudo em Educação Matemática. A seção subsequente detalha os resultados relacionados a cada uma dessas categorias, além de outros resultados decorrentes da pesquisa.

5. Resultados e discussões

A atividade, com foco em representações gráficas, teve a intencionalidade de desenvolver a percepção do estudante de forma que esse possa estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. A observação, sobre a atividade elaborada foi realizada a partir do diário da pesquisadora e da transcrição da voz do encontro, e por esse motivo, foram analisados os conhecimentos geométricos dos estudantes, relatos dos estudantes no decorrer da atividade sobre a importância de representações visuais no campo do ensino e aprendizagem da Matemática e, por fim, recursos visuais que impulsionam o desejo de aprender. Durante as observações, trechos das transcrições e do diário da pesquisadora foram apresentados.

Categoria 1: simbologia matemática

Nesta categoria serão apresentados as problematizações referentes ao domínio da simbologia matemática dos estudantes. Pois, foi possível constatar um certo medo, até mesmo, confusão em relação ao entendimento de notações matemáticas e manipulação de fórmulas gerais.

Durante os primeiros momentos de revisão de conceitos relacionados à médiaaritmética, ao desvio-padrão, ponto médio e plano cartesiano, foi perceptível, de acordo com o diário da pesquisadora, *"A falta de compreensão e apropriação da simbologia matemática. Um fator preocupante, pois os sujeitos da pesquisa já se encontram no segundo ano do curso de graduação em Matemática Licenciatura"*.

Ao questionar os estudantes sobre a leitura e entendimento das fórmulas, média aritmética, ao desvio-padrão e plano cartesiano, a resposta foi: *"Não muito bem. Não sei porque os professores colocam aquelas fórmulas gigantes no quadro com um monte de letra para confundir a gente. Nunca entendo do que estão falando, principalmente quando tem aquele "E" (símbolo do somatório). Sei lá eu quem é aquele E".* Outros estudantes se manifestaram: *"Por que Matemática precisa simplificar tudo em símbolos estranhos?!" "É outra língua. A gente precisa ter uma disciplina no curso que nos ensine a LER MATEMÁTICA!".*

É sabido que, a notação e a simbologia matemática passaram por transformações ao longo do tempo. A tendência é a notação mover-se do concreto para o abstrato, adaptando-se à modernidade. E a compreensão significativa da linguagem matemática por parte dos estudantes é imprescindível. Estudantes têm facilidade em assimilar conceitos a partir do concreto, mas encontram dificuldades em abstração e generalização. Nessa transição, do concreto para o abstrato, fica evidente que os obstáculos relacionados à compreensão da linguagem matemática, prejudicam a fluência do pensamento matemático abstrato do estudante (MODEL, 2005).

Portanto, o formalismo presente na linguagem matemática frequentemente cria obstáculos para a compreensão do aluno, resultando em uma dificuldade de manipular conceitos matemáticos.

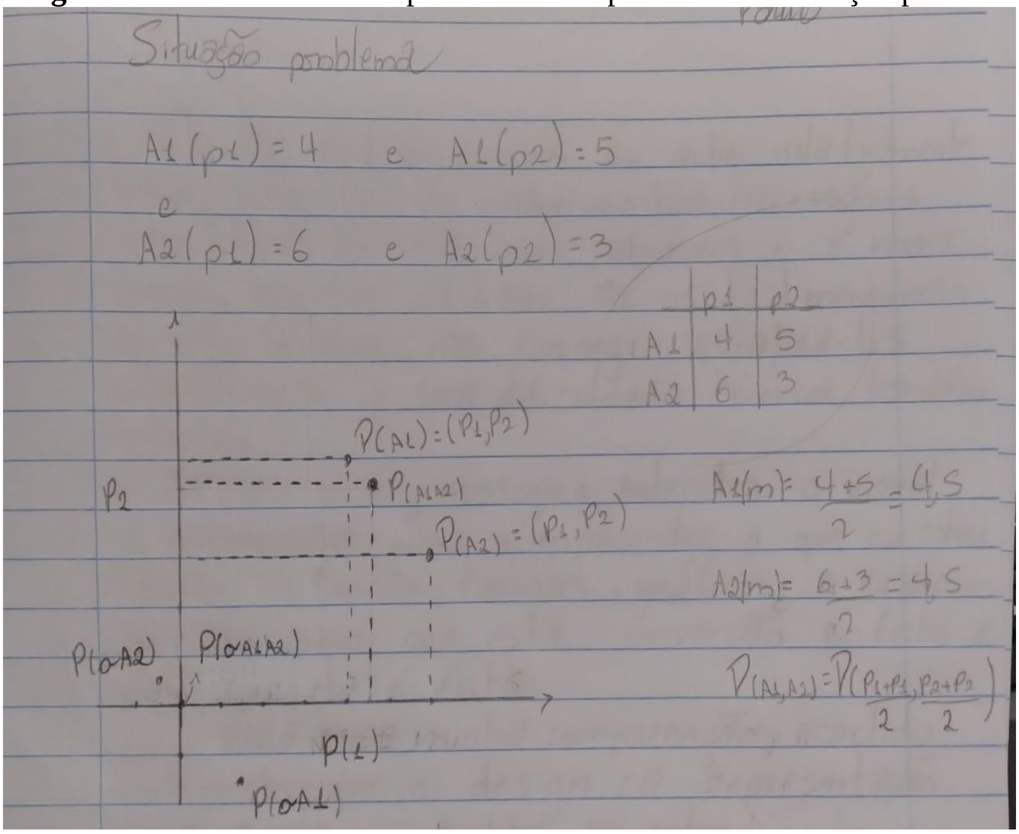
Categoria 2: as representações gráficas na Matemática

Nesta categoria, serão apresentadas as percepções dos estudantes acerca da importância das representações gráficas para a compreensão de conceitos matemáticos. Os trechos de relatos apresentados nesta seção foram coletados ao longo de todo o desenvolvimento da atividade.

Apesar das dificuldades enfrentadas na construção dos gráficos solicitados, relatos como: *"os dados representados graficamente facilitam muito na compreensão de conceitos matemáticos"*, se fizeram presente durante todo o encontro. Os relatos apontaram sobre o impacto que as representações visuais possuem no processo de aprendizagem, na formalização de conceitos.

De acordo com a atividade elaborada, Situação Porblema, descrita na seção 4, é realizada uma discussão sobre o movimento de translação de eixos. O estudante percebe que os pontos que representam os indivíduos podem ter coordenadas diferentes, dependendo do referencial escolhido.

Imagem 2 - Gráfico construído por estudante a partir de uma situação-problema



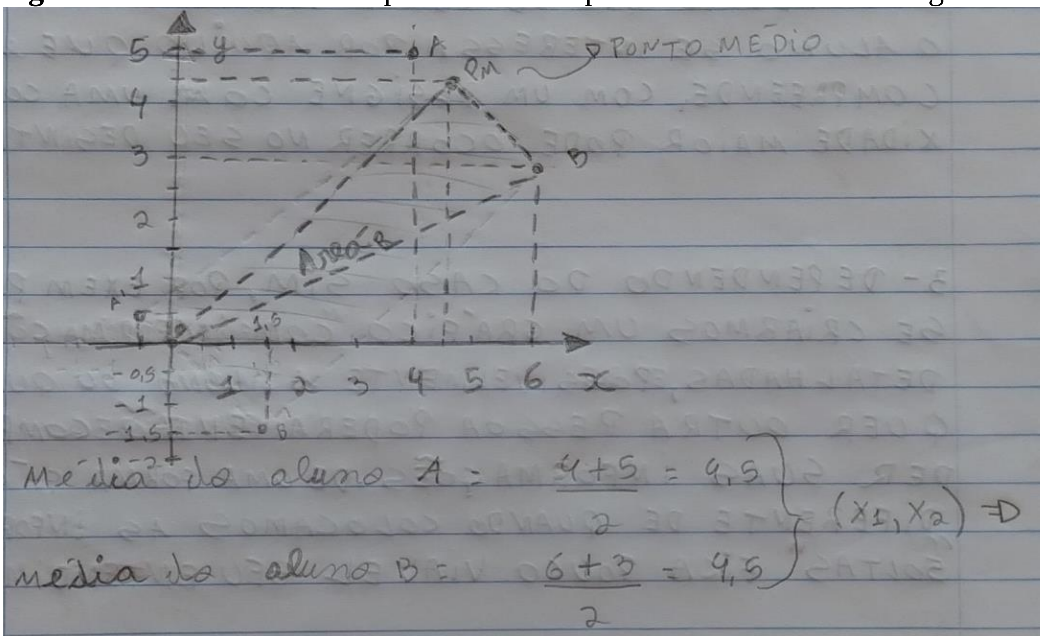
Fonte: Acervo da pesquisadora

Os estudantes comentaram sobre o uso de representações gráficas, trazendo falar como *“essas representações trazem sentido para as coisas que existem no mundo” “[...] tornando lúdico conceitos difíceis de associar com o cotidiano”*.

Outro ponto a ser destacado nesse processo de elaboração de gráficos é o uso de recursos visuais para melhor visualização e compreensão das informações. Como o traçar de estratégias e a mobilização de recursos matemáticos se deu de forma colaborativa, foi possível perceber criticidade na autoavaliação dos gráficos construídos por parte dos estudantes *“apesar de eu ter os materiais necessários eu não usei cores no meu gráfico o dificulta um pouco a leitura rápida dele porque está tudo da mesma cor”*. Todos os participantes da oficina concordaram com esse comentário e ainda complementam: *“cores são fundamentais nas representações, sem elas não faz muito sentido desenhar. É mais acessível então manter tudo em números e texto”*.

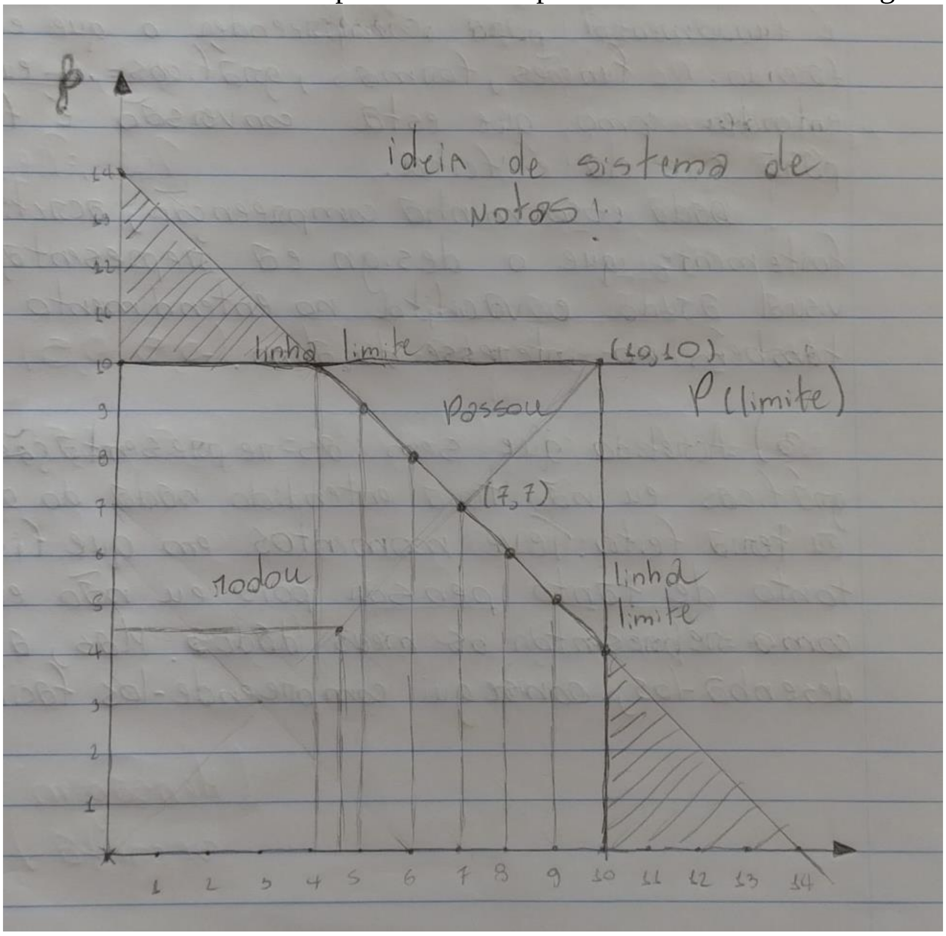
Também é possível perceber que alguns estudantes ampliaram o gráfico a partir de uma análise mais geométrica do desenho formado. Introduzindo no gráfico a ideia de área e limite para as possíveis variações de notas, como mostram a imagem 3 e a imagem 4.

Imagem 3 - Gráfico construído por estudante a partir de uma análise mais geométrica



Fonte: arquivo da pesquisadora

Imagem 4 - Gráfico construído por estudante a partir de uma análise mais geométrica



Fonte: acervo da pesquisadora

Ao longo das falas: *"agora consigo ver uma área que delimita os alunos [da situação-problema] que estão reprovados, parcialmente aprovados e os aprovados" "[...] o desenho realmente ajuda a visualizar os dados",* se tornou evidente que os estudantes conseguiram acionar conhecimentos relacionados a Cálculo e a Teoria dos Limites com as áreas de Estatística e da Geometria que estavam trabalhando. Além disso, os estudantes ainda constataram que *"[...] a oficina ajudou a entender o que representa o desvio-padrão e a média aritmética. Sem falar, aí sim, depois de desenhar as informações e fazer os cálculos deu pra entender o que as fórmulas queriam"*. Dessa forma, é destacado a presença de indícios de LM nos estudantes.

Falas como essas demonstram a importância de representações no processo de construção de saberes. Ao refletirmos sobre o ensino das matemáticas no curso de Matemática - Licenciatura da FURG é possível constatar que: *"as representações fazem parte da vida diária de um professor, pois é assim que os alunos entendem/visualizam a matemática e se sentem atraídos pelo conteúdo"*.

A mudança de coordenadas de um sistema de representação para outro, ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação durante o mesmo percurso, são fenômenos comuns na atividade matemática, porém, para a maioria dos estudantes, eles não são evidentes nem espontâneos. Com frequência, eles não conseguem reconhecer o mesmo objeto por meio das representações que podem ser apresentadas em diferentes sistemas semióticos, como a expressão algébrica de uma relação e sua representação gráfica, a notação numérica de um relatório e sua representação geométrica em uma reta ou no plano. Uma fala muito presente durante o encontro foi: *"os conhecimentos matemáticos comuns ao nosso dia a dia de aluno são fáceis de manipular, mas quando precisamos representar informações de forma mais elaborada ou técnica nos sentimentos inseguros, pois sempre trabalhamos no modo mecânico ou, pelo menos, nunca tentamos outros tipos de representação visual".*

Portanto, estes relatos direcionam o nosso pensamento para uma reflexão acerca da importância dos educadores de se apropriarem de diferentes métodos de representações. Pois, como Duval (2009) nos traz, "elas são necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática". Tal pluralidade aumenta as capacidades cognitivas dos sujeitos e logo, na elaboração de estratégias de simplificação e generalização do pensamento matemático.

Categoria 3: o desejo de aprender

Por fim, nessa categoria, serão apresentados os impactos que o uso de representações visuais causam no desejo de aprender dos estudantes. Visto que, foi debatido entre eles o quanto a qualidade de representações visuais, o uso de cores e desenhos influenciam na organização mental na busca por estratégias de resolução de problemas dentro do campo da Matemática.

Os estudantes teceram comentários: *"[...] o uso de recursos visuais, como as cores, ajudam a tornar as aulas dinâmicas e atraentes, pois saem do estilo tradicional, que muitas vezes é considerado chato pelos alunos"* e "*a representação visual faz a gente ter mais atenção e, também mais vontade de aprender".*

De fato, as cores são rapidamente registradas no campo visual, passando por um processamento inicial simultâneo que orienta a atenção para a assimilação da informação visual. Posteriormente, ocorre um segundo processamento mais lento e detalhado, integrando múltiplas características visuais (TREISMAN; GELADE, 1980). Assim, é possível utilizar as cores de maneiras diversas para orientar o processo de atenção.

Em determinadas circunstâncias, como em representações gráficas, a cor desempenha um papel crucial na compreensão da informação/conteúdo. Portanto, os alunos precisam aprender a identificar quais elementos perceptivos devem considerar, interpretá-los e aplicar esse entendimento na tradução desses elementos para outras representações.

A eficácia da atividade se manifesta não apenas na construção de representações gráficas, conforme evidenciado na categoria 2, mas também na abordagem cuidadosa do processo de compreensão da linguagem e simbologia matemática. A atividade busca compreender os conhecimentos prévios dos estudantes e, a partir disso, desenvolver estratégias envolventes para expandir esses conhecimentos, promovendo uma evolução no processo de abstração do pensamento matemático e fomentando a autonomia do sujeito na construção do conhecimento.

6. Considerações finais

Através da elaboração deste trabalho e da implementação da prática pedagógica proposta, acredita-se ser possível instigar as pessoas a refletirem sobre a importância de aprender a usar as representações gráficas como ferramenta para compreenção da Matemática. A abordagem utilizada visa contribuir para o aprimoramento de estratégias adotadas para ensinar conteúdos matemáticos mais complexos onde a abstração se faz necessária.

É importante destacar que, na atividade elaborada, os indivíduos observados foram caracterizados por variáveis quantitativas (notas de provas). Embora não se tenha mencionado e explorado a estreita relação da atividade com Espaços Vetoriais, utilizou-se noções de combinação linear, base, distância, ângulos e projeção. Nesse sentido, um pensamento matemático mais sofisticado poderia ser formalizado de modo a considerar indivíduos e variáveis elementos de dois Espaços Vetoriais Euclidianos de dimensão ***p*** e ***n*** respectivamente, já que os instrumentos matemáticos utilizados foram a Álgebra Linear e o cálculo matricial.

Observou-se que embora as representações gráficas fossem incorporadas como ferramentas exploratórias para compreensão da representação algébrica, simplificando o pensamento matemático, surpreendentemente, os estudantes demonstram dificuldades no manejo de notações matemáticas e simbologias, especialmente relacionadas a fórmulas algébricas, em um estágio da graduação em que se esperaria maior familiaridade. Assim, seria importante em aplicações futuras praticar o domínio da linguagem algébrica desenvolvendo a habilidade de conectá-la à linguagem natural emergindo como elementos essenciais para uma exploração abrangente das tarefas propostas, facilitando o processo de generalização de conceitos matemáticos.

Frente a isso, surgem novas indagações e orientações para investigações futuras, tais como a análise do impacto do domínio da linguagem matemática no processo de mobilização de conhecimentos. Outra questão pertinente refere-se ao verdadeiro impacto das Representações Semióticas no ensino de Matemática. Assim, almejamos que aqueles que participaram (e possam vir a participar, caso a proposta seja adaptada para o público-alvo apropriado) tenham sua perspectiva sobre a Matemática alterada de forma positiva, despertando um maior interesse em explorar esse tema.

Buscou-se destacar que a Matemática é uma disciplina interdisciplinar e integradora, passível de aplicação em todos os aspectos da vida, proporcionando uma visão mais sofisticada do mundo real. O ato de utilizar a Matemática para interpretar o mundo representa um exemplo prático de como os conceitos que compõem esse campo podem se tornar ferramentas úteis no cotidiano, visando promover criticidade e autonomia de análises e decisões.

Finalmente espera-se que os alunos, futuros professores de Matemática, que tiveram contato com essa proposta possam discernir a distinção entre objeto em estudo e representação desse objeto, compreendendo em quais contextos cabe utilizar as representações como ferramenta simplificadora no processo aprendizagem.

7. Referências

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção do conhecimento:** uma perspectiva cognitiva. Tradução de Ligia Teopisto. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2000.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Tradução de Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. 3º reimp. da 1. ed. São Paulo: Edições 70, 2016.

BOALER, Jo. **Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching**. John Wiley & Sons, 2015.

BOALER, Jo. **What's Math Got to Do with It?: How Parents and Teachers Can Help Children Learn to Love Their Least Favorite Su bject**. Penguin, 2008. disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=K1Ld7FgOdtoC&lpg=PT17&ots=Bzc_RCj8A4&lr&hl=pt-BR&pg=PT17#v=onepage&q&f=false>. Acesso em 13 de nov. de 2023.

BONWELL, Charles C.; EISON, James A. **Active learning: Creating excitement in the classroom. 1991 ASHE-ERIC higher education reports**. ERIC Clearinghouse on Higher Education, The George Washington University, One Dupont Circle, Suite 630, Washington, DC 20036-1183, 1991

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

CARDOSO, Rafael. O design gráfico e sua história. **Revista artes visuais, cultura e criação**, p. 1-7, 2008.

D'AMBRÓSIO, U. “Como ensinar matemática hoje?” In: Temas & Debates. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Ano II, nº 2, 1989.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Papirus Editora, 1996.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **The Mathematical Experience.** New York, NY: Houghton Mifflin. 1985.

DOWKER, Ann; SARKAR, Amar; LOOI, Chung Yen. Mathematics anxiety: What have we learned in 60 years?. **Frontiers in psychology**, v. 7, p. 508, 2016.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais**. Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. **Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations**. Cham: Springer International Publishing, 2017.

FONSECA, M. C. F. R. et al. Letramento no Brasil: habilidades matemáticas. **São Paulo: Global**, p. 65-90, 2004.

FREIRE, Paulo. **Educação como prática de liberdade.** São Paulo: Paz e Terra, 2019.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários à prática educativa. 25ª edição. São Paulo: Paz e Terra, 2002.

GUZMAN, Miguel de. The Role of Visualization in the Teaching and Learning of Mathematical Analysis. Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate Level) Hersonissos, Creta, Grécia, 2002.

HIEBERT, James; GROUWS, Douglas A. The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**, v. 1, n. 1, p. 371-404, 2007.

MAYER, E. Richard. Multimedia learning. Cambridge, England: **Cambridge University Press**. 2009.

MODEL, Silvana Lumertz. **Dificuldades de alunos com a simbologia matemática**. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. 2005.

MORAN, J. Manuel. **A educação que desejamos: novos desafios e como chegar lá**. Papirus Editora, 2007. Disponível em: <a/educao/que/desejamos/.booksgoogle>. Acesso em 15 de nov. de 2023.

MORAN, J. Manuel. Ensino e aprendizagem inovadores com tecnologias. **Informática na educação: teoria & prática**, v. 3, n. 1, 2000.

MORAN, J. Manuel. **Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica.** Campinas, SP: Papirus. 2015

NATIONAL RESEARCH COUNCIL et al. Helping Children Learn Mathematics. **Mathematics Learning Study Committee. J. Kilpatrick, J. Swafford, and B. Findell, eds. Washington, DC: National Academy Press**, 2001.

SAVIANI, D. **Escola e democracia**. 42ª edição. Campinas-SP: Autores Associados, 2012.

TREISMAN, Anne M.; GELADE, Garry. A feature-integration theory of attention. **Cognitive psychology**, v. 12, n. 1, p. 97-136, 1980.

VALENTE, José Armando. A comunicação e a educação baseada no uso das tecnologias digitais de informação e comunicação. **UNIFESO-Humanas e Sociais**, v. 1, n. 01, p. 141- 166, 2014.

VALENTE, José Armando. Computadores e conhecimento: repensando a educação.[s. ed.]. **Campinas: Gráfica Central da UNICAMP**, p. 18, 1998.

ZIMMERMANN, Valter e CUNNIGHAM, Steve. Editor's Introduction: Visualization in Teaching and Learning Mathematics. Washington: MAA, p.121-126, 1991.