

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE – FURG  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA – IMEF  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**GILIARD DE CASTRO DA SILVEIRA**

**A RELAÇÃO DA MATEMÁTICA COM A MÚSICA:  
JUSTIFICATIVAS MATEMÁTICAS NA CONSTRUÇÃO DA ESCALA MUSICAL  
ABORDAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS CONTEXTUALIZADOS A  
CONSTRUÇÃO DA ESCALA MUSICAL**

**Rio Grande  
2022**

**GILIARD DE CASTRO DA SILVEIRA**

**A RELAÇÃO DA MATEMÁTICA COM A MÚSICA  
JUSTIFICATIVAS MATEMÁTICAS NA CONSTRUÇÃO DA ESCALA MUSICAL  
ABORDAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS CONTEXTUALIZADOS A  
CONSTRUÇÃO DA ESCALA MUSICAL**

Monografia apresentada como requisito parcial  
para a obtenção do título de Licenciado, pelo  
Curso de Licenciatura em Matemática da Univer-  
sidade Federal do Rio Grande - FURG.

Orientador: Prof. Dr. Adilson da Silva Nunes

**Rio Grande**

**2022**

**Giliard de Castro da Silveira**

**RELAÇÃO DA MATEMÁTICA COM A MÚSICA**  
**JUSTIFICATIVAS MATEMÁTICAS NA CONSTRUÇÃO DA ESCALA MUSICAL**  
**ABORDAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS CONTEXTUALIZADO A CON-**  
**STRUÇÃO DA ESCALA MUSICAL**

Monografia apresentada como requisito parcial  
para a obtenção do título de Licenciado, pelo  
Curso de Licenciatura em Matemática da Univer-  
sidade Federal do Rio Grande – FURG.

Aprovado (a) em:

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Adilson da Silva Nunes- Orientador

---

Prof. Dr. Robson Willians Vinciguerra

---

Prof. Dr. Rodrigo Soares

## AGRADECIMENTOS

## EPIGRAFE

## RESUMO

O estudo realizado neste trabalho busca compreender algumas relações da matemática com a música, partindo da análise da construção da escala musical pitagórica que resultou na atual escala temperada, buscando reproduzir os modelos matemáticos utilizados, bem como suas motivações, a fim de estabelecer o significado da importância de se aprender matemática. Diante dessa perspectiva será possível mostrar a relação íntima da matemática com a música, abordando conceitos matemáticos como: operações com frações, potenciação, progressões geométricas, logaritmos, geometria plana e suas contribuições para construção da escala musical. A partir do entendimento da construção da escala torna-se possível o entendimento da construção de instrumentos musicais, instrumentos como a flauta pã ou flauta pan, que pode ser construído em sala de aula proporcionando o desenvolvimento das habilidades manuais, bem como a criatividade, e o significado da aprendizagem, tornando concreto a teoria que se aprendeu.

**Palavras-Chave:** Matemática; Música; Pitágoras; Flauta Pã.

## **ABSTRACT**

The study carried out in this work seeks to understand some relationships between mathematics and music, starting from the analysis of the construction of the Pythagorean musical scale that resulted in the current tempered scale, seeking to reproduce the mathematical models used, as well as their motivations, in order to establish the meaning of the musical scale. importance of learning mathematics. Given this perspective, it will be possible to show the intimate relationship between mathematics and music, approaching mathematical concepts such as: operations with fractions, potentiation, geometric progressions, logarithms, plane geometry and their contributions to the construction of the musical scale. From the understanding of the construction of the scale, it becomes possible to understand the construction of musical instruments, instruments such as the pan flute or pan flute, which can be built in the classroom, providing the development of manual skills, as well as creativity, and the meaning of learning, making the theory learned concrete.

**Keywords:** Mathematics; Song; Pythagoras; Pan flute.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                  |    |
|------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 - Tetraktys .....                                       | 15 |
| Figura 2 - Monocórdio .....                                      | 16 |
| Figura 3 – Experimento Pitagórico .....                          | 16 |
| Figura 4 – Ilustração dos resultados Pitagóricos .....           | 18 |
| Figura 5 – Ilustração do ciclo das quintas em sete oitavas ..... | 28 |
| Figura 6 – Escala de Dó maior .....                              | 29 |
| Figura 7 – Escala de Dó menor.....                               | 29 |
| Figura 8 - Vibrações da corda .....                              | 30 |
| Figura 9 – Frequências relativas a nota Dó.....                  | 31 |
| Figura 10 - Frequências relativas as notas Dó e Sol.....         | 31 |
| Figura 11 - Frequências relativas as notas Dó, Mi e Sol.....     | 32 |
| Figura 12 - Indicação dos semitons .....                         | 35 |
| Figura 13 - Nomes dos semitons.....                              | 36 |
| Figura 14 - Pentagrama .....                                     | 59 |
| Figura 15 - Compasso quaternário .....                           | 59 |
| Figura 16 – Divisão dos valores .....                            | 60 |
| Figura 17 – Figuras no compasso.....                             | 60 |
| Figura 18 – Partitura do Parabéns .....                          | 63 |
| Figura 19 – Flauta Pã .....                                      | 73 |

## LISTA DE TABELAS

|                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1 – Frações do comprimento.....                                | 17 |
| Tabela 2 - Frações do comprimento associado as notas musicais .....   | 20 |
| Tabela 3 – Razão Intervalar da escala pitagórica.....                 | 23 |
| Tabela 4 - Frações do comprimento da escala cromática Pitagórica..... | 24 |
| Tabela 5 – Razão Intervalar da escala justa .....                     | 33 |
| Tabela 6 - Frequência na escala temperada .....                       | 38 |
| Tabela 7 - Comparação de frequências .....                            | 39 |
| Tabela 8 – Relação P. A/P. G .....                                    | 41 |
| Tabela 9 - Construção de logaritmos decimais.....                     | 46 |
| Tabela 10 - Tabela de Mantissas de logaritmos decimais .....          | 55 |
| Tabela 11 - Tabela da relação “logaritmando/mantissa”.....            | 55 |
| Tabela 12- Tabela 2 da relação “logaritmando/mantissa” .....          | 56 |
| Tabela 13 – Tempo das figuras.....                                    | 58 |
| Tabela 14 - Frações do comprimento (atividade) .....                  | 71 |

## **LISTA DE GRÁFICOS**

|                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------|----|
| Gráfico 1 -Tempo das figuras representadas como parte de inteiros ..... | 64 |
| Gráfico 2 – Frações resultantes.....                                    | 65 |

## SUMÁRIO

|        |                                                                            |    |
|--------|----------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.     | INTRODUÇÃO.....                                                            | 12 |
| 1.1.   | OBJETIVO GERAL.....                                                        | 13 |
| 1.2.   | OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....                                                | 13 |
| 2.     | REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....                                                | 14 |
| 2.1.   | AS CONTRIBUIÇÕES DE PITÁGORAS PARA A CONSTRUÇÃO DA<br>ESCALA MUSICAL ..... | 14 |
| 2.2.   | O CICLO DAS QUINTAS .....                                                  | 17 |
| 2.3.   | ALGUMAS GENERALIZAÇÕES A PARTIR DOS RESULTADOS<br>PITAGÓRICOS .....        | 22 |
| 2.3.1. | INTERVALO DE OITAVA.....                                                   | 22 |
| 2.3.2. | AJUSTE DE OITAVA.....                                                      | 22 |
| 2.3.3. | INTERVALO .....                                                            | 22 |
| 2.4.   | OS PROBLEMAS NA ESCALA PITAGÓRICA.....                                     | 24 |
| 2.5.   | ESCALA TEMPERADA.....                                                      | 28 |
| 2.5.1. | CONSTRUINDO A ESCALA TEMPERADA.....                                        | 35 |
| 2.5.2. | BREVE HISTÓRIA DOS LOGARITMOS.....                                         | 40 |
| 2.5.3. | ALGORITMO DE HIERÃO (10.D.C.- 75 D.C.) .....                               | 43 |
| 2.5.4. | CALCULANDO $\log_2$ .....                                                  | 48 |
| 2.5.5. | CALCULANDO $\log_3$ .....                                                  | 51 |
| 2.5.6. | CARACTERÍSTICA E MANTISSA .....                                            | 53 |
| 3.     | METODOLOGIA.....                                                           | 57 |
| 3.1.   | ATIVIDADE 1.....                                                           | 57 |
| 3.1.1. | OPERAÇÕES COM FRAÇÕES (ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO) .....                           | 57 |
| 3.2.   | ATIVIDADE 2.....                                                           | 63 |
| 3.2.1. | CONSTRUINDO GRÁFICOS COM O TEMPO DAS FIGURAS MUSICAIS...63                 |    |
| 3.3.   | ATIVIDADE 3.....                                                           | 70 |
| 3.4.   | ATIVIDADE 4.....                                                           | 74 |
| 3.5.   | ATIVIDADE 5.....                                                           | 74 |
| 4.     | CONSIDERAÇÕES FINAIS .....                                                 | 77 |

## 1. INTRODUÇÃO

Um questionamento comum encontrado entre os alunos ao aprender matemática é onde será aplicado o conhecimento, de que forma aprender matemática fará diferença em suas vidas, portanto dar significado e aplicação aos conteúdos matemáticos se torna indispensável no aprendizado. E a relação da matemática com a música se torna um tema muito interessante nesse desenvolvimento de significados, para CAVALCANTI (2010) “[...] a música é uma arte que vem sendo esquecida, mas que deve ser retomada nas escolas, pois ela propicia ao aluno um aprendizado global, emotivo com o mundo. Na sala de aula, ela pode auxiliar de forma significativa na aprendizagem”.

A música está extremamente presente em nosso cotidiano, para tudo temos um fundo musical, e ao longo de nossas vidas ouvimos muitas vozes dizendo que odeiam matemática, mas raramente ouvimos uma voz dizer que odeia música, mostrar essa relação pode contribuir para uma melhor visão da matemática.

Em um resgate histórico podemos encontrar inúmeros estudiosos que se dedicaram a estabelecer a relação da matemática com a música, estudiosos como Pitágoras, Galileu, Fourier, Fermat, Descartes, Mersenne entre tantos outros, que buscavam uma explicação matemática que pudesse expressar toda a complexidade e magnitude da música.

Em quase todos os povos da Antiguidade encontram-se manifestações destes dois campos em separados. O poder conquistador da música já se expressa na mitologia grega em Orfeu, cujo canto acompanhado de lira sustava os rios, amansava feras e movia pedras. A matemática também se faz presente desde os tempos mais remotos, por exemplo na contagem das coisas. A interação entre essas áreas torna-se fortemente manifesta a partir da necessidade de equacionar e solucionar problemas da consonância, no sentido de buscar fundamentos científicos capazes de justificar tal conceito (PERES, 2006, p. 3).

Para além das justificativas científicas de fundamentar a música, se faz necessário re-presentar a música em escrita, assim como a leitura de um texto, a execução de uma música passou por um processo de formalização, “Foi nesse contexto que um monge beneditino francês chamado Guido de Arezzo, nascido nos fins do século X, organizou o sistema de notação musical conhecido até os dias de hoje[...]”, SOUZA (s/d).

Tal formalização vem com o objetivo de registrar as composições, proporcionando a interpretação e facilitando o aprendizado, para então estabelecer a execução musical do que

está escrito, tal sistema serviu também para divulgação da obra, proporcionando que a música pudesse ser executada por qualquer que tivesse conhecimento de teoria musical, assim tornando-se possível a execução de uma música sem se quer tê-la ouvido, a música passa a ser lida assim como um texto, e expressiva de forma dinâmica assim como uma atuação de teatro.

Para se aprender teoria musical é indispensável ter conhecimento matemático, as pausas, partituras são escritas a partir inteiros e frações, a execução desses inteiros e frações nos indicam a harmonia, melodia e o ritmo das músicas. As figuras de tempo que ditam a execução melódica de uma música, podem ser uma ferramenta muito interessante para se abordar a soma de frações, visto que a escrita de um compasso segue algumas regras que precisam ser seguidas para se obter fidelidade daquilo que se deseja representar.

Nesse entendimento é notável as relações da matemática com a música, bem como o seu potencial de abordagem didático e pedagógica, e além disso, desde 2011 a Lei 11769, sancionada em 18 de agosto de 2008, determina que a música seja conteúdo de ensino obrigatório na educação básica.

Portanto, a proposta desse trabalho, é oferecer significado na aprendizagem da matemática a partir da música, proporcionando o desenvolvimento de aulas dinâmicas, com propostas de confecção de instrumentos baseados em conceitos matemáticos, explorar frações a partir da teoria e solfejo musical, determinando a duração de um som a partir de frações, construir a escala musical diatônica pitagórica, e seu aprimoramento para a escala temperada, fundamentado em justificativas matemáticas que mostram as peculiaridades, bem como a necessidade desse aprimoramento para escala temperada, que se configura hoje como a escala utilizada nas músicas que ouvimos.

### **1.1. Objetivo geral**

O presente trabalho tem por objetivo estreitar a relação da matemática com a música, e assim abordar conceitos matemáticos a partir de conceitos musicais.

### **1.2. Objetivos específicos**

- Compreender a necessidade do conhecimento matemático para a construção da escala musical, escrita musical e confecção de instrumentos.
- Promover aulas significativas, participativas e dinâmicas, associando matemática e música, como ferramenta de aprendizagem.

- Propor uma aprendizagem a partir da construção da escala musical e da experiência com material concreto.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1. As contribuições de Pitágoras para a construção da escala musical

Segundo BOYER (1996) uma das primeiras evidências da relação da matemática com a música deu-se na Grécia, mais especificamente por Pitágoras, de acordo com PEREIRA (2013) a história conta que Pitágoras ao ouvir o tilintar das marretas dos ferreiros percebeu que elas emitiam sons diferentes, alguns agradáveis entre si, e outros nem tanto, em busca do entendimento para estabelecer uma relação entre os sons agradáveis, Pitágoras deu início a sua investigação baseada em fundamentos matemáticos para desenvolver uma explicação lógica para tal fenômeno.

Ao analisar os metais manipulados pelos ferreiros percebeu que, quando um metal tinha a metade do tamanho do metal referência, obtinha-se o mesmo som, porém mais agudo, e assim estabelecendo uma relação de consonância entre os sons obtidos, e uma relação matemática de 1:2. Segundo MIRITZ (2015) em continuidade ao experimento Pitágoras construiu o Monocórdio, ao dividir a corda vibrante na mesma razão das placas de metal obteve o mesmo resultado, ou seja, ao dividir a corda ao meio, obteve o mesmo som, porém mais agudo, em seguida dividiu a corda em três partes iguais, quatro partes iguais, e ao tocar a razão 2:3, 3:4, respectivamente obteve sons consonantes, e harmoniosos entre si, tais razões foram a base para a construção da escala diatônica pitagórica.

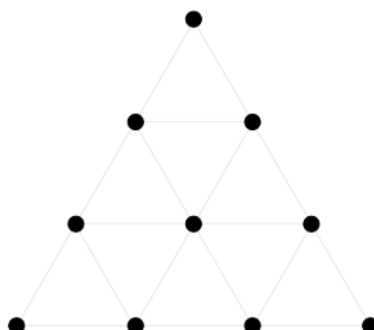
Os sons harmoniosos são emitidos por uma corda vibrante cujo comprimento é dividido segundo proporções simples, ou seja, existe uma relação entre sons harmoniosos e números inteiros. A consonância, segundo os pitagóricos, seria mais bela quanto mais simples fosse a relação proporcional entre os sons (PEREIRA, 2013, pag. 2).

Essas razões tinham um significado muito importante para os pitagóricos, pois continham os 4 primeiros números inteiros onde a soma  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ , formando o que os pitagóricos chamavam de Tetraktys, que simbolizava o princípio gerador de tudo.

Pitágoras acreditava que “a matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo”. Os números explicavam todo o universo e a vida no mundo, como expressado,

matemática e simbolicamente, através da Tetraktys, que fazia parte do juramento Pitagórico como sendo “fonte e origem da natureza eterna” (NOBRE, 2020).

Figura 1 - Tetraktys



Fonte: NOBRE (2020)

É possível observarmos a presença do Tetraktys nas frações de inteiros obtidos a partir da corda vibrante, o que possivelmente fundamentou a teoria de Pitágoras na construção da escala musical pitagórica, vejamos as frações:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$$

Os denominadores carregam a base do Tetraktys e além disso essas frações eram equivalentes ao peso das marretas dos ferreiros, que seguiam as seguintes frações:

$$\frac{12}{12}, \frac{6}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}$$

De acordo com ALMEIDA (2018) algumas particularidades podem ser extraídas a partir dessas frações, tais como média aritmética, média harmônica e proporcionalidade.

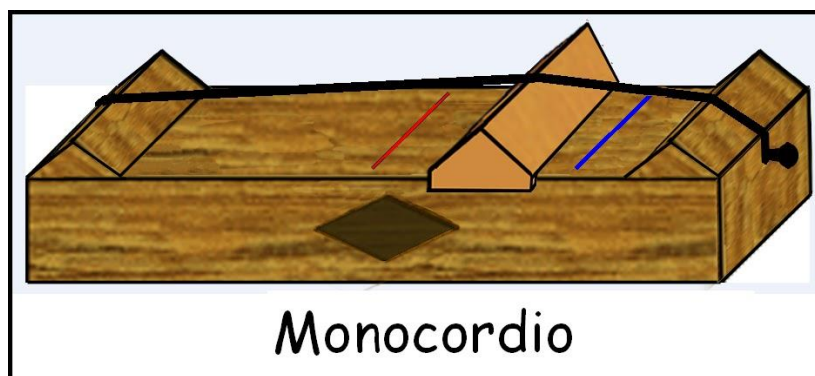
O 9 é a média aritmética entre 6 e 12, pois  $\frac{6+12}{2} = 9$

O 8 é a média harmônica entre 6 e 12, pois  $\frac{2}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}} = 8$

Proporcionalidade entre 6, 8, 9, 12, temos  $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$ .

Diante dessas construções matemáticas e dos princípios místicos dos pitagóricos, iniciava-se a escala musical pitagórica, com o auxílio do monocórdio e suas referências sonoras de consonâncias e dissonâncias.

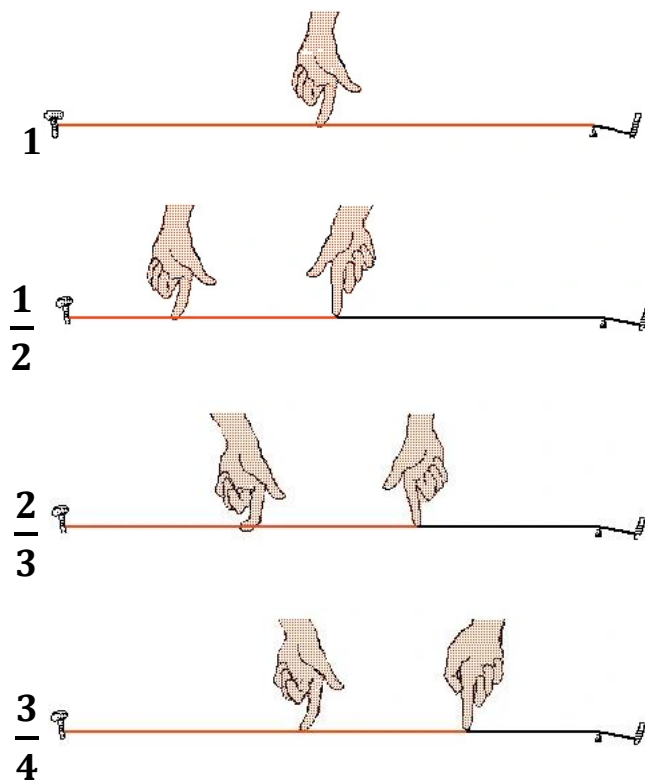
Figura 2 - Monocórdio



Fonte: ROZIMEIRI (2020)

Experimento de Pitágoras mostra as relações entre o tensionamento de uma corda e os intervalos harmônicos.

Figura 3 – Experimento Pitagórico



Fonte: COMUNE (2014)

## 2.2. O ciclo das quintas

Segundo ALMEIDA (2018), com as divisões executadas no monocórdio obtemos 4 notas, e em continuidade ao experimento através de operações aritméticas simples obteve-se a ampliação da escala para 8 notas, para tanto, utilizou-se a razão  $\frac{2}{3}$ , para determinar outros sons consonantes, ou seja,  $\frac{2}{3}$  de 1 é igual a  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{2}{3}$  é igual a  $\frac{4}{9}$ . A tabela abaixo mostra os resultados obtidos do que hoje é conhecido como ciclo das quintas, onde o significado de “ciclo de quintas” será evidenciado.

Este princípio é o mesmo que ocorre em qualquer instrumento de corda, porém não pensamos sobre isso ao ouvir uma peça no violão. As variações de frequência sonora a partir das proporções das cordas possibilitaram o surgimento de uma escala diatônica pitagórica de sete sons harmônicos, utilizando a chamada consonância pitagórica. Essa escala se baseia na sucessão de quintas, ou seja, é formada sempre multiplicando o som anterior pela razão 3:2 e permaneceu utilizada como base para a música medieval, até o fim da era renascentista, por volta de 1600, não sofrendo alterações muito significativas até o início do século XX. Experiências desse tipo também estavam sendo realizadas na China praticamente na mesma época. Ficou claro para os pitagóricos que as proporções aritméticas entre os números inteiros são capazes de produzir sons musicais, mas convém observar que naquela época ainda não se falava em ondulações e frequências sonoras ou fenômenos ondulatórios, embora fosse conhecido que o som deveria ser uma massa que se propagava pelo ar (COMUNE, 2014).

Tabela 1 – Frações do comprimento

| 1° | 2°            | 3°              | 4°            | 5°            | 6°              | 7°                | 8°            |
|----|---------------|-----------------|---------------|---------------|-----------------|-------------------|---------------|
| 1  | $\frac{8}{9}$ | $\frac{64}{81}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{16}{27}$ | $\frac{128}{243}$ | $\frac{1}{2}$ |

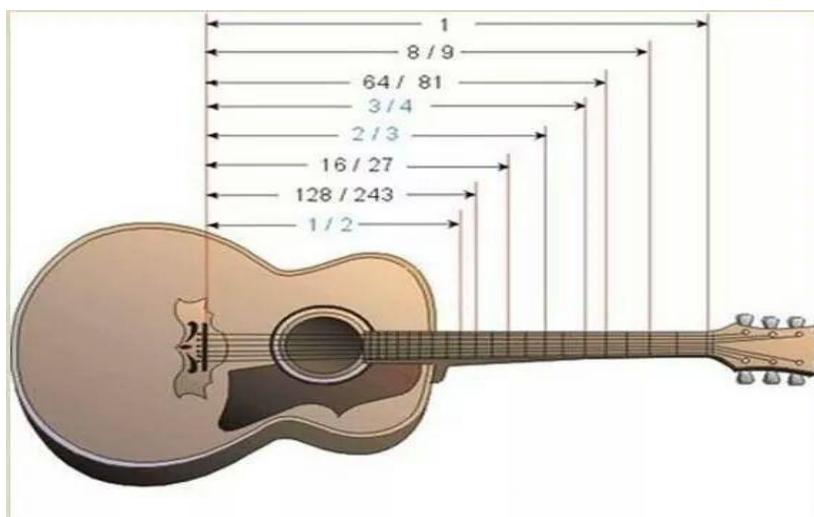
Fonte: Elaborado pelo autor

$\frac{2}{3}$ .

Partindo da corda solta, ou seja, comprimento igual a 1 multiplica-se os resultados por

- 1 (1°)
- $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ , (5°)
- $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} 2 = \frac{8}{9}$ , (2°)
- $\frac{8}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{27}$ , (6°)
- $\frac{16}{27} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{81} 2 = \frac{64}{81}$ , (3°)
- $\frac{64}{81} \cdot \frac{2}{3} = \frac{128}{243}$  (7°)

Figura 4 – Ilustração dos resultados Pitagóricos



FONTE: MATEMÁTICUÊS (2010)

Por hora, vamos compreender os ajustes necessários para a construção da tabela, feito isso, partiremos de fato para os cálculos da ideia de construção a partir do ciclo das quintas.

Observemos que  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{2}{3}$  é igual a  $\frac{4}{9}$ , porém a tabela 1 acima assume o valor  $\frac{8}{9}$ , pois trata-se de um ajuste de oitava, em outras palavras, os sons pertencentes entre a corda solta e sua metade devem ter razão maior que  $\frac{1}{2}$ , pois a razão  $\frac{1}{2}$  trata-se de uma repetição da corda solta porém mais aguda, logo as razões distintas encontradas, devem estar compreendidas entre 1 e  $\frac{1}{2}$ , dessa forma quando uma razão for menor que  $\frac{1}{2}$  devemos multiplicá-la por  $2^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , conforme o ajuste de oitava que se deseja realizar.

Vejamos os cálculos do ciclo de quintas e seus respectivos ajustes de oitava, vale lembrar que o motivo de o “ciclo de quintas” receber esse nome pode ser observado na tabela acima, onde a razão  $\frac{2}{3}$  ocupa a quinta posição de correspondência ao intervalo entre 1 e  $\frac{1}{2}$ .

De acordo com PEREIRA (2013) a generalização matemática do ciclo das quintas segue a seguinte regra:

$\varphi_n = \frac{2}{3}x$ , onde  $\varphi$  = quinta resultante,  $x$  = é a razão de referência (comprimento da corda).

Para obtermos a quinta da corda solta, ou seja, quando comprimento de corda é igual a 1, ou  $x = 1$ , aplicamos a regra para obter o resultado.

$\varphi = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$ , que corresponde ao quinto som da tabela, para obtermos a quinta da quinta,  $\varphi = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ , como já observamos  $\frac{4}{9}$  é menor que  $\frac{1}{2}$ , nesse caso devemos fazer o ajuste de oitava, onde multiplicamos por 2 a quinta obtida até que a mesma se encaixe na oitava desejada, no caso para que  $\frac{4}{9}$  pertença ao intervalo desejado basta multiplicar por 2 apenas uma vez, vejamos:  $\frac{4}{9} \cdot 2 = \frac{8}{9}$ , logo podemos perceber que  $\frac{4}{9}$  está alocada na segunda oitava e corresponde a oitava de  $\frac{8}{9}$  visto que  $\frac{1}{2}$  é a oitava de 1. Para um maior entendimento sobre a oitava basta pensar a tabela 1 acima com início em  $\frac{8}{9}$ , a oitava nota da sequência será  $\frac{4}{9}$ , pois um ciclo de oitava tem início na razão referência e termina na razão referência dividido por 2.

Logo para obter os demais sons que compõem a escala musical basta seguir esse processo  $\varphi_n = \frac{2}{3}x$ , partindo de  $x = 1$  e multiplicando os resultados por  $\frac{2}{3}$ , continuando a construção tomemos  $x = \frac{8}{9}$ , temos  $\varphi = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{27}$ , esse som ocupa a sexta posição da tabela 1,  $\varphi = \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{27} = \frac{32}{81}$ , nesse caso podemos observar a necessidade do ajuste de oitava, então  $\frac{32}{81} \cdot 2 = \frac{64}{81}$  e assim obtemos o terceiro som da tabela 1,  $\varphi = \frac{2}{3} \cdot \frac{64}{81} = \frac{128}{243}$ , que ocupa a sétima posição da tabela 1, repare que a razão  $\frac{3}{4}$  não aparece na construção do ciclo de quintas, isso deve ao fato de que essa razão já foi construída no monocórdio, além disso, se tomarmos  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{3}{4}$  temos  $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$  que corresponde ao oitavo som da tabela 1, que podemos convencionar em uma nova tabela para termos uma visão mais atual dessa construção:

Tabela 2 - Frações do comprimento associado as notas musicais

| Dó | Ré            | Mi              | Fá            | Sol           | Lá              | Si                | Dó            |
|----|---------------|-----------------|---------------|---------------|-----------------|-------------------|---------------|
| 1° | 2°            | 3°              | 4°            | 5°            | 6°              | 7°                | 8°            |
| 1  | $\frac{8}{9}$ | $\frac{64}{81}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{16}{27}$ | $\frac{128}{243}$ | $\frac{1}{2}$ |

Fonte: Elaborado pelo autor

A quinta de Dó é Sol, visto que  $\varphi = \frac{2}{3} x$ , se Dó=1, temos  $\frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$ , e olhando a tabela o sol ocupa a quinta posição que corresponde a  $\frac{2}{3}$  de 1, que representa o inteiro, ou seja, a corda solta. Seguindo esse raciocínio, a tabela 2 segue a seguinte ordenação de construção: Dó, Sol, Ré, Lá, Mi, Si. Assim, Sol é a quinta de Dó, Ré é a quinta de Sol, Lá é a quinta de Ré, vejamos; se Ré é representado pela fração  $\frac{8}{9}$ , basta multiplicar por  $\frac{2}{3}$  para obtermos a sua quinta, assim temos que  $\frac{8}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{27}$ , que na tabela acima corresponde a nota Lá.

Entender essa construção é muito importante, observe que a tabela toma como referência a nota Dó, e todas as frações são obtidas efetuando uma multiplicação por  $\frac{2}{3}$ . Após esse processo, os resultados são ordenados de forma decrescente, e o valor de cada fração irá determinar sua posição na escala. Outro detalhe que podemos observar é que Dó é a quinta de Fá, pois,  $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ , e  $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ , que equivale a Dó, no meio musical essa escala é conhecida como escala de Dó maior.

Uma maneira de visualizar o ciclo das quintas a partir do nome da nota referência seria pela contagem das notas em intervalos de 5 em 5, partindo de Fá temos:

Partindo de Fá

Fá, Sol, Lá, Si, Dó ( $\frac{1}{2}$ ), ajustando a oitava Dó (1)

Partindo de Dó:

Dó, Ré, MI, Fá, Sol ( $\frac{2}{3}$ )

Partindo de Sol:

Sol, Lá, Si, Dó, Ré ( $\frac{8}{9}$ )

Partindo de Ré:

Ré, MI, Fá, Sol, Lá ( $\frac{16}{27}$ )

Partindo da Lá:

Lá, Si, Dó, Ré, Mi ( $\frac{64}{81}$ )

Partindo de Mi:

Mi, Fá, Sol, Lá, Si ( $\frac{128}{243}$ )

Nessa construção ainda não abordamos a quinta de Si, embora a contagem nos permita a aproximar, isso iria nos induzir ao erro, visto que se faz necessário ainda compreender outros conceitos, tais como razão intervalar, tom, semitom, etc.

A caráter de curiosidade temos que a origem dos nomes das notas serem Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, segundo JUNIOR (2018), se deu:

No século XI, o monge beneditino e teórico musical Guido D'Arezzo, conhecido assim por ter nascido na cidade de Arezzo, na Itália, teve a seguinte ideia: usar as primeiras sílabas de cada verso da primeira estrofe de um hino cantado em louvor a São João Batista:

**Hino a São João Batista**

**Ut** queant laxis - Para que nós, servos, com nitidez

**Resonare** fibris - e língua desimpedida,

**Mira** gestorum - o milagre e a força dos teus feitos elogiemos,

**Famuli** tuorum - tira-nos a grave culpa

**Solve** polluti - da língua manchada.

**Labii** reatum - ó São João

Sancte **Ioannes**

Posteriormente a Ut foi substituída por Dó para facilitar o canto por ter terminação em uma vogal (JUNIOR, 2018).

E ainda segundo PEREIRA (2013):

No mundo antigo e até o Renascimento, enquanto vigorava a teoria geocêntrica de Aristóteles, os planetas conhecidos eram sete, a saber: Lua, Mercúrio, Vênus, Sol, Marte, Júpiter e Saturno. Portanto, a escolha de uma escala musical de sete sons em harmonia coincide com o conceito de harmonia das esferas celestes criado por Pitágoras (PEREIRA, 2013, p. 18).

### 2.3. Algumas generalizações a partir dos resultados pitagóricos

#### 2.3.1. Intervalo de oitava

Oitava é a nota correspondente ao dividirmos o comprimento referência em duas partes iguais, que segundo PEREIRA (2013, p. 30) podemos representá-la de forma matemática da seguinte maneira:

Seja uma oitava de ordem  $n$  entre  $Dó_n$  e  $Dó_{n+1}$ , temos o intervalo  $\left[\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n}\right]$ , onde  $n \in \mathbb{N}^*$ .

#### 2.3.2. Ajuste de oitava

De forma geral para executarmos o ajuste de oitava, de uma oitava qualquer para a primeira oitava podemos seguir a seguinte equação:  $x_1 = 2^{n-1} \cdot x_c$ , onde  $n$  é a oitava correspondente a  $x_c$ , e  $x_c$  é a fração correspondente ao comprimento de corda, tomemos  $Ré_2 = \frac{4}{9}$ , sabemos que ele está na segunda oitava logo  $x_1 = 2^{2-1} \cdot \frac{4}{9} = 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$ , que corresponde a  $Ré_1$ .

E para transpor a nota da primeira oitava para uma oitava desejada temos:

$x_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot x_c$ , logo se quisermos levar o  $Ré_1$  para a terceira oitava basta tomar  $n = 3$  e  $x_c = \frac{8}{9}$  assim,  $x_3 = \frac{1}{2^{3-1}} \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{36}$ , que simplificando temos  $\frac{2}{9}$ .

#### 2.3.3. Intervalo

Segundo PEREIRA (2013, p. 31) define-se intervalo (I) entre duas notas da escala como sendo a razão entre o comprimento relativo a cada uma das notas. Em linguagem matemática, temos:  $I = \frac{x_{c+1}}{x_c}$ , para o caso de notas consecutivas, onde  $x_c$  é o comprimento de corda correspondente a uma determinada nota e  $x_{c+1}$  é a nota sucessora.

Intuitivamente ao observarmos a tabela 1 podemos dizer que o intervalo entre Dó e Ré é  $\frac{8}{9}$ , assim podemos confirmar a intuição utilizando a definição de intervalo:

$$\frac{Ré}{Dó} = \frac{x_{c+1}}{x_c} = \frac{\frac{8}{9}}{1} = \frac{8}{9},$$

$$\frac{Mi}{Ré} = \frac{x_{c+1}}{x_c} = \frac{\frac{64}{81}}{\frac{8}{9}} = \frac{64}{81} \cdot \frac{9}{8} = \frac{8}{9},$$

$$\frac{Fá}{Mi} = \frac{x_{c+1}}{x_c} = \frac{\frac{3}{64}}{\frac{64}{81}} = \frac{3}{64} \cdot \frac{81}{64} = \frac{243}{256},$$

$I = \frac{x_m}{x_c}, c \geq m$ , para o caso de notas quaisquer.

Com a mesma intuição que observamos que o intervalo entre Dó e Ré é  $\frac{8}{9}$ , podemos observar que o intervalo entre Dó e Mi é  $\frac{64}{81}$ , ao aplicarmos a definição de intervalo para notas quaisquer temos:  $I = \frac{x_m}{x_c}, c \geq m, I = \frac{Mi}{Dó}, \frac{64}{81} = \frac{64}{81}$ , satisfazendo a intuição, podemos conhecer o intervalo entre as notas que desejamos, vale ressaltar que, para isso não gerar uma certa confusão temos que nos atentar a tabela a seguir observando a razão intervalar resultante e compreender os conceitos de tom e semitom, onde 1 tom consiste em um intervalo composto por 2 semitons, tais conceitos ficarão mais evidentes na construção da escala cromática Pitagórica, bem como o motivo de ainda não construirmos a quinta de Si.

Conforme a tabela apresentada por SILVA (2013), a diferença está no intervalo do MI para o FÁ e do SI para o DÓ.

Tabela 3 – Razão Intervalar da escala pitagórica

|                             | Dó | Ré             | Mi               | Fá                | Sol            | Lá               | Si                 | Dó                |
|-----------------------------|----|----------------|------------------|-------------------|----------------|------------------|--------------------|-------------------|
| Razão a partir de Dó        | 1x | $\frac{8x}{9}$ | $\frac{64x}{81}$ | $\frac{3x}{4}$    | $\frac{2x}{3}$ | $\frac{16x}{27}$ | $\frac{128x}{243}$ | $\frac{1x}{2}$    |
| Razão intervalar resultante |    | $\frac{8}{9}$  | $\frac{8}{9}$    | $\frac{243}{256}$ | $\frac{8}{9}$  | $\frac{8}{9}$    | $\frac{8}{9}$      | $\frac{243}{256}$ |

FONTE: Elaborada pelo autor

Podemos observar que o intervalo entre Mi e Fá, Si e Dó, são diferentes dos intervalos obtidos entre as outras notas naturais que formam a base da escala Pitagórica, pelo quadro da razão intervalar resultante, observamos que nos intervalos de Dó para Ré e Mi para Fá, por exemplo, a razão resultante é diferente, essa diferença se dá pelo fato que entre Dó e Ré temos 1 tom e entre Mi e Fá temos  $\frac{1}{2}$  tom (1 semitom), segundo IAZZETTA (2000) a razão  $\frac{8}{9}$  é denominado como tom diatônico pitagórico, e a razão  $\frac{243}{256}$  é denominado semitom diatônico pitagórico.

A fim de construirmos uma tabela com 12 notas musicais distintas precisaremos investigar a razão intervalar resultante uma a uma, tal investigação irá revelar algumas diferenças na

escala cromática Pitagórica, esclarecer o conceito de tom e semitom, bem como construir a quinta de Si.

## 2.4. Os problemas na escala pitagórica

As contribuições de Pitágoras para a construção da escala musical são inegáveis, seus estudos foram referência para o aprimoramento da escala musical que conhecemos hoje, no entanto, precisamos investigar os problemas da escala cromática pitagórica, para reforçar as contribuições do estudo da matemática para com a solução desses problemas.

Até a Idade Média, o modelo matemático de escala criado por Pitágoras era o mais aceito pela comunidade musical no Ocidente, todavia havia outros. E outros estavam sendo desenvolvidos para tentar corrigir as ‘falhas’ do modelo grego. Talvez o próprio Pitágoras também tenha percebido que o intervalo entre duas notas da escala, quer dizer, entre a frequência sonora das notas, não era sempre o mesmo. (PEREIRA, 2013, p. 31).

Dessa maneira, utilizando o ciclo de quintas é possível construir uma escala mais completa, uma escala onde constam 12 notas distintas, fechando um intervalo de oitava com 13 notas musicais ao qual se conhece como escala cromática pitagórica, que pode ser observada na tabela abaixo.

Tabela 4 - Frações do comprimento da escala cromática Pitagórica

| Dó | Dó#                 | Ré            | Ré#                   | Mi              | Fá            | Fá#               | Sol           | Sol#                | Lá              | Lá#                   | Si                | Dó            |
|----|---------------------|---------------|-----------------------|-----------------|---------------|-------------------|---------------|---------------------|-----------------|-----------------------|-------------------|---------------|
| 1  | $\frac{2048}{2187}$ | $\frac{8}{9}$ | $\frac{16384}{19683}$ | $\frac{64}{81}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{512}{729}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{4096}{6561}$ | $\frac{16}{27}$ | $\frac{32768}{59049}$ | $\frac{128}{243}$ | $\frac{1}{2}$ |

FONTE: Elaborado pelo autor

Analisando essa construção a partir do ciclo das quintas, temos a seguinte sequência de construção, partindo do Dó temos:

Dó, Sol, Ré, Lá, Mi, Si, Fá#, Dó#, Sol#, Ré#, Lá#, Fá, percebe que para essa construção foi necessário aplicar o ajuste de oitava, ou seja, ao tomarmos a fração correspondente a nota Si temos  $\frac{128}{243} \cdot \frac{2}{3} = \frac{256}{729}$ , podemos perceber que essa fração resultante é menor que  $\frac{1}{2}$ , logo faz-se

necessário o ajuste de oitava  $\frac{256}{729} 2 = \frac{512}{729}$ , onde na tabela representa a nota Fá#, o símbolo “#” é conhecido no universo musical de sustenido, o mesmo representa um “acidente” na escala musical, de forma geral o acidente altera a altura da nota musical, os acidentes podem ser ascendentes “#” sustenido ou descendentes “b” bemol, tais termos serão retomados na construção da Escala Temperada.

Analisando o ciclo de quintas em uma escala de 12 notas distintas, podemos abordar o conceito de tom e semitom com mais clareza, vale evidenciarmos que 1 tom é igual a 2 semitons, logo um semitom é igual a  $\frac{1}{2}$  tom. Sabemos que a quinta de Dó é Sol, e que de Dó para Ré temos 1 tom e de Mi para Fá temos 1 semitom, analisando a tabela 4, percebemos que entre Dó e Ré temos o Dó#, logo entre Dó e Do# temos  $\frac{1}{2}$  tom, bem como entre Dó# e Ré temos  $\frac{1}{2}$  tom, assim se contarmos de Dó até Sol temos 3 tons e 1 semitom (ou 7 semitons).

Nesse momento conseguimos compreender a quinta de Si, fato que poderia nos induzir ao erro como já evidenciado neste trabalho, pois de Si até Fá temos 3 tons, como pode ser observado na tabela 4, de Si até Dó temos  $\frac{1}{2}$  tom, de Dó até Mi temos 2 tons e de Mi até Fá temos  $\frac{1}{2}$  tom, se somarmos  $\frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 3$ , com a compreensão do conceito de tom e semitom, podemos afirmar que a quinta de Si é Fá#, o erro que poderíamos ter cometido na escala diatônica seria fazer apenas a contagem do intervalo de quinta, ou seja, Sí, Dó, Ré, Mi, Fá, temos 5 notas, porém a soma dos semitons desse intervalo é igual a 3, enquanto o intervalo Dó, Ré, Mi, Fá, Sol tem a soma de seus semitons igual a 3 e  $\frac{1}{2}$ .

Para encontrarmos os problemas na Escala Cromática Pitagórica mostraremos exemplos específicos onde existem as falhas que servirão de estudo para a construção da Escala Temperada.

O Fá ocupa a quarta posição na tabela 2, ou seja, na divisão da corda solta o Fá é representado pela razão  $\frac{3}{4}$ , mas se seguirmos a lógica de construção do ciclo das quintas, ao tomarmos  $\frac{2}{3}$  de La# que corresponde na tabela 4 a razão  $\frac{32768}{59049}$ , teremos a quinta de Lá# que é Fá, vejamos a equação:  $\frac{32768}{59049} \frac{2}{3} = \frac{65536}{177147}$

E o resultado com o ajuste de oitava, multiplicando a fração por 2, temos:

$$\frac{65536}{177147} 2 = \frac{131072}{177072} \simeq 0,7402.$$

Enquanto que  $\frac{3}{4} = 0,75$ , dessa forma, já podemos perceber uma diferença na escala, e na construção dessa escala a partir do ciclo das quintas.

Assim, para compreendermos um pouco melhor faremos o cálculo do intervalo entre duas notas, para efetuar esses cálculos utilizaremos a definição de intervalo entre duas notas musicais quaisquer, que é:  $I = \frac{x_m}{x_c}$ ,  $c \geq m$

Na tabela 4 podemos observar que Mi e Fá, bem como Lá e Lá#, são notas sucessivas, logo a razão intervalar resultante deveria ser a mesma, mas fazendo os cálculos temos:

$$I = \frac{x_m}{x_c} = \frac{Fá}{Mi} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{64}{81}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{81}{64} = \frac{243}{256} \simeq 0,9492...$$

$$I = \frac{x_m}{x_c} = \frac{Lá\#}{Lá} = \frac{\frac{32768}{59049}}{\frac{16}{27}} = \frac{32768}{59049} \cdot \frac{27}{16} = \frac{2048}{2187} \simeq 0,9364..$$

Essas razões resultantes recebem o nome de semitom diatônico pitagórico e semitom cromático pitagórico.

Analisando o intervalo entre Fá e Fá# e Fá# e Sol, respectivamente temos:

$$I = \frac{x_m}{x_c} = \frac{Fá\#}{Fá} = \frac{\frac{512}{729}}{\frac{3}{4}} = \frac{512}{729} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2048}{2187} \simeq 0,9364..., \text{ ao qual é denominado semitom cromático pitagórico.}$$

$$I = \frac{x_m}{x_c} = \frac{Sol}{Fá\#} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{529}{712}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{712}{529} = \frac{243}{256} \simeq 0,9492..., \text{ ao qual é denominado semitom diatônico pitagórico.}$$

Observando essas diferenças segundo BERTOLETTI et al (s/d, p. 2) “A escala Pitagórica deixa uma lacuna, pois usando as quintas justas não encontra uma nota correspondente ao ciclo de oitavas.” Ainda segundo BERTOLETTI et al (s/d, p. 3) “Apesar dos valores encontrados serem muito próximos, pouco mais de 1% de diferença, isto comprometia a execução musical. Esta diferença ficou conhecida como Coma Pitagórica”

O intervalo entre Sol e Fá# é um semitom diatônico:  $(3/2) / (729/512) = (256/243)$ . Mas o intervalo entre Fá# e Fá é:  $(729/512) / (4/3) = (2187/2048)$ . Esse intervalo é chamado semitom cromático pitagórico. Se tomamos uma nota qualquer, como Fá por exemplo, e subirmos 12 quintas acima chegaremos a um Mi#, sete oitavas acima do Fá inicial. Esse Mi# é chamado enarmônico de Fá e num sistema temperado corresponde, de fato, ao Fá (IAZZETTA, 2000).

Para obtermos o intervalo de um coma Pitagórica basta aplicarmos a definição de intervalo para notas quaisquer,  $I = \frac{x_m}{x_c}$ ,  $c \geq m$ , assim temos:

$$I = \frac{x_m}{x_c} = \frac{\text{semitom cromático pitagórico}}{\text{semitom diatônico pitagórico}} = \frac{\frac{2048}{2187}}{\frac{243}{256}} = \frac{524288}{531441} \simeq 0,9865... . \text{ Portanto a razão entre um}$$

semitom pitagórico e um semitom diatônico é denominado coma pitagórico

De acordo com IAZZETTA (2000), ainda podemos fazer a seguinte relação: Se ao tomarmos uma nota qualquer, e aplicarmos o ciclo das quintas doze vezes, chegaremos a uma nota integrante da sétima oitava, esse resultado obtido se o descermos 7 oitavas não chegaremos na mesma nota, vejamos se o intervalo entre essas notas corresponde a mesma nota, se a nota for a mesma o resultado da divisão deverá ser igual a 1.

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{12}}{\left(\frac{1}{2}\right)^7} = \frac{\frac{4096}{531441}}{\frac{1}{128}} = \frac{4096}{531441} \cdot \frac{128}{1} = \frac{524288}{531441} \simeq 0,9865... , \text{ onde novamente obtemos o valor do}$$

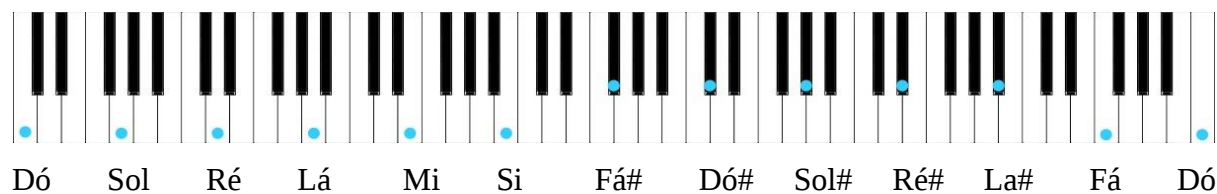
coma pitagórico.

Outra maneira de entender é pensando que o ciclo de quintas se encerra na décima segunda nota sucessora a nota referência, ou seja, a décima segunda nota deveria ser a última nota da sétima oitava da nota referência que alicerçou a construção, como mostra a figura 5.

Como o ciclo de quintas sobe 7 oitavas completas automaticamente, logo se quisermos levar a nota referência para a sétima oitava devemos dividir por 2 sete vezes, a fim de estabelecer uma igualdade que não ocorrerá pois  $\left(\frac{1}{2}\right)^7 \neq \left(\frac{2}{3}\right)^{12}$ .

Vale ressaltar que uma oitava completa compreende 2 notas iguais que são a nota referência e sua oitava, a mesma começa na nota referência e termina na primeira nota da segunda oitava, pela definição de ajuste de oitava,  $x_1 = 2^{n-1} \cdot x_c$ , onde n é a oitava correspondente a  $x_c$ , e  $x_c$  é a fração correspondente ao comprimento de corda, podemos observar que, para que  $2^{n-1}$  seja igual a  $2^7$ , temos que n é igual a 8, portanto 7 oitavas completas contemplam 8 notas referência diferenciadas apenas por altura, partindo de Dó como referência, temos que 7 oitavas completas tem 8 Dós, assim  $2^7$ , é a primeira nota da oitava oitava, e a última nota da sétima oitava.

Figura 5 – Ilustração do ciclo das quintas em sete oitavas



FONTE: Elaborado pelo autor

Vale ressaltar que, além de Pitágoras, outros estudiosos da época também buscaram justificativas matemáticas para a construção da escala musical, percebendo o problema da Escala Pitagórica, empenharam esforços para corrigir os problemas da escala, estudiosos como Arquitas de Tarento(428 a.C - 347 a.C), Aristoxeno de Tarento (360 a.C - 300 a.C), Erástones de Cirene (276 a.C - 194 a.C), entre outros que usaram de inúmeras teorias matemáticas para tal feito, mas foi somente com a construção da Escala Temperada.

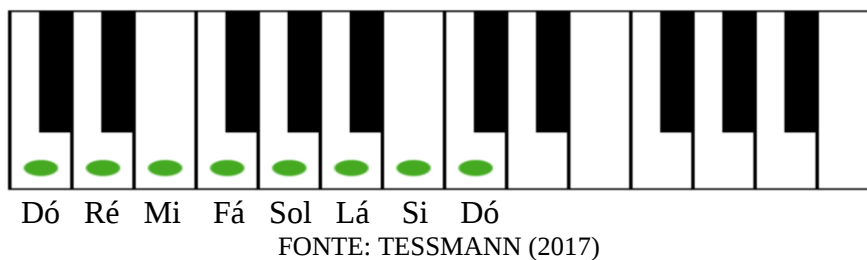
Tal escala é utilizada para a afinação de instrumentos até os dias atuais. Para a construção dessa escala abordaremos o conceito inverso ao comprimento de corda, em outras palavras, a construção se dará a partir do intervalo de frequência, ao qual a relação e definição serão abordados à medida que se torne necessário.

## 2.5. Escala temperada

Diante dos problemas encontrados em outras escalas, que se davam basicamente para efetuar modulações, em outras palavras, na troca de tom, as afinações dos instrumentos não permitiam execuções nas 24 modalidades tonais, observe que na tabela 4 temos 12 notas distintas, e as 24 modalidades tonais se devem ao fato de cada uma das notas possuir uma escala maior e uma escala menor. O que difere uma escala maior de uma escala menor, é a altura da terça, sexta e sétima, que são reduzidas em  $\frac{1}{2}$  tom (meio tom), em termos musicais a terça, sexta e sétima da escala maior sofrem um acidente descendente de meio tom, construindo a escala menor.

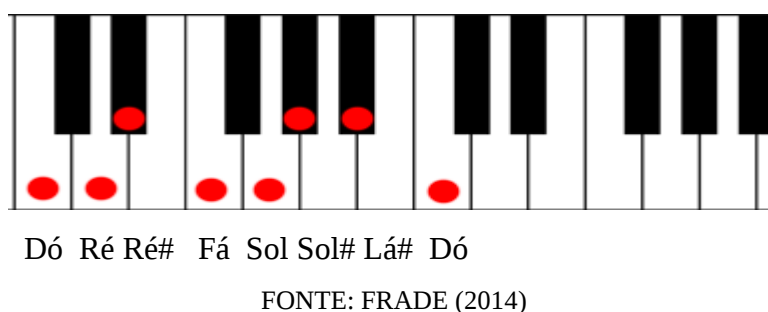
Como já mencionado a escala de Dó maior é composta por Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si.

Figura 6 – Escala de Dó maior



Já a escala de Dó menor é composta por Dó, Ré, Ré#, Fá, Sol, Sol#, Lá#, Dó.

Figura 7 – Escala de Dó menor



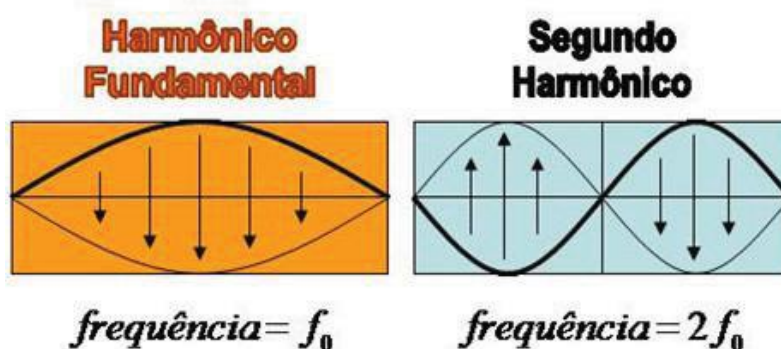
E como já foi observado a quinta de Lá# é Fá, porém já analisamos que existe uma diferença entre o Fá construído a partir do monocórdio ( $Fá = \frac{3}{4}$ ) e o Fá construído a partir da quinta de Lá#, ( $Fá = \frac{65536}{177147}$ ), e essa diferença é levada ao instrumento musical, que irá comprometer a execução harmoniosa das melodias e acordes.

Logo, para realizar esse ajuste e tornar possível a execução em qualquer tom, se fez necessário ajustar a afinação dos instrumentos, visto que, se torna muito trabalhoso afinar o instrumento a cada música a ser executada, dado esse fato, se torna fundamental a construção de uma escala que, possibilite a execução em qualquer tonalidade, sem a necessidade de ajustes constantes. Para satisfazer essa necessidade, a construção da escala temperada vem para eliminar esse problema, tornando a execução e apresentações musicais mais dinâmicas, e ainda otimizando o tempo entre a execução das músicas, pois não se faz mais necessário o ajuste do instrumento a cada troca de modalidade tonal.

Para realizar a construção da escala temperada utilizaremos o intervalo de frequência, ao contrário da abordagem da escala pitagórica ao qual utilizamos o comprimento de corda. Faremos uma breve relação entre essas grandezas, como vimos no experimento monocórdio,

quando dividimos a corda em duas partes iguais obtemos o mesmo som, porém uma oitava acima, uma oitava mais aguda, mas se pensarmos em intervalo de frequência, estaremos observando as vibrações dessa corda, e quando essa corda é dividida em duas partes iguais estaremos dobrando o número de vibrações.

Figura 8 - Vibrações da corda



FONTE: JUNIOR, RODRIGUES e SILVA (2012)

Nessa perspectiva faremos a seguinte análise:

Observando na figura 8 os gráficos de frequência do harmônico fundamental com comprimento de corda igual a 1 e do segundo harmônico com comprimento de corda igual a  $\frac{1}{2}$ , observamos que no harmônico fundamental temos uma oscilação, já no segundo harmônico temos 2 oscilações, dessa forma entendemos que, quando a corda é dividida ao meio o número de oscilações aumenta.

Dessa forma:

$L = \text{comprimento}, f = \text{frequência},$

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $L$ | $f$ | $L$ | $1$ |
| ↓   | ↑   | ↓   | ↓   |
| 1   | 1   | 1   | $f$ |

por regra de 3 simples temos que  $f \cdot L = 1 \Rightarrow f = \frac{1}{L}$

Verificando a fórmula temos que, tomando a nota Ré por exemplo com comprimento  $\frac{8}{9}$ , sua frequência será:  $f = \frac{1}{L} = \frac{1}{\frac{8}{9}} = \frac{9}{8}$ , que é o inverso de  $\frac{8}{9}$ .

E tomando Dó e suas duas oitavas sucessivas, temos em comprimento de corda;

$$\begin{array}{ccc} Dó & Dó & Dó \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}$$

Agora usando a ideia de inversamente proporcional temos as seguintes frequências;

$$\begin{array}{ccc} Dó & Dó & Dó \\ 1 & 2 & 4 \end{array}$$

Faremos agora uma construção pensando no intervalo de frequência:

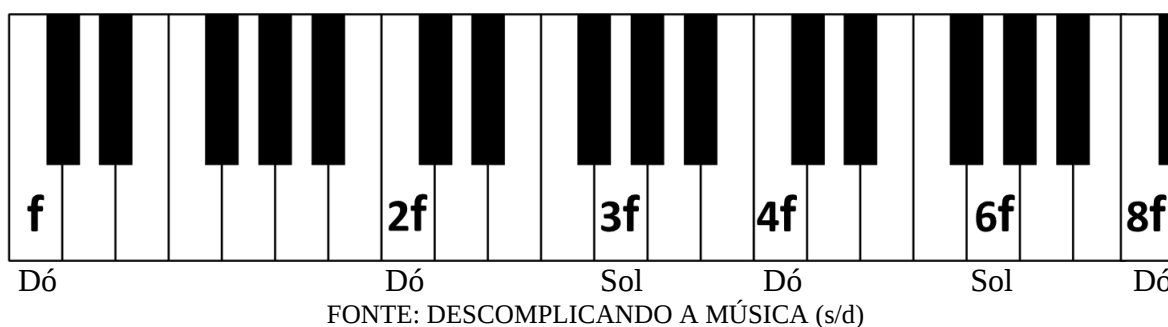
Tomando Dó como frequência fundamental com  $f = 1$ , podemos concluir as frequências das oitavas de Dó.

Figura 9 – Frequências relativas a nota Dó



Seguindo o raciocínio da divisão da corda em 3 partes iguais encontramos a nota Sol que é o terceiro harmônico, logo podemos dizer que  $3f$  é sol, e ainda podemos determinar suas oitavas multiplicando ou dividindo  $3f$  por 2.

Figura 10 - Frequências relativas as notas Dó e Sol



Segundo o site Descomplicando a Música, se olharmos para a configuração acima podemos determinar intuitivamente  $5f$ , e suas oitavas.

Figura 11 - Frequências relativas as notas Dó, Mi e Sol



Mas repare que se trouxermos  $5f$  para a primeira oitava teremos  $\frac{5}{4}$ , logo seu comprimento em uma corda será de  $\frac{4}{5}$ , o que difere da fração encontrada por Pitágoras no ciclo das quintas que é  $\frac{64}{81}$ , PEREIRA (2013, p. 34) destaca esse resultado, a se referir a Arquitas de Tarento (428 a.C - 347 a.C), “[...] A terça pitagórica correspondia a  $\frac{81}{64} \approx 1,266$  da frequência da nota fundamental, todavia, para Arquitas, a terça era a média aritmética entre a primeira e a quinta:  $f$  (3a nota):  $MA = \frac{1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4} = 1,25$ ”

Utilizando o cálculo da razão intervalar teremos:  $I = \frac{x_{c+1}}{x_c} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{64}{81}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{81}{64} = \frac{81}{80} \approx 1.0125$ , que segundo IAZZETTA (2000) é chamado de coma sintônico, que acompanhada do coma pitagórico reforçam o problema na razão intervalar. “A aritmética baseada em ciclos de intervalos de quintas da escala pitagórica leva, portanto, à existência de semitons de tamanhos diferentes e de notas enarmônicas que não são equivalentes.” (IAZZETTA, 2000).

Mesmo essa construção ainda não é capaz de ajustar o intervalo de semitons, embora ela nos mostre frações diferentes das encontradas por Pitágoras, a mesma ainda trabalha com frações de inteiros, tal fração aparece também na construção de Gioseffo Zarlino (1517-1590), que nas palavras de ALONSO (2016, p. 34) “A ideia utilizada na construção dessa escala foi, primordialmente, a de manter os intervalos sendo representados por razões de números naturais positivos, sendo estes os menores possíveis.”

Para EDILSON (2015):

Giuseffo Zarlino, do séc. XVI, intrigado com a inexatidão do sistema pitagórico, concebeu o Senário, conjunto dos seis primeiros números inteiros, capazes de gerar todas as consonâncias musicais, incluindo as imperfeitas. Enquanto o limite estabelecido por Pitágoras era o quatro, Zarlino utilizou o 6 para obter as seis primeiras divisões da corda, permitindo a inclusão no quadro de consonâncias os intervalos de terça maior,  $4/5$  (o intervalo já era conhecido, mas ainda não era considerado uma consonância), terça menor,  $5/6$  e sexta maior,  $3/5$  (EDILSON, 2015).

Tal escala é conhecida como Escala Justa e foi formalizada com a seguinte construção:

Tabela 5 – Razão Intervalar da escala justa

|                             | Dó            | Ré             | Mi              | Fá            | Sol            | Lá            | Si              | Dó            |
|-----------------------------|---------------|----------------|-----------------|---------------|----------------|---------------|-----------------|---------------|
| Razão a partir de Dó        | 1             | $\frac{8}{9}$  | $\frac{4}{5}$   | $\frac{3}{4}$ | $\frac{2}{3}$  | $\frac{3}{5}$ | $\frac{8}{15}$  | $\frac{1}{2}$ |
| Razão intervalar resultante | $\frac{8}{9}$ | $\frac{9}{10}$ | $\frac{15}{16}$ | $\frac{8}{9}$ | $\frac{9}{10}$ | $\frac{8}{9}$ | $\frac{15}{16}$ |               |

FONTE: Elaborada pelo autor

Diante desses problemas, buscou-se uma solução, e a solução seria dividir as 12 notas em intervalos igualmente distribuídos na oitava, que de acordo com IAZZETTA (2000):

Com o desenvolvimento do sistema tonal e ampliação do uso de modulações e diferentes tonalidades, o uso da escala de médio tom ou da escala pitagórica tornava-se restritivo. Uma solução foi adotar uma escala com doze semitons igualmente distribuídos pela oitava. Nessa escala, chamada de **escala temperada**, o intervalo entre Dó e Dó# é o mesmo entre Dó# e Ré. Além disso, as notas enarmônicas passam a ter a mesma frequência, o que não ocorre nas escalas pitagórica, justa e médio tom (IAZZETTA, 2000).

A dedução que temos agora em dividir o intervalo em 12 partes iguais, permite uma construção rápida da escala temperada, se torna possível devido a inúmeros esforços de diversos matemáticos, físicos, filósofos ao longo da história, na construção da escala pitagórica alguns já foram citados, e aumentando a coleção temos mais alguns nomes que colaboraram na

investigação das relações da música com a matemática de forma tão clara e perfeita, John Napier (1550 – 1617), Marin Mersenne (1588 - 1648), René Descartes (1596 - 1650), Pierre de Fermat (1601 - 1665), Leonard Euler (1707 - 1783), Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830).

As contribuições de todos esses nomes, foram imensamente importantes a formalização matemática, considerando a música como objeto de estudo, desde os logaritmos de Napier até a Série de Fourier que, segundo ZANATO (2017, p. 61):

A teoria de Fourier reuniu diversos conceitos matemático-musicais capazes de explicar de maneira satisfatória esse enigma, estabelecendo que as primeiras componentes da Série Harmônica (aquelas que são melhores percebidas pelo ouvido) correspondem as frequências associadas aos primeiros termos da Série de Fourier, estabelecendo e justificando as razões de pequenos números inteiros na consonância pitagórica (ZANATO, 2017, p. 61).

Como já observado, ao longo dos séculos tivemos inúmeras figuras que se preocuparam em mostrar a relação matemática e música, que se torna impossível citar ou mostrar as contribuições desses pilares no presente trabalho, que visa apenas mostrar de forma simples e aberta a construção das escalas Pitagórica e Temperada, bem como a abordagem de alguns conteúdos matemáticos a partir da música.

Mas o que não podemos deixar de ressaltar é a diferença de séculos entre essas escalas que começa com Pitágoras (572-500 a.C.), e passa a ser adaptada até o século XVI que segundo IAZZETTA (2000):

A escala cromática trazia um problema quando se precisava executar uma música em diferentes oitavas, tendo que refinar o instrumento em cada mudança de oitava, pois não havia o encaixe perfeito como citado anteriormente. Com o intuito de encontrar uma solução, o matemático e físico Simon Stevin(1548- 1620) criou o temperamento. IAZZETTA (2000).

Nas Palavras de ALONSO (2016):

A escala de temperamento igual, ou bem temperada, foi proposta inicialmente por Andreas Werkmeister, em 1691 e difundido principalmente por Johan Sebastian Bach, no entanto, há registros de que o príncipe chinês Chu Tsai-yu já havia utilizado essa ideia em 1596, quando escreveu um trabalho no qual calculara os comprimentos de cordas para um instrumento, usando uma escala na qual a oitava era dividida em intervalos iguais de mesma proporção (ALONSO, 2016, p. 34).

Em outros artigos, ainda é possível encontrar outros tantos nomes que colaboraram na construção da escala temperada, o que foge do objetivo do trabalho, que busca apenas compreender alguns argumentos matemáticos que possibilitam formalizar a construção da escala musical.

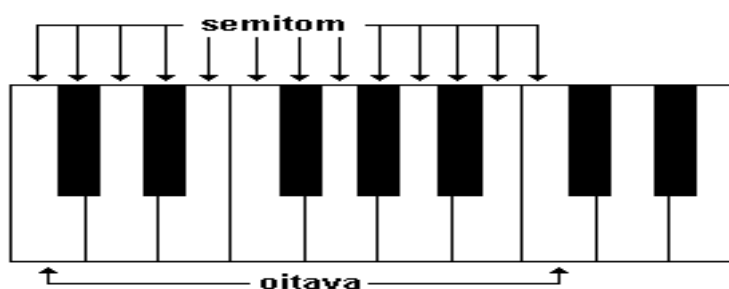
### 2.5.1. Construindo a escala temperada

Utilizando o que sabemos, ou seja, o que não mudou, construiremos a escala temperada de forma rápida, pois como já foi mencionado, para essa construção é necessário a aceitação dos números irracionais, tais números foram desprezados por Pitágoras por questões particulares, que nas palavras de RODRIGUES (1999, p. 23) “Esta diferença, a chamada coma pitagórica, está essencialmente relacionada com a impossibilidade, encontrada já pelos gregos, de medir a diagonal do quadrado através de uma fração exacta do seu lado e, portanto, também com a irracionalidade do número  $\sqrt{2}$ ”.

Sabemos que uma frequência  $f$  ao completar o ciclo de oitava obtém-se uma frequência  $2f$ , assim percorrendo 12 semitons a frequência vai aumentando, além disso sabemos que o intervalo de oitava pode ser escrito na forma exponencial, ou seja,  $\left[\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n}\right]$  onde  $n \in \mathbb{N}^*$ , utilizando frequência temos,  $[2^{n-1}, 2^n]$  onde  $n \in \mathbb{N}^*$ , para nos ajudar na interpretação dos semitons iremos reescrever o intervalo de oitava como  $[2^n, 2^{n+1}]$  onde  $n \in \mathbb{N}$ .

Logo,  $f = 1 = 2^0$  e  $2f = 2^1$ , sabemos que nesse intervalo temos 12 semitons distintos, dessa forma, podemos pensar que  $2^1 = 2^{\frac{12}{12}}$ , assim podemos encontrar qualquer frequência (nota) dentro de uma oitava, basta pensarmos na quantidade de semitons que existe entre a nota referência e a nota desejada, assim tomemos o intervalo entre Dó e Sol.

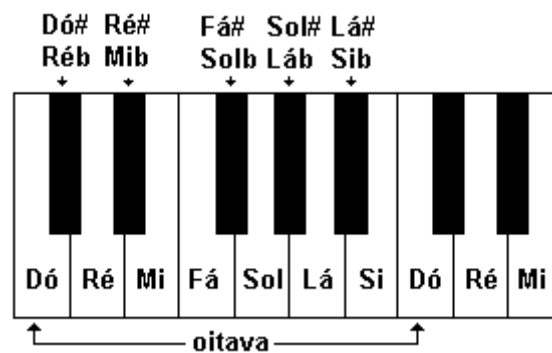
Figura 12 - Indicação dos semitons



FONTE: MÚSICA E ADORAÇÃO (s/d)

Na figura 12 podemos observar a divisão de uma oitava em intervalos de semitom, já na figura 13 os semitons foram nomeados, observe que nos acidentes (teclas pretas), os mesmos recebem dois nomes, isso deriva dos acidentes serem ascendente (#) ou descendente (b), como já mencionado neste trabalho, e além disso, quando duas notas tem o mesmo nome as chamamos de notas enarmônicas, para DAREZZO (2018) “Se tocarmos os acordes de “C#” e “Db” ouviremos o mesmo som, porém são escritos com nomes diferentes. Dessa forma, uma mesma nota pode ser escrita de mais de uma maneira.”

Figura 13 - Nomes dos semitons



FONTE: MÚSICA E ADORAÇÃO (s/d)

Fazendo a contagem temos 7 semitons, assim  $2^{\frac{7}{12}} \approx 1,498...$ , portanto essa é a frequência da nota Sol.

Vejamos a frequência entre Dó e Dó#, ou seja, um intervalo de semitom, que é o menor intervalo encontrado na escala temperada, fazendo a contagem temos 1 semitom, assim  $2^{\frac{1}{12}} \approx 1,059...$ , portanto esse valor é a diferença entre qualquer semitom da escala temperada.

Aplicando a fórmula da Razão intervalar para qualquer intervalo  $I = \frac{x_m}{x_c}$ ,  $c \geq m$ , adaptando a fórmula, faremos a inversão pois nesse momento estamos trabalhando com frequência, desse modo temos;  $I = \frac{x_f}{x_m}$ ,  $f \geq m$ , aplicando temos:

$$I = \frac{x_f}{x_m} = \frac{Dó\#}{Dó} = \frac{1,059}{1} \approx 1,059...$$

Relembrando os casos particulares da Escala Pitagórica:

$$I = \frac{x_m}{x_c} = \frac{Fá}{Mi} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{64}{81}} = \frac{3}{4} \frac{81}{64} = \frac{243}{256} \approx 0,9492...$$

Refazendo o cálculo como frequência temos:

$$I = \frac{x_f}{x_m} = \frac{Fá}{Mi} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{81}{64}} = \frac{4}{3} \frac{64}{81} = \frac{256}{243} \simeq 1,053...$$

Outro caso particular:

$$I = \frac{x_m}{x_c} = \frac{Lá\#}{Lá} = \frac{\frac{32768}{59049}}{\frac{16}{27}} = \frac{32768}{59049} \frac{27}{16} = \frac{2048}{2187} \simeq 0,9364...$$

Refazendo o cálculo como frequência temos:

$$I = \frac{x_f}{x_c} = \frac{Lá\#}{Lá} = \frac{\frac{59049}{32768}}{\frac{27}{16}} = \frac{59049}{32768} \frac{16}{27} = \frac{2187}{2048} \simeq 1,067...$$

Encontraremos as referidas frequências das notas *Mi*, *Fá*, *Lá*, *Lá#* na escala temperada que estamos construindo, e calcularemos a Razão intervalar a fim de mostrar a igualdade nos resultados.

$$Mi = 2^{\frac{4}{12}} \simeq 1,259...$$

$$Fá = 2^{\frac{5}{12}} \simeq 1,334...$$

$$I = \frac{x_f}{x_m}, f \geq m, I = \frac{x_f}{x_m} \Rightarrow \frac{Fá}{Mi} = \frac{2^{\frac{5}{12}}}{2^{\frac{4}{12}}} \simeq 1,059...$$

$$Lá = 2^{\frac{9}{12}} \simeq 1,681...$$

$$Lá\# = 2^{\frac{10}{12}} \simeq 1,781...$$

$$I = \frac{x_f}{x_m}, f \geq m, I = \frac{x_f}{x_m} \Rightarrow \frac{Lá\#}{Lá} = \frac{2^{\frac{10}{12}}}{2^{\frac{9}{12}}} \simeq 1,059...$$

Observando os cálculos percebemos que a desigualdade que tínhamos na escala pitagórica, já não existe na escala temperada. De forma um pouco mais geral podemos pensar no menor intervalo possível que chamaremos de *i* e sua trajetória percorrendo os semitons até completar uma oitava, sendo assim, temos que *i* se desloca 12 vezes partindo da fundamental, logo  $i^{12}$ , e ao completar este ciclo temos que ele atinge valor 2, portanto  $i^{12} = 2$ , com as devidas manipulações  $i = 2^{\frac{1}{12}}$  ou  $i = \sqrt[12]{2}$ .

Como já vimos para encontrar qualquer nota dentro da escala basta contar o número de semitons, logo podemos escrever *i* para um intervalo qualquer como  $i = 2^{\frac{n}{12}}$  ou  $i = \sqrt[12]{2^n}$ , onde

$n \in \mathbb{N}$ , e  $n$  é o número de semitons que separam a frequência fundamental da frequência procurada, repare que para obtermos a frequência fundamental  $n = 0$ .

Com essas informações já podemos convencionar uma tabela com as frequências que compõem uma oitava na escala temperada, vale ressaltar que outras oitavas podem ser expressas como múltiplos dessa construção.

Tabela 6 - Frequência na escala temperada

| Notas | Frequência | Nº de semitons |
|-------|------------|----------------|
| Dó    | 1          | 0              |
| Dó#   | 1,059      | 1              |
| Ré    | 1,122      | 2              |
| Ré#   | 1,189      | 3              |
| Mi    | 1,259      | 4              |
| Fá    | 1,334      | 5              |
| Fá#   | 1,414      | 6              |
| Sol   | 1,498      | 7              |
| Sol#  | 1,587      | 8              |
| Lá    | 1,681      | 9              |
| Lá#   | 1,781      | 10             |
| Si    | 1,887      | 11             |
| Dó    | 2          | 12             |

FONTE: Elaborado pelo autor

Para CAMARGOS (2011, p. 55) “matematicamente isso foi feito da seguinte forma:  $f_0 \cdot f \cdot f \cdot f \cdot f \cdot f \cdot f \cdot f \cdot f \cdot f \cdot f \cdot f \cdot f = f_0 \cdot f^{12} = 2f_0$ . Após algumas operações algébricas simples, podemos concluir que o fator  $f$  deve assumir o valor de  $2^{\frac{1}{12}}$ .”

A tabela a seguir mostra as diferenças entre as escalas construídas:

Tabela 7 - Comparação de frequências

| Escala Pitagórica | Frequência | Escala Temperada | Frequência |
|-------------------|------------|------------------|------------|
| Dó                | 1          | Dó               | 1          |
| Dó#               | 1,067      | Dó#              | 1,059      |
| Ré                | 1,125      | Ré               | 1,122      |
| Ré#               | 1,201      | Ré#              | 1,189      |
| Mi                | 1,265      | Mi               | 1,259      |
| Fá                | 1,333      | Fá               | 1,334      |
| Fá#               | 1,423      | Fá#              | 1,414      |
| Sol               | 1,5        | Sol              | 1,498      |
| Sol#              | 1,601      | Sol#             | 1,587      |
| Lá                | 1,687      | Lá               | 1,681      |
| Lá#               | 1,802      | Lá#              | 1,781      |
| Si                | 1,898      | Si               | 1,887      |
| Dó                | 2          | Dó               | 2          |

FONTE: Elaborado pelo autor

Observando a tabela 7, percebe-se as diferenças entre as escalas, que embora não pareçam diferenças gritantes quando observadas uma a uma, torna-se extremamente inconveniente, na execução de múltiplas notas, quando se trata principalmente na construção do acorde, e também na execução de vários instrumentos simultaneamente.

Embora seja fantástica a escala pitagórica a mesma se torna bem compreensível dado a baixa complexidade dos cálculos, já a escala temperada assume outro universo, a dos números irracionais, imagine-se no XVII, sem internet, sem calculadora, e tendo que calcular a  $\sqrt[12]{2}$ .

Para SANTOS (2015, p. 33) “Destaca-se que a escala temperada, utilizada atualmente na música ocidental, só foi desenvolvida face a formalização do conceito de logaritmos, realizada por John Napier (1550 - 1617)”, tal comentário torna fundamental uma breve investigação sobre o tema, a fim de compreendermos as motivações que desencadearam a formalização desse conceito, bem como esse conceito contribui para construção da escala temperada.

### 2.5.2. Breve História dos Logaritmos

Para PARDO (2015)

A palavra logaritmo vem de "logos" que em grego significa razão e "arito" número. O conceito de logaritmos foi introduzido pelo matemático escocês John Napier (1550 – 1617) e aperfeiçoado pelo inglês Henry Briggs (1561- 1630). No ano de 1614, ou seja, a mais de 400 anos passados, Napier criou uma maneira de simplificar cálculos com a invenção dos logaritmos (PARDO, 2015).

Ainda segundo PARDO (2015):

No ano de 1614, ou seja, a mais de 400 anos passados, Napier criou uma maneira de simplificar cálculos com a invenção dos logaritmos. Naquela época, multiplicar, dividir, calcular potências era um trabalho árduo. O surgimento dos logaritmos representou para a época um grande salto na realização de operações aritméticas, transformando os produtos em somas e os quocientes em diferenças. Naquele período, os logaritmos representaram um grande instrumento que alavancou os estudos da astronomia e navegação (PARDO, 2015).

Com a motivação de encontrar distâncias entre dois pontos do globo ou entre estrelas no céu, encontrar um método que otimize o tempo dos cálculos é muito importante, nas palavras de JUNIOR (2020, p. 5):

[...] lei dos cossenos na Trigonometria Esférica, envolve produtos entre senos e/ou cossenos de certos ângulos. E é este tipo de cálculo que induziu a descoberta dos logaritmos por John Napier no início do século XVII. Cálculos como os descritos na lei acima são morosos de serem feitos, além da chance de se obter resultados errôneos ser grande. Por isso, os matemáticos da época de Napier estavam bastante engajados em criar métodos de cálculo que, ao mesmo tempo que pudessem acelerar as contas a serem feitas, também minimizassem os erros cometidos. E foi pensando em um método desses que Napier criou seus logaritmos (JUNIOR, 2020).

JUNIOR (2020) destaca ainda o método da prostaférese, método baseado em relações trigonométricas para aproximar produtos e divisões, indicando que embora útil ainda era um

processo demorado, e descreve o processo como “No entanto, a ideia por trás deste método, era bastante interessante: ele transformava produtos e divisões em somas e subtrações, respectivamente”, e indica que a essência do conceito de logaritmo já era conhecido por Archimedes (287 a.C-212 a.C), “era sabido desde a antiguidade por Archimedes a relação entre potências (de uma mesma base) e seus expoentes, que é uma relação entre progressões geométricas e aritméticas”.

Nas palavras de PIPPA (2014, p. 9) encontramos destaque para o matemático alemão Johannes Werner (1468-1528), como um dos precursores do método da prostaférese, “que simplificou cálculos de comprimento em astronomia e matemática”, reforça ainda que quando Napier tomou conhecimento de tal método por volta de 1590, sentiu-se motivado a publicar seu trabalho “Mirifici logarithmorum canonis descriptio (1614)”.

De forma simplificada, observava-se que o pensamento de Napier, partia da relação entre uma Progressão Aritmética e uma Progressão Geométrica para PIPPA (2014, p. 11) Napier observou que o produto entre dois termos de uma P.G está associado a soma dos respectivos termos da P.A, dessa forma faremos a seguinte relação:

Tabela 8 – Relação P. A/P. G

|      |   |   |   |   |    |    |    |     |     |
|------|---|---|---|---|----|----|----|-----|-----|
| P. A | 0 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7   | 8   |
| P. G | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 |

FONTE: Elaborado pelo autor

Podemos reescrever a P.G. como potências de 2, ou seja,  $(2^0, 2^1, 2^2, 2^3 \dots)$ , observe que os expoentes podem ser associados a P.A., logo se desejarmos realizar a multiplicação  $2^3 \cdot 2^5$ , basta somarmos os expoentes  $2^{3+5} = 2^8 = 256$ , observe a correspondência na tabela acima. Como já mencionado essa propriedade da potenciação já era conhecida na época, o problema que existe nesse exemplo são as lacunas deixadas na P.G., que segundo SÁ (s/d) “Napier solucionou o problema das lacunas utilizando a razão  $(1 - \frac{1}{10^7})$  com resultado aproximado a 0,9999999 e para resolver o problema dessas casas decimais que se repetem, ele resolveu multiplicar as potências obtidas com essa razão por  $10^7$ ”, chegando a seguinte configuração:

$$N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L, \text{ onde } L \text{ é o logaritmo do número } N.$$

Para BOYER (1974, p. 229):

Assim, seu logaritmo de  $10^7$  é 0, seu logaritmo  $10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right) = 999999$  é 1, e assim por diante. Dividindo seus números e logaritmos por  $10^7$  teríamos virtualmente um sistema de logaritmos de base  $\frac{1}{e}$ , pois  $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$  fica próximo de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$ . Deve-se lembrar, no entanto, que Napier não tinha o conceito de base de um sistema de logaritmos, pois sua definição era diferente da nossa (BOYER, 1974, p.229).

Para LEMOS (2012) “Napier teve que efectuar um número impressionante de cálculos para construir a essa tabela, num esforço que consumiu 20 anos da sua vida.” E reforça ainda que “É importante notar que os logaritmos calculados por Napier não coincidem com o que hoje designamos por logaritmos naturais ou de base e (Napier não conhecia o número e nem se apercebeu da sua importância).”, dados esses argumentos encontramos na história o nome do matemático inglês Henry Briggs (1561-1630), que segundo SANTOS (s/d), Briggs ficou impressionado com o trabalho de Napier que decidiu ir ao seu encontro para lhe parabenizar pessoalmente, e nesse encontro definiram que:

Para facilitar o trabalho de Napier, que muitas vezes utilizou bases inadequadas, Briggs propôs a ele a mudança dos Logaritmos para uma base decimal, ou seja, a utilização da potência de dez. Ambos concordaram que o Logaritmo de 1 fosse 0 ( $\log 1 = 0$ ) e o Logaritmo de 10 (iniciando com  $\log 10 = 1$ ) fosse uma potência conveniente de 10, nascendo assim os Logaritmos Briggsianos ou Comuns, que são os Logaritmos que usamos hoje. Posteriormente, Napier e Briggs elaboraram uma tábua de Logaritmos, que é de extrema utilidade, mas com o avanço da tecnologia (com calculadoras e computadores) hoje não é muito utilizada, mas os estudos dos Logaritmos são caracterizados pela importância em diversas áreas do conhecimento humano (SANTOS, s/d).

Após a morte de Napier (1617), Briggs continuou os estudos em relação aos logaritmos, e em 1624 publicou seu trabalho “Arithmetica Logarithmica”, que de acordo com LEMOS (2012):

Continha uma tabela com os logaritmos decimais dos números inteiros de 1 a 20.000 e de 90.001 a 100.000 com uma precisão de 14 casas decimais, e a descrição do método de cálculo. O trabalho de Briggs é notável, pela originalidade e engenhosidade com que organizou os cálculos no sentido de reduzir o número de operações e de as simplificar ao máximo (LEMOS, 2012).

De acordo com ÁVILA (s/d) o procedimento utilizado por Briggs pode ser descrito como a extração sucessiva de raízes quadradas de 10, “Briggs usou esse procedimento de ir extraindo a raiz quadrada sucessivamente por 54 vezes; vale dizer, ele foi elevando o número

10 aos expoentes  $1/2$ ,  $1/2^2$ ,  $1/2^3$ ..., até chegar a  $1/2^{54}$ . Como consequência disso, ele obteve os logaritmos de vários números.”.

Em continuidade ao objetivo do trabalho que é, mostrar a justificativa matemática para a construção das escalas, buscamos compreender o método de extrações sucessivas de raízes quadradas utilizado por Briggs. O método utilizado por Briggs para essas extrações não podemos afirmar, mas em pesquisa encontramos algoritmos muito interessantes, destacamos assim o Algoritmo de Hierão, demonstrado nos trabalhos de CARVALHO (2010) e de CAMPOS (2014).

No presente trabalho aceitaremos os resultados demonstrados nos trabalhos aqui citados, bem como aceitaremos as propriedades de logaritmos e de potenciação que nos são usuais, faremos apenas a aplicação com a finalidade de vislumbrar o comprometimento de Briggs ao montar sua tabela de logaritmos, visto que não sabemos afirmar o método por ele utilizado para tal fim, dessa forma, para uma boa compreensão, sugere-se que o leitor esteja familiarizado com os tópicos mencionados, pois a intenção dessa investigação é apenas tentar compreender um pouco de como se deu o processo de construção dos logaritmos.

### 2.5.3 Algoritmo de Hierão (10.d.C.- 75 d.C.)

Para CARVALHO (2010):

O texto de Hierão menciona explicitamente a ideia de repetir o cálculo, a partir do valor obtido anteriormente, a fim de aproximar tanto quanto quisermos a raiz quadrada procurada. Obtemos assim, pela iteração do processo de Hierão, uma sucessão infinita,  $\{a_n\}$  de números  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{k}$ . Nesta sucessão, cada termo está relacionado com o anterior por,  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{k}{a_n})$  (CARVALHO, 2010).

Faremos a aproximação para  $k = 10$ , na tentativa de reproduzir o método utilizado por Briggs. Para  $a_0 = a = 1$ , temos:

$$a_1 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{10}{1} \right) = \frac{11}{2} = 5,5$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{11}{2} + \frac{10}{\frac{11}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{11}{2} + \frac{10}{1} \cdot \frac{2}{11} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{11}{2} + \frac{20}{11} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{161}{22} \right) = \frac{161}{44} \cong 3,6590 \dots$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{161}{44} + \frac{10}{\frac{161}{44}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{161}{44} + \frac{10}{1} \cdot \frac{44}{161} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{161}{44} + \frac{440}{161} \right) = \frac{45321}{14168} \cong 3,1988 \dots$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{45321}{14168} + \frac{10}{\frac{45321}{14168}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{45321}{14168} + \frac{10}{1} \cdot \frac{14168}{45321} \right) = \frac{4061315281}{1284215856} \cong 3,1624 \dots$$

$$a_5 = \frac{1}{2} \left( \frac{4061315281}{1284215856} + \frac{10}{\frac{4061315281}{1284215856}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{4061315281}{1284215856} + \frac{10}{1} \cdot \frac{1284215856}{4061315281} \right) \\ = \frac{32986385459702233621}{104331210960150591072} \cong 3,1622 \dots$$

Com esse resultado conseguimos uma aproximação de quatro casas decimais, de acordo com KILHIAN (2011) “Vamos lembrar que a tabela que Briggs construiu apresentava os logaritmos dos números inteiros de 1 a 1000, com precisão até a 14ª casa decimal! Porém a grande maioria desses logaritmos foi obtida recorrendo-se a outros anteriores calculados. Mas isso não tira o brilho de suas construções.”, dessa forma observemos que, para a aproximação de 4 casas decimais repetimos o processo 5 vezes, logo para uma aproximação de 14 casas decimais, o processo se torna bem mais longo.

Assim podemos observar que, com o conhecimento que temos hoje sobre as propriedades da potenciação e as propriedades do logaritmo, podemos fazer as seguintes relações:

$$\sqrt{10} \cong 3,1622 \dots$$

$$10^{\frac{1}{2}} \cong 3,1622 \dots$$

$$\log_{10} 3,1622 \dots \cong \frac{1}{2}$$

De fato, temos que  $\log_{10} \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ , pois utilizando as propriedades de logaritmos temos:

O logaritmo de uma raiz é igual ao inverso do índice da raiz multiplicado pelo logaritmo, em que também mantemos a base.

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$$

$$\log_{10} \sqrt[2]{10} = \frac{1}{2} \cdot \log_{10} 10$$

Como já citado, Napier e Briggs convencionaram que  $\log_{10} 10 = 1$ , assim:

$$\log_{10} \sqrt[2]{10} = \frac{1}{2} \cdot \log_{10} 10 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Diante desses resultados testamos o Algoritmo de Hierão para  $\sqrt{\sqrt{10}} = \sqrt{3,1622 \dots}$ , após 4 repetições do processo, obtemos como resultado 1,7784..., com isso temos uma aproximação de 3 casas decimais, ressaltamos que, o processo nos permite aproximar até onde nos seja conveniente, segue abaixo o cálculo.

$$\sqrt[4]{10} = \sqrt{\sqrt{10}} = \sqrt{3,1622 \dots}$$

Faremos a aproximação para  $k = \sqrt{10} = 3,1622 \dots$

Para  $a_0 = a = 1$ , temos:

$$a_1 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{10}}{1} \right) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{2}} \cong 2,0811 \dots$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{\sqrt{10}}{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{2}}} \right) = \frac{1}{36} (49 + 5\sqrt{10}) \cong 1,8003 \dots$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{36} (49 + 5\sqrt{10}) + \frac{\sqrt{10}}{\frac{1}{36} (49 + 5\sqrt{10})} \right) = \frac{1}{17208} (4511 + 8251\sqrt{10}) \cong 1,7784 \dots$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{17208} (4511 + 8251\sqrt{10}) + \frac{\sqrt{10}}{\frac{1}{17208} (4511 + 8251\sqrt{10})} \right)$$

$$= \frac{1912376485\sqrt{10} + 12743709569}{10567054224} \cong 1,7782 \dots$$

Observe que muitos passos foram omitidos, apenas montamos as equações, pois seus desenvolvimentos se tornariam muito longos, mas apenas com a perspectiva que temos, já podemos imaginar o quão trabalhoso teria sido esse processo, afim de obter as primeiras 54 raízes

aproximadas de 10, ou seja,  ${}^{2^{54}}\sqrt{10} = {}^{18014398509481984}\sqrt{10}$ , pois para obtermos  $\sqrt[2]{10}$  e a  $\sqrt[4]{10}$ , já tivemos um trabalho considerável, mesmo utilizando recurso de uma calculadora para efetuar os desenvolvimentos.

Ressaltamos que a montagem das equações está na forma de fração para que o resultado seja o mais próximo possível, caso a escrita fosse na forma decimal teríamos que colocar muitas casas decimais para obtermos uma maior fidelidade aos resultados.

Dessa maneira já conhecemos dois números logaritmos, o primeiro:

$$\sqrt{10} \cong 3,1622 \dots$$

$$10^{\frac{1}{2}} \cong 3,1622 \dots$$

$$\log_{10} 3,1622 \dots \cong \frac{1}{2}$$

E o segundo:

$$\sqrt[4]{10} = \sqrt{3,1622} \cong 1,7782 \dots$$

$$10^{\frac{1}{4}} \cong 1,7782 \dots$$

$$\log_{10} 1,7782 \dots \cong \frac{1}{4}$$

Para ÁVILA (s/d) a extração sucessiva, fica de acordo com a seguinte tabela:

Tabela 9 - Construção de logaritmos decimais

| $x$                               | $\log x$ |
|-----------------------------------|----------|
| $10^{\frac{1}{2}} \cong 3,1622$   | 0,50000  |
| $10^{\frac{1}{4}} \cong 1,7782$   | 0,25000  |
| $10^{\frac{1}{8}} \cong 1,3335$   | 0,12500  |
| $10^{\frac{1}{16}} \cong 1,1547$  | 0,06250  |
| $10^{\frac{1}{32}} \cong 1,0746$  | 0,03125  |
| $10^{\frac{1}{64}} \cong 1,0366$  | 0,01562  |
| $10^{\frac{1}{128}} \cong 1,0181$ | 0,00781  |
| $10^{\frac{1}{256}} \cong 1,0090$ | 0,00390  |
| $10^{\frac{1}{512}} \cong 1,0045$ | 0,00195  |

FONTE: Elaborado pelo autor

Como já mencionado a tabela de Briggs continha um número muito superior da que estamos mostrando, e vale destacar que Briggs aumentou sua tabela utilizando resultados conhecidos, partindo das propriedades que envolvem os logaritmos, segundo ÁVILA (s/d) uma das propriedades utilizada diz que:

$$\log a \cdot b = \log a + \log b$$

Sendo assim podemos vislumbrar algumas combinações, e dessa forma obteremos outros resultados, então tomemos  $a = 10^{\frac{1}{2}}$  e  $b = 10^{\frac{1}{4}}$ .

$$\log(10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{4}}) = \log 10^{\frac{1}{2}} + \log 10^{\frac{1}{4}}.$$

$$\log(3,1622 \cdot 1,7782) = 0,5 + 0,25$$

$$\log 5,6230 = 0,75$$

Observe que utilizando a propriedade da potenciação temos que, quando se multiplica potências de mesma base, têm-se uma nova potência onde a base é igual a base das parcelas e o expoente é a soma dos expoentes das parcelas.

$$\log 10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{4}} = \log 10^{\frac{3}{4}} = \log \sqrt[4]{10^3} = \log 5,6230 = 0,75$$

Segundo ÁVILA (s/d), vale a lembrança que essa construção é feita em função dos logaritmos decimais, e ainda nos diz que “E lembremos também que qualquer número positivo pode sempre ser escrito na forma de uma potência de 10 vezes um número  $\alpha$  compreendido entre 1 e 10, isto é,  $1 \leq \alpha \leq 10$ ”, por exemplo:

$$23\,547 = 2,3547 \times 10^4$$

$$0,0000259 = 2,59 \times 10^{-5}$$

Em vista disso, ÁVILA (s/d) também nos afirma que “...basta conhecer os logaritmos dos números entre 1 e 10 para se determinar o logaritmo de qualquer número. Esses logaritmos são as chamadas *mantissas*”.

Como mencionado, utilizando as propriedades de logaritmos é possível aumentar a tabela, o que sabemos até agora é, se tomarmos raízes quadradas sucessivamente de 10, obtemos muitos logaritmos, logo esse processo pode se estender para  $\sqrt[2^n]{10^n}$ .

Entre as argumentações utilizadas para a construção da tábua de logaritmos, acreditamos ser interessante mostrar como encontrar o  $\log 2$  e  $\log 3$  conforme VIEGAS (2021), pois utilizando as propriedades e sabendo o logaritmo desses números, podemos fazer arranjos que nos permitam encontrar os logaritmos dos números naturais entre 1 e 10, não sabemos afirmar

se os processos que serão utilizados abaixo foram utilizados por Briggs, mas mesmo diante dessa dúvida, acreditamos ser relevante mostrar de forma simples e objetiva esses processos.

#### 2.5.4 Calculando $\log 2$

Queremos saber  $10^x = 2$ , ou seja,  $\log 2 = x$ . O processo utiliza duas propriedades, que são:

$$\log a \cdot b = \log a + \log b$$

$$\log a^n = n \log a$$

Assim, procederemos da seguinte maneira:

Elevaremos o logaritmando a uma potência de 2, de tal forma que, o logaritmando fique maior que 10.

Dividiremos a expressão por uma potência de 2 equivalente a utilizada no logaritmando, assim manteremos a igualdade.

Reescreveremos o logaritmando utilizando o conceito já mencionado, que todo número positivo pode ser escrito como uma potência de 10 vezes um número  $\alpha$  compreendido entre 1 e 10, isto é,  $1 \leq \alpha \leq 10$ .

Assim temos:

$$\log 2 = \frac{\log 2^{2^n}}{2^n}$$

Observe que, para o logaritmando ser maior que 10, devemos elevar o 2 a quarta potência, assim:

$$\log 2 = \frac{\log 2^{2^n}}{2^n} = \frac{\log 2^{2^2}}{2^2} = \frac{\log 2^4}{4} = \frac{\log 16}{4}$$

Temos o logaritmando maior que 10, logo podemos reescreve-lo como:

$$\frac{\log 16}{4} = \frac{\log 10 \cdot 1,6}{4} = \frac{\log 10 + \log 1,6}{4} = \frac{1}{4}(\log 10 + \log 1,6)$$

Sabemos que  $\log 10 = 1$ , então:

$$\frac{1}{4}(\log 10 + \log 1,6) = \frac{1}{4}(1 + \log 1,6) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\log 1,6$$

O que temos até agora ainda não mostra uma aproximação para  $\log 2$ , pois não sabemos  $\log 1,6$ . Dessa forma, iremos repetir o processo com a expressão  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\log 1,6$ .

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\log 1,6 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{\log 1,6^{2^3}}{2^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{\log 1,6^8}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{32}\log 1,6^8 = \frac{1}{4} + \frac{1}{32}\log 42,94967296$$

Reescrevendo o logaritmando:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{32}(\log 10 \cdot 4,294967296) = \frac{1}{4} + \frac{1}{32}(\log 10 + \log 4,29497296)$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{32}(1 + \log 4,29497296) = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32}\log 4,29497296$$

Repetindo processo:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32}\log 4,29497296 = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32}\frac{\log 4,29497296^{2^1}}{2^1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\log 18,4467 \dots$$

Reescrevendo o logaritmando:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\log 10 \cdot 1,84467 \dots = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}(\log 10 + \log 1,84467 \dots)$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}(1 + \log 1,84467 \dots) = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64}\log 1,84467 \dots$$

Repetindo processo:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64}\log 1,84467 \dots = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64}\frac{\log 1,84467 \dots^{2^2}}{2^2} =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64}\frac{\log 1,84467 \dots^4}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}\log 11,57933 \dots$$

Reescrevendo o logaritmando:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} \log 10 \cdot 1,157933 \dots = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} (\log 10 + \log 1,157933 \dots) =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} (1 + \log 1,157933 \dots) = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{256} \log 1,157933 \dots$$

Repetindo o processo:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{256} \log 1,157933 \dots = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{256} \frac{\log 1,157933 \dots^{2^4}}{2^4}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4096} \log 10,445636 \dots$$

Reescrevendo o logaritmando:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4096} \log 10 \cdot 1,0445636 \dots =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4096} (\log 10 + \log 1,0445636 \dots) =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4096} (1 + \log 1,0445636 \dots) =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4096} + \frac{1}{4096} \log 1,0445636 \dots$$

Podemos repetir o processo até onde nos seja conveniente, porém com o que temos até agora, já é possível estimar uma aproximação para  $\log 2$ , então:

$$\log 2 \cong \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4096} + \frac{1}{4096} \log 1,0445636 \dots$$

$$\log 2 \cong (0,301025 \dots + \frac{1}{4096} \log 1,0445636 \dots)$$

Com esse resultado, obtemos uma aproximação de 5 casas decimais, em comparação com a tabela existente, assim fica evidente a engenhosidade desses matemáticos para com a

solução de problemas e construção da tábua de logaritmos. A seguir iremos mostrar outro método, desta vez calcularemos o  $\log 3$ , a fim de enriquecer nossas mentes com o conhecimento, sob a óptica daqueles que, a partir de seus notáveis estudos, nos proporcionam hoje uma ampla comodidade tecnológica.

### 2.5.5 Calculando $\log 3$

Queremos saber  $10^x = 3$ , ou seja,  $\log 3 = x$ . Para essa construção utilizaremos a tabela que construímos através do Algoritmo de Hierão.

O processo se dará da seguinte maneira:

Escolheremos em nossa [Tabela 9 - Construção de logaritmos decimais](#) a raiz mais próxima de 3, mas que seja menor que 3, ou seja,  $\sqrt[n]{10} < 3$ .

Iremos construir uma razão onde 3 será o numerador, e a raiz menor mais próxima será o denominador.

Repetiremos essas etapas enquanto nos for conveniente, para determinar uma boa aproximação, utilizaremos no numerador o resultado da equação anterior, e no denominador a raiz menor mais próxima do novo numerador.

Observando a [Tabela 9 - Construção de logaritmos decimais](#) temos que  $10^{\frac{1}{4}} \cong 1,7782\dots$ , assim efetuaremos a divisão:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{1,7782 \dots} \cong 1,6870 \dots \\ a_2 &= \frac{1,6870 \dots}{1,3335 \dots} \cong 1,2650 \dots \\ a_3 &= \frac{1,2650 \dots}{1,1547 \dots} \cong 1,0955 \dots \\ a_4 &= \frac{1,0955 \dots}{1,0746 \dots} \cong 1,0194 \dots \\ a_5 &= \frac{1,0194 \dots}{1,0181 \dots} \cong 1,001 \dots \\ a_6 &= \frac{1,001 \dots}{1,001 \dots} \cong 1,000 \dots \end{aligned}$$

Observe os denominadores e repare que, podemos reescrever os termos  $a_n$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}a_1 &= 3 \cong 10^{\frac{1}{4}} \cdot 1,6870 \dots \\a_2 &= 1,6870 \dots \cong 10^{\frac{1}{8}} \cdot 1,2650 \dots \\a_3 &= 1,2650 \dots \cong 10^{\frac{1}{16}} \cdot 1,0955 \dots \\a_4 &= 1,0955 \dots \cong 10^{\frac{1}{32}} \cdot 1,0194 \dots \\a_5 &= 1,0194 \dots \cong 10^{\frac{1}{128}} \cdot 1,001 \dots \\a_6 &= 1,001 \dots \cong 10^{\frac{1}{2048}} \cdot 1,000 \dots\end{aligned}$$

Observe que ainda podemos reescrevê-los da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}a_1 &= 10^{\frac{1}{4}} \cdot a_2 \\a_2 &= 10^{\frac{1}{8}} \cdot a_3 \\a_3 &= 10^{\frac{1}{16}} \cdot a_4 \\&\vdots \\a_6 &= 10^{\frac{1}{2048}} \cdot a_7\end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever o que observamos da seguinte maneira:

$$3 \cong 10^{\frac{1}{4}} \cdot 10^{\frac{1}{8}} \cdot 10^{\frac{1}{16}} \cdot 10^{\frac{1}{32}} \cdot 10^{\frac{1}{128}} \cdot 10^{\frac{1}{2048}} \cdot a_7$$

Retornando ao que queremos saber:

$$\begin{aligned}10^x &= 3 \\10^{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \frac{1}{2048}} &\cong 10^{\frac{977}{2048}} \cong 10^{0,4770} \cong 3\end{aligned}$$

Assim podemos concluir que:

$$\log 3 \cong 0,4770$$

Com esse resultado obtemos uma aproximação de 3 casas decimais.

Agora que sabemos o  $\log 2$  e  $\log 3$ , podemos usar as propriedades de logaritmos para encontrar outros logaritmos, por exemplo:

$$\log 6 = \log 2 \cdot 3 = \log 2 + \log 3 \cong 0,3010 + 0,4770 \cong 0,7780$$

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 \cong 1 - 0,3010 \cong 0,6990$$

Naturalmente, o que fizemos até agora, não é suficiente para construir uma tábua de logaritmo que atenda os números reais, seria necessário calcular para intervalos menores que 1, dessa maneira poderíamos encontrar outras mantissas, em vista disso, iremos entender o corpo do número logaritmo, abordaremos de forma simples o conceito de “*característica*” e “*mantissa*”, pois esses conceitos são fundamentais para interpretarmos a tábua de logaritmo que conhecemos.

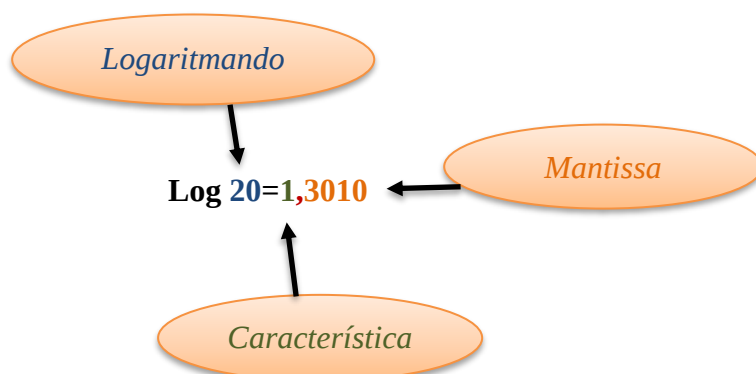
#### 2.5.6. Característica e Mantissa

Para SIMES (2011) “Quando se calcula o logaritmo de um número, encontramos um número real composto por uma parte inteira e uma parte decimal. A parte inteira é chamada de *característica* e a parte decimal é chamada de *mantissa*.”, nos diz também que, “a quantidade de algarismos do logaritmando é igual a característica mais 1.”, e reforça que, a *mantissa* tem como propriedade, não se alterar quando os logaritmos são multiplicados por uma potência de 10, tal propriedade se aplica de forma inversa para a *característica*, ou seja, a *característica* se altera quando o logaritmo é multiplicado por uma potência de 10. Em outros casos onde a multiplicação seja diferente de uma potência de 10, ambos se alteram.

Tomemos como exemplo  $\log 2 = 0,3010$ , temos que a *característica* é 0, enquanto a *mantissa* é 3010. Vejamos agora como se aplicam as propriedades:

$$\log 10 \cdot 2 = \log 10 + \log 2 = 1 + 0,3010 = 1,3010$$

Repare que agora a *característica* é 1, enquanto a *mantissa* não se alterou, ou seja, a *mantissa* continuou igual a 3010, assim, se consultarmos uma tábua de logaritmos veremos que  $\log 20 \cong 1,3010$ , repare ainda que, o logaritmando tem 2 algarismos, enquanto o logaritmo tem a *característica* com apenas 1 algarismo.



Precisamos entender que  $\log 20 \cong 1,3010$ , significa dizer que  $10^{1,3010} \cong 20$ , entendido isso, podemos retornar ao nosso questionamento, que é o motivo de toda essa investigação, com a finalidade de mostrar da forma mais aberta possível, as contribuições da matemática para com a construção da escala musical, neste caso, a escala temperada.

Como já citado em SANTOS (2015, p. 33), nos diz que a escala temperada foi formalizada, devido ao conceito de logaritmos, entendemos nessa fala que, ainda nos dias de hoje, existe uma certa dificuldade de calcular raiz quadrada, de números que não são quadrados perfeitos por exemplo, o método mais comum seria por tentativa e erro (aproximações), mas diante do conhecimento de logaritmos, podemos ter aproximações excelentes, já calculadas e dispostas nas chamadas tábuas de logaritmos.

Entendemos que a dificuldade seria calcular  $\sqrt[12]{2}$ , e diante desse problema iremos utilizar as propriedades dos logaritmos, bem como a tábua de logaritmo para tentar encontrar a solução desse problema.

Queremos calcular  $\sqrt[12]{2}$  :

$$\begin{aligned}\sqrt[12]{2} &= x \\ \log \sqrt[12]{2} &= \log x \\ \log 2^{\frac{1}{12}} &= \log x\end{aligned}$$

Aplicando a propriedade,  $\log a^n = n \log a$ :

$$\begin{aligned}\frac{\log 2}{12} &= \log x \\ \frac{0,30101}{12} &= \log x \\ 0,025085 &\cong \log x\end{aligned}$$

Dessa forma vamos investigar o número 0,025085, observe que, o que encontramos é o valor do  $\log x$ , e olhando para a *característica* e para a *mantissa* desse número, iremos determinar o valor de  $x$ , que é o nosso logaritmando.

Sabemos que a *característica* é a parte inteira, de forma simples, o que está à esquerda da vírgula, enquanto a *mantissa* está à direita. Assim olhemos para a *característica*, pois olhando para ela, podemos determinar a quantidade de algarismos do logaritmando.

Como já mencionado, *característica* mais um é igual ao logaritmando, assim:

$$C + 1 = L$$

$$0 + 1 = 1$$

Isso nos diz que, o logaritmando tem apenas 1 algarismo a esquerda da vírgula.

Olhemos agora para a *mantissa* 025085, devemos procurá-la em uma tábua de logaritmos, na tabela que consultamos, não encontramos exatamente a *mantissa* que estamos procurando, mas encontramos *mantissas* próximas, e através de algumas operações matemáticas, podemos determinar o número que estamos procurando.

Olhando na tabela temos:

Tabela 10 - Tabela de Mantissas de logaritmos decimais

| N  | 0      | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      |
|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 10 | 000000 | 004321 | 008600 | 012837 | 017033 | 021189 | 025306 | 029384 | 033424 | 037426 |
| 11 | 041393 | 045323 | 049218 | 053078 | 056905 | 060698 | 064458 | 068186 | 071882 | 075547 |
| 12 | 079181 | 082785 | 086360 | 089905 | 093422 | 096910 | 100371 | 103804 | 107210 | 110590 |
| 13 | 113943 | 117271 | 120574 | 123852 | 127105 | 130334 | 133539 | 136721 | 139879 | 143015 |
| 14 | 146128 | 149219 | 152288 | 155336 | 158362 | 161368 | 164353 | 167317 | 170262 | 173186 |

FONTE: Elaborado pelo autor

Repare que destacamos a *mantissa* do número 105 e a *mantissa* do 106, com esse entendimento faremos uma relação desses resultados:

Tabela 11 - Tabela da relação “logaritmando/mantissa”

| Logaritmando | Mantissa |
|--------------|----------|
| 105          | 021189   |
| 105 + x      | 025085   |
| 106          | 025306   |

FONTE: Elaborado pelo autor

Note que a *mantissa* que encontramos, está compreendida entre as outras *mantissas*, assim utilizaremos a proporcionalidade, para encontrar o valor de  $x$ .

$$106 - 105 = 1 \quad - \quad 025306 - 021189 = 4117$$

$$105 + x - 105 = x \quad - \quad 025085 - 021189 = 3896$$

Dessa forma, podemos escrever uma regra de três simples, logo:

$$1 - 4117$$

$$x - 3896$$

$$x = \frac{3896}{4117} = 0,9463$$

Reescrevendo a tabela substituindo  $x$ , temos:

Tabela 12- Tabela 2 da relação “logaritmando/mantissa”

| <i>Logaritmando</i> | <i>Mantissa</i> |
|---------------------|-----------------|
| 105                 | 021189          |
| 105 + 0,9463        | 025085          |
| 106                 | 025306          |

FONTE: Elaborado pelo autor

Assim, nosso logaritmando é 105,9463, mas lembrando que,  $C + 1 = L$ , devemos deixar a vírgula na posição apropriada, assim como nos mostra o logaritmo que encontramos, que é 0,025085, e de acordo com o que calculamos, tem o logaritmando com 1 algarismo, assim:

$$\log 1,059463 \cong 0,025085$$

Retornando:

$$\log 1,059463 \cong \frac{0,30131}{12}$$

$$\log 1,059463 \cong \frac{\log 2}{12}$$

$$\log 1,059463 \cong \log 2^{\frac{1}{12}}$$

$$\log 1,059463 \cong \log \sqrt[12]{2}$$

$$\sqrt[12]{2} \cong 1,059463$$

Entendemos como extremamente necessário, essa tentativa de compreender o nascimento, e desenvolvimento do conceito de logaritmos, afinal, alguns autores afirmam que, a formalização da escala temperada se deu baseada nesse conceito, dessa maneira, nos sentimos motivados a investigar, e tratar o problema com ótica similar ao da época ao qual ele foi solucionado, e assim, mostramos um pouco do quanto a matemática colaborou para a construção da escala temperada.

### 3. METODOLOGIA

Diante dos conceitos abordados ao longo do trabalho, destacamos algumas atividades que acreditamos ter um grande potencial pedagógico, tais atividades envolvem além da aritmética e da álgebra, representações geométricas, bem como representações sonoras dos resultados, tornando visual e audível os resultados obtidos, desenvolvendo uma relação espacial dos temas abordados, possibilitando assim, uma melhor compreensão dos conceitos.

Dessa forma, relacionar matemática e música, fortalece a importância de se aprender matemática, além de tornar a sala de aula um ambiente mais acolhedor e dinâmico com a proposta de inserir a música na vida escolar.

#### 3.1. Atividade 1

➤ Tempo estimado: 4hs/aula

##### 3.1.1. Operações com frações (Adição e subtração)

A dinâmica dessa atividade consiste na apresentação básica de algumas notações musicais, tais como as figuras que representam o tempo das notas e suas pausas, a posição das notas e pausas no pentagrama, com o objetivo de desenvolver o entendimento de fração, maior e menor, bem como a operação de adição com fração, e através do solfejo, representar as frações a partir do som.

Vale ressaltar que a atividade pode ser adaptada para qualquer ano escolar, onde o teor de dificuldade pode ser aumentado ou diminuído, além disso, outras figuras musicais podem ser exploradas, tais como, tercinas, ponto de aumento, compassos compostos, binários, ternários, etc.

A abordagem nos exemplos da atividade desse trabalho se sustenta em compasso quaternário simples, além disso, para a realização da atividade em nível escolar onde aborde frações é fundamental que, os alunos tenham em mãos a tabela de figuras musicais e seus valores.

Ao fim da atividade espera-se que os alunos sejam capazes de montar estratégias, que a escrever um compasso no pentagrama com diversas combinações de frações.

Para a realização da atividade sugere-se que o professor introduza o tema apresentando a *Tabela 13 – Tempo das figuras*, conceitue o *Figura 14 - Pentagrama*, desenvolva o conceito da *Figura 15 - Compasso quaternário*, e mostre alguns exemplos de equivalência entre as notas, assim como mostra a *Figura 16 – Divisão dos valores* para então abordar a escrita de um compasso, como mostra a *Figura 17 – Figuras no compasso*

Figuras musicais e seus valores:

Tabela 13 – Tempo das figuras

| Som                                                                                 | Pausa                                                                               | Nome                     | Duração |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|---------|
|  |  | Semibreve - 4 tempos     |         |
|  |  | Mínima - 2 tempos        |         |
|  |  | Semínima - 1 tempo       |         |
|  |  | Colcheia - 1/2 tempo     |         |
|  |  | Semicolcheia - 1/4 tempo |         |
|  |  | Fusa - 1/8 tempo         |         |
|  |  | Semifusa - 1/16 tempo    |         |

FONTE: ESSAS E OUTRAS (s/d)

### Conhecendo o pentagrama:

**Pentagrama** - Conjunto de 5 linhas horizontais e paralelas entre si e 4 espaços, formando 9 locais onde são escritas as notas (TESSMANN, 2017).

Figura 14 - Pentagrama

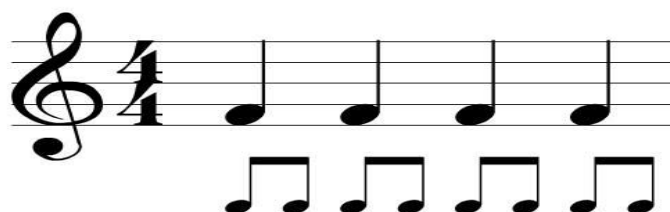


FONTE: MÚSICA E ADORAÇÃO (s/d)

### Conhecendo o compasso quaternário:

**Compasso quaternário**- Informa quantas figuras cabem em cada compasso. Observe que o numerador desta fração está dizendo que cabem 4 figuras em um compasso, e o denominador está dizendo que a figura é a semínima, portanto, a fração 4/4 informa que cabem 4 semínimas em um compasso (DESCOMPLICANDO A MÚSICA , s/d).

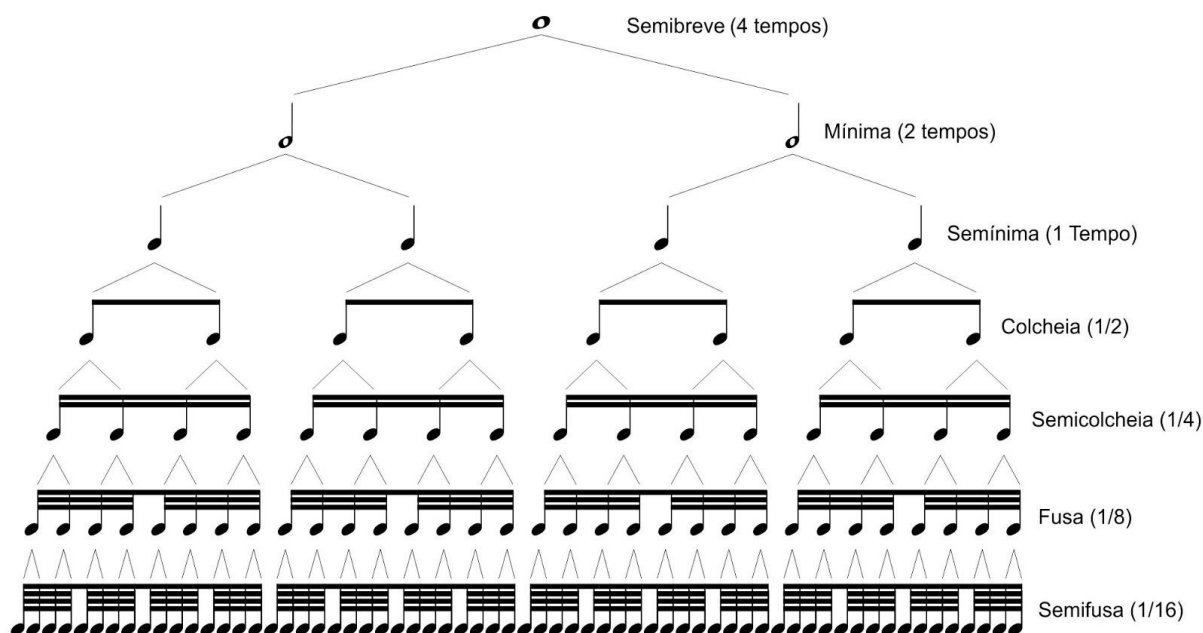
Figura 15 - Compasso quaternário



FONTE: DUPRÁ (2015)

## Divisão proporcional dos valores:

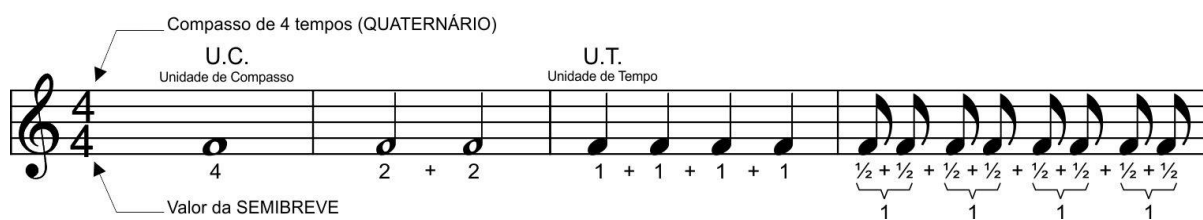
Figura 16 – Divisão dos valores



FONTE: CARVALHO (2017)

## Distribuindo as figuras no compasso:

Figura 17 – Figuras no compasso



FONTE: CULTURA MIX (2019)

Com as devidas explicações desenvolvidas, partiremos para a prática, e faremos algumas operações matemáticas, em particular a soma de frações, pois para a escrita de um compasso musical, é fundamental ter domínio dessa operação.

### Exemplos:

Figuras utilizadas para montagem dos exemplos:



A)  $\text{O} = 4$

B)  $\text{J} + \text{J} = \text{O} = 4$

C)  $\text{J} + \text{J} + \text{J} + \text{J} = \text{J} + \text{J} = \text{O} = 4$

D)  $\text{J} + \text{J} + \text{J} + \text{Z} + \text{Y} + \text{Y} = 4$

E)  $\text{J} + \text{J} = 2 + 1 = 3$

F)  $\text{O} + \text{J} = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$

G)  $\text{J} + \text{J} + \text{J} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

H)  $\text{J} + \text{Z} + \text{J} + \text{Y} = \frac{1}{8} + 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{2} = \frac{2+16+1+8}{16} = \frac{27}{16} = 1\frac{11}{16}$

Observando os cálculos vemos que apareceram números mistos, no exemplo “f” o 4 representa um compasso quaternário inteiro, logo  $\frac{1}{2}$  representa apenas uma parcela do próximo compasso.

Assim para os outros exemplos onde não obtemos o valor 4, necessitam que o compasso seja preenchido, até a soma dos termos ser igual a 4. Os exemplos A, B, C, D, mostram equivalências nos tempos das figuras e formas de escrita para se obter 4 tempos, enquanto os exemplos E, F, G, H, mostram que ainda é necessário completar o compasso.

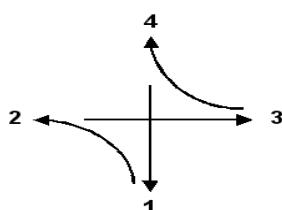
No pentagrama abaixo cada letra do exercício acima corresponde a um compasso, observe a escrita dos 4 primeiros compassos (A, B, C, D) e preencha o restante (E, F, G, H)

Como já comentado o teor de dificuldade pode ser elevado de acordo com o nível escolar, assim é possível confeccionar os exercícios de forma a serem mais desafiadores.

### Descontração:

Para tornar a soma de fração e a escrita de compasso mais palpável, faremos um exercício de solfejo para dar som e tempo as figuras. Para essa dinâmica será necessário que algum participante da atividade assuma o papel de maestro e realize a contagem do compasso.

### Quaternário



Sugere-se a pauta do “Parabéns a você”, pois a mesma tem tempos bem acessíveis de serem expressados para essa atividade. A partitura deve ser apresentada sem nome, para que os alunos através do solfejo tenham condições de realizar a conexão do seu solfejo com a melodia em questão.

Figura 18 – Partitura do Parabéns



FONTE: POLIFONO (2020)

### 3.2. Atividade 2

- Tempo estimado: 4 hs/aula

#### 3.2.1. Construindo gráficos com o tempo das figuras musicais

A dinâmica dessa atividade é construir gráficos relativos ao tempo de duração das figuras musicais, e compreender que no caso da tabela onde foram apresentadas as figuras, a figura semibreve de 4 tempos corresponde a 1 inteiro dada a sua relação com o compasso quadrário.

Para a construção dos gráficos sugere-se a utilização de régua e compasso. Assim o aluno começa a se familiarizar com essas ferramentas, que serão de extrema importância para o desenvolvimento da **Atividade 3**.

## Gráfico de barras

### Exemplo:

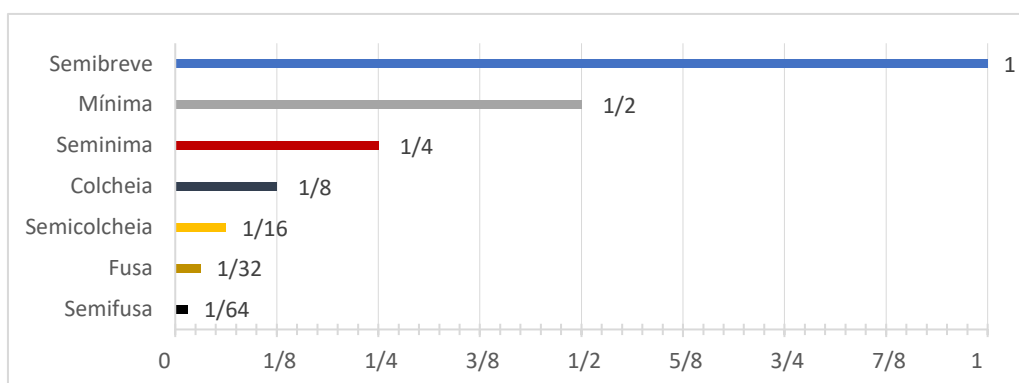
Com régua e compasso devemos efetuar a divisão do inteiro, para tanto, devemos introduzir alguns conceitos geométricos, como mediatriz e ponto médio.

Observe que para obter a mínima devemos dividir a semibreve em duas partes iguais.

Para obter a semínima devemos dividir a mínima em duas partes iguais, ou dividir a semibreve em quatro partes iguais, e assim é possível estabelecer outras relações, o interessante é que o aluno perceba essas correspondências.

O gráfico 1 mostra os resultados esperados para essa primeira construção.

Gráfico 1 -Tempo das figuras representadas como parte de inteiros



FONTE: Elaborado pelo autor

Dada a construção, pode-se propor novamente algumas operações, afim de representar um gráfico com os resultados, tornando visível a proporção de qual fração é maior ou menor.

### Exemplo:

Utilizando o gráfico 1, calcule e represente graficamente os resultados obtidos:

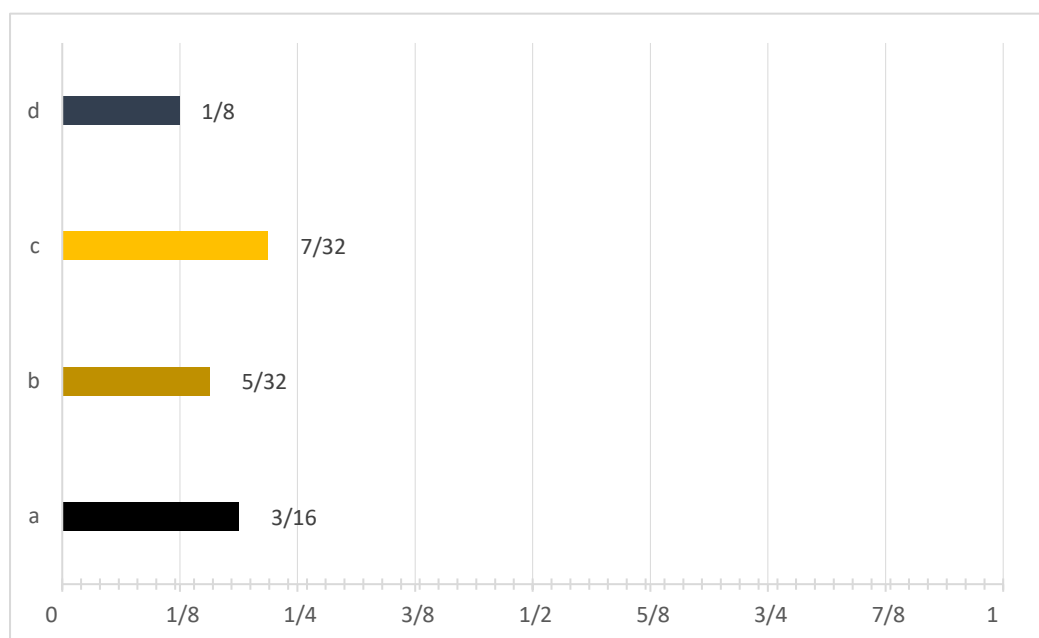
a)  $\text{♪} + \text{♪} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{2+1}{16} = \frac{3}{16}$

b)  $\text{♪} + \text{♪} = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{4+1}{32} = \frac{5}{32}$

c)  $\text{♪} + \text{♪} + \text{♪} = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} = \frac{4+1+2}{32} = \frac{7}{32}$

d)  $\text{♩} - \text{♪} - \text{♪} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{4-1-2}{8} = \frac{1}{8}$

Gráfico 2 – Frações resultantes



FONTE: Elaborado pelo autor

Observe que, para a construção do gráfico devemos fazer a conexão da figura semibreve (4 tempos) como 1 inteiro, definido isso, basta que na letra “a” efetuemos a divisão do inteiro em 16 partes iguais, ao qual utilizaremos apenas 3 partes no gráfico.

Para “b” e “c”, dividiremos o inteiro em 32 partes iguais, ao qual utilizaremos para “b” 5 partes, e para “c” 7 partes.

Para “d”, basta dividir o inteiro em 8 partes iguais e utilizar apenas uma parte no gráfico.

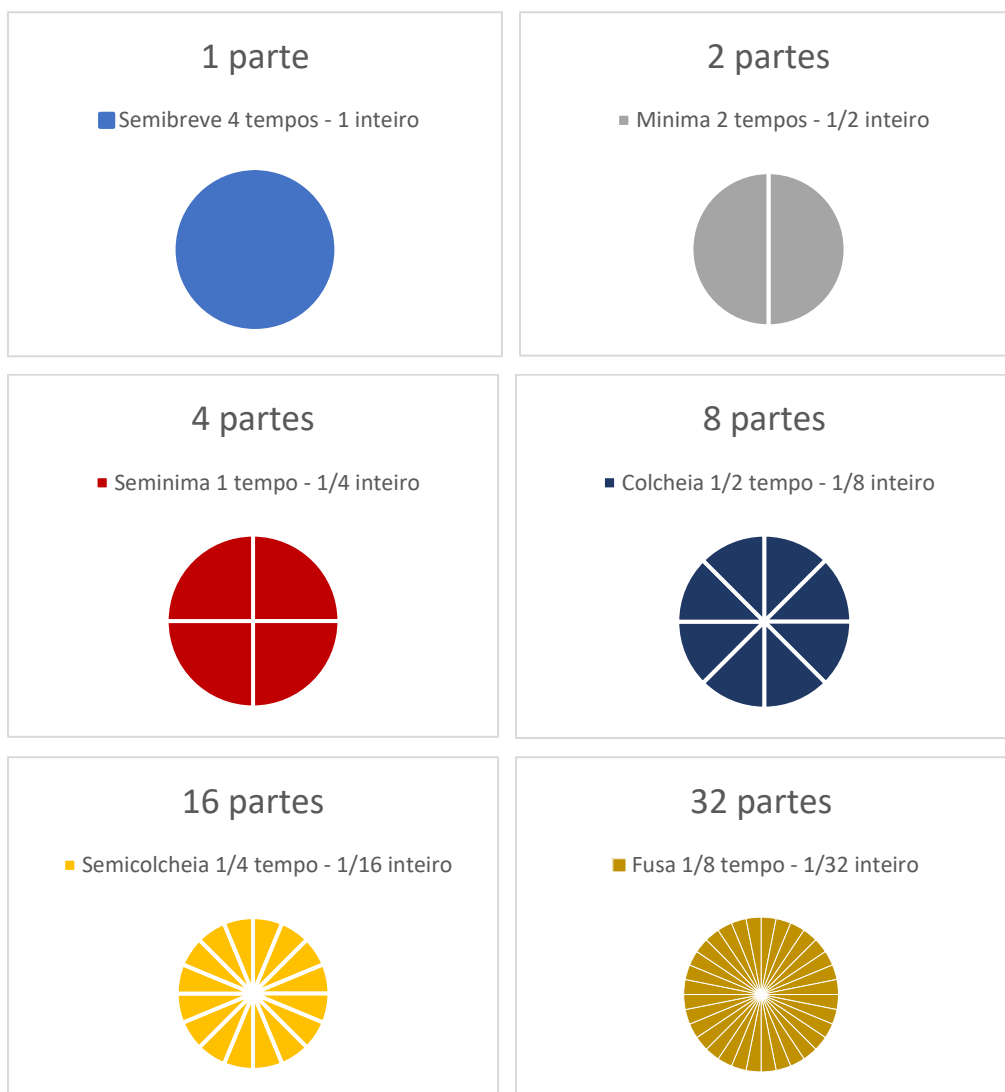
### Gráfico de pizza

Com a mesma lógica do gráfico de barras, iremos construir gráficos de pizza, para tanto, iremos utilizar conceitos geométricos, que devem ser desenvolvidos com a participação dos alunos.

O professor introduz a ideia de diâmetro, raio, divisão de segmento, e propõe aos alunos que, esbocem ideias de como dividir o círculo em múltiplos de 2, repare que ao traçarmos um segmento de reta, e em algum ponto desse segmento traçamos um círculo, já obtemos a divisão do círculo em duas partes iguais. O objetivo é dividir o círculo em 64 partes iguais, e assim desafiar os alunos a efetivar o conceito de equivalência de tempo.

As divisões abaixo representam:

#### Tempo das figuras representada como parte de inteiros no círculo

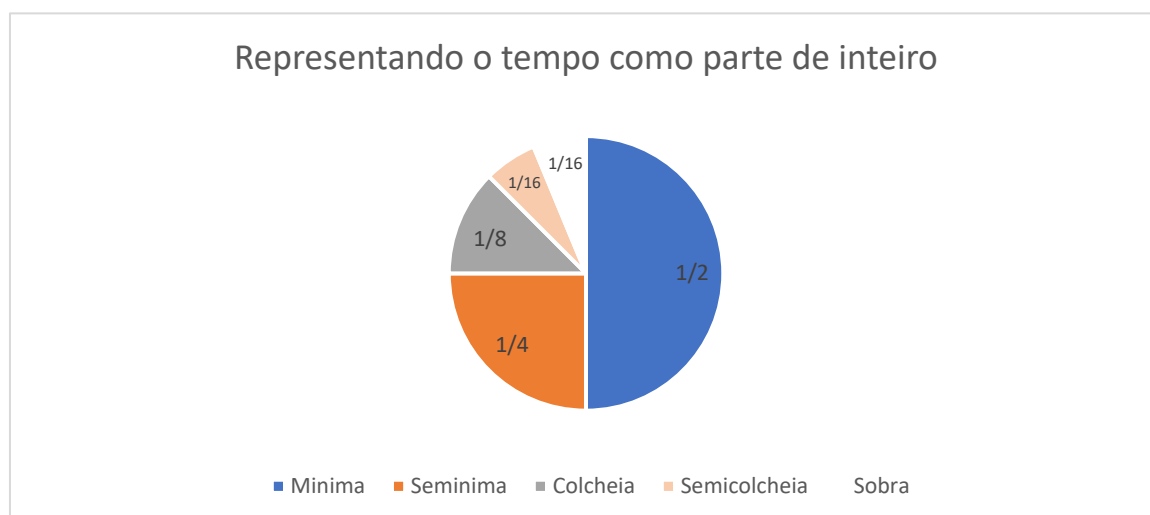




### Exemplo:

Represente a sequência de figuras musicais no gráfico de pizza, destacando cada figura com uma cor diferente, e especifique as relativas partes do inteiro.

Exemplo construído com os alunos.



O objetivo da atividade acima é montar estratégias para representar todas as figuras no gráfico, percebendo as equivalências entre os tempos, pois para montar esse gráfico podemos primeiro dividi-lo em 16 partes iguais, pois a semicolcheia pode ser expressada 16 vezes dentro de uma semibreve, que equivale ao nosso inteiro, e assim podemos fazer as seguintes relações.

$$\text{semibreve} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\text{meia nota} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\text{quarta nota} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$\text{oitava nota} = \frac{1}{16}$$

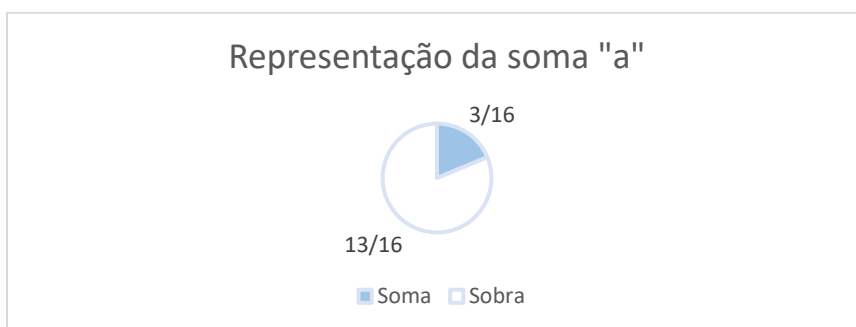
Represente no gráfico as seguintes somas, utilize a *Tabela 13 – Tempo das figuras* para realizar a soma, depois faça a conversão e represente no gráfico como partes do inteiro.

a)  $\text{meia nota} + \text{quarta nota} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$

Repare que temos  $\frac{3}{4}$  de tempo, logo temos que fazer a conversão para representar no gráfico, procederemos com regra de 3 simples para efetuar a conversão.

Se 4 tempos equivalem a 1 inteiro,  $\frac{3}{4}$  de tempo equivale a quantas partes do inteiro?

$$\begin{array}{ccc} 4 & - & 1 \\ \frac{3}{4} & - & x, \end{array} \quad \text{assim,} \quad x = \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$



b)  $\text{meia nota} + \text{oitava nota} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{4+1}{8} = \frac{5}{8}$

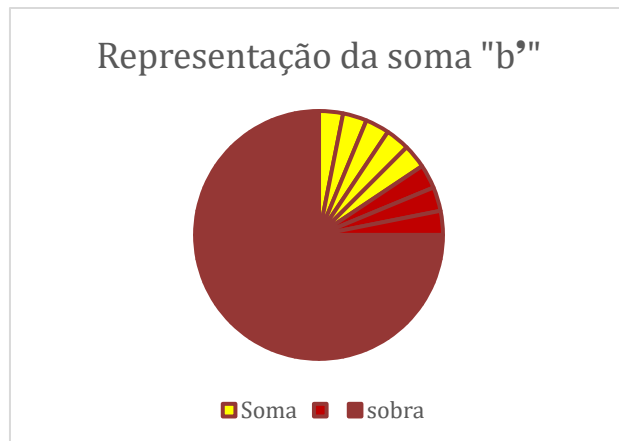
Se 4 tempos equivale a 1 inteiro,  $\frac{5}{8}$  de tempo equivale a quantas partes do inteiro?

$$\begin{array}{ccc} 4 & - & 1 \\ \frac{5}{8} & - & x, \end{array} \quad \text{assim,} \quad x = \frac{5}{8} = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{32}$$



O objetivo da atividade acima é fazer com que os alunos busquem estratégias para fazer a conversão, a estratégia utilizada para efetuar a conversão foi a regra de 3. Espera-se que os alunos articulem teorias para chegar ao resultado, e percebam que estamos trabalhando com números mistos, e que a cada soma resultante em 1 teremos  $\frac{1}{4}$  do inteiro.

Outra maneira para se obter o resultado da letra “b” seria pensar, como representar  $\frac{5}{8}$  dentro de  $\frac{1}{4}$ . O gráfico “representação da soma “b””, logo abaixo, mostra a ideia de se pensar dessa maneira.



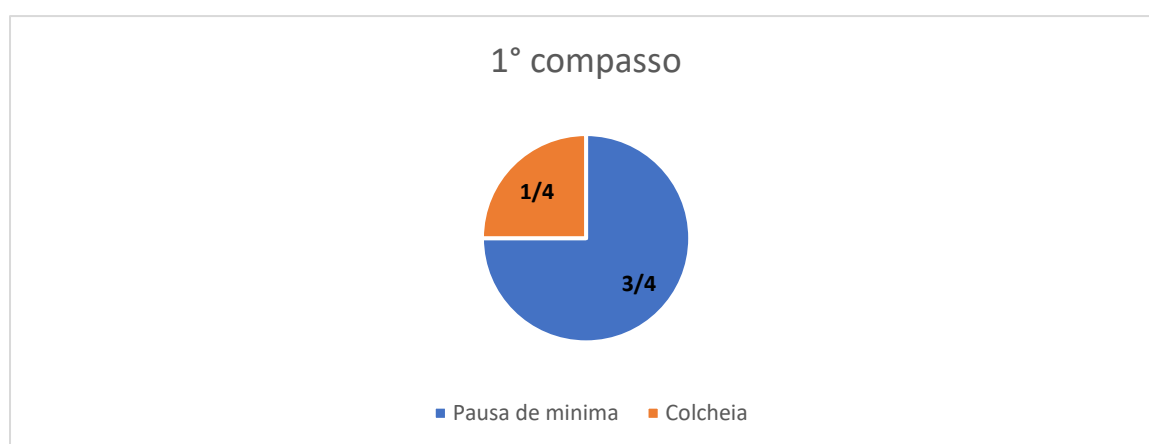
Basta dividirmos o círculo em 4 partes iguais, tomamos  $\frac{1}{4}$  do círculo e dividimos em 8 partes, e assim tomamos 5 partes das 8, logo a divisão simétrica do círculo será em 32 partes iguais, já que uma das 4 partes foi dividida em 8 partes, as outras partes seguem a mesma divisão, no todo tomamos 5 partes de 32 partes, que podemos representar por  $\frac{5}{32}$ , é fundamental que se faça a relação  $\frac{5}{8}$  de  $\frac{1}{4}$ , é equivalente a  $\frac{5}{32}$  de 1.

Para tornar a compreensão das equivalências mais efetivas, sugere-se uma partitura onde se torna visível que 4 tempos equivalem a 1 inteiro, ou seja, 1 compasso.

Observando a partitura represente cada compasso em um gráfico de pizza ou de barra, ou alternados:



**1° compasso:** no primeiro compasso temos 3 pausas de 1 tempo e 2 colcheias que juntas ocupam 1 tempo, sendo assim, as pausas ocupam 3 tempos do compasso e  $\frac{3}{4}$  do gráfico, enquanto as colcheias apenas 1 tempo do compasso e  $\frac{1}{4}$  do gráfico.



### 3.3. Atividade 3

- Tempo estimado: 4 hs/aula

O propósito da atividade é desenvolver o pensamento de frações como partes do inteiro, utilizando geometria para construção das frações.

A atividade prática consiste na construção da flauta pã seguindo os princípios utilizados por Pitágoras na construção do monocórdio, a atividade pode ser explorada em qualquer etapa

do ensino básico, bastando apenas alterar o método, aumentando ou diminuindo a dificuldade da construção.

Seguindo a ideia do ciclo das quintas desenvolvidos por Pitágoras, os alunos irão fazer as devidas operações afim de encontrar os mesmos resultados da “Escala Diatônica Pitagórica”. Nessa construção é possível explorar a multiplicação e divisão de frações, vale lembrar que essa construção exige que façamos ajustes de oitava, para que todas as frações encontradas sejam compreendidas entre uma única oitava, ou seja, as frações de estar no intervalo  $[\frac{1}{2}, 1]$ .

Os resultados esperados estão contemplados na tabela abaixo.

Tabela 14 - Frações do comprimento (atividade)

| Dó | Ré            | Mi              | Fá            | Sol           | Lá              | Si                | Dó            |
|----|---------------|-----------------|---------------|---------------|-----------------|-------------------|---------------|
| 1° | 2°            | 3°              | 4°            | 5°            | 6°              | 7°                | 8°            |
| 1  | $\frac{8}{9}$ | $\frac{64}{81}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{16}{27}$ | $\frac{128}{243}$ | $\frac{1}{2}$ |

FONTE: Elaborado pelo autor

Após os calculados serem realizados e a tabela devidamente ajustada, partiremos de fato para a prática, com a finalidade de construir um instrumento musical, que estará afinado de acordo com a escala pitagórica.

Na abordagem desse trabalho, a construção se dará com a utilização de régua e compasso, a fim de desenhar um gabarito, que servirá de referência para os tamanhos dos tubos que constituirão o corpo da flauta.

Materiais necessários:

- Lápis, lapiseira, caneta
- Compasso
- Régua graduada
- Cartolina

- Tesoura
- Fita dupla face, fita adesiva, cola de plástico
- 1 metro linear de tubo pvc (para construção com altura máxima de 9 cm)

### **Passo a passo da construção:**

Observando a tabela 2, temos que para construirmos a nota Si, devemos dividir o inteiro em 243 partes iguais, dessas partes faremos uso de 128, a fim de minimizar esse trabalho e trabalharmos com frações menores destacamos a seguinte sequência de construção.

#### **Passo 1**

- Desenhar um retângulo vertical com altura de 15cm e largura igual ao diâmetro do tubo que for utilizar (sugere-se para o diâmetro do tubo,  $12mm \leq \varnothing \leq 25mm$ ).
- Partindo da altura do retângulo com altura 9 cm que chamaremos hipoteticamente de  $Dó_1$ , construiremos as notas *Ré*, *Fá*, *Sol* e  $Dó_2$ .
- Para construir o *Ré* utilizaremos a divisão em n partes iguais, para dividir o retângulo em 9 partes iguais, ao qual tomaremos 8 partes para a altura do tubo.
- Para construir o *Fá* utilizaremos o conceito de mediatriz, ponto médio para dividir o retângulo em 4 partes iguais, ao qual tomaremos 3 partes para a altura do tubo.
- Para construir o *Sol* utilizaremos a divisão em n partes iguais para dividir o retângulo em 3 partes iguais, ao qual tomaremos 2 partes para a altura do tubo
- Para construir o  $Dó_2$  utilizaremos o conceito de mediatriz, ponto médio para dividir o tubo em 2 partes iguais, ao qual tomaremos 1 parte para a altura do tubo.

#### **Passo 2**

- Tomaremos o retângulo correspondente a nota *Ré* para construirmos a nota *Mi* e *Lá*.
- Para construir a nota *Mi* utilizaremos a divisão em n partes iguais, para dividir o retângulo em 9 partes iguais, ao qual tomaremos 8 partes para a altura do tubo.
- Para construir a nota *Lá* utilizaremos a divisão em n partes iguais, para dividir o retângulo em 3 partes iguais, ao qual tomaremos 2 partes para a altura do tubo.

### Passo 3

- Tomaremos o retângulo correspondente a nota *Mi* para construirmos a nota *Si*.
- Para construir a nota *Si* utilizaremos a divisão em  $n$  partes iguais, para dividir o retângulo em 3 partes, ao qual tomaremos 2 partes para a altura do tubo.

### Passo 4

- Cortar os tubos conforme as alturas encontradas no gabarito.
- Tampar uma das extremidades do tubo
- Colar um tubo no outro ordenando de maior a menor.

O resultado esperado está contemplado na figura abaixo.

Figura 19 – Flauta Pã



Fonte: EXPLICATORIUM (2008)

#### ➤ Observação

Ressaltamos que essa construção não corresponde de fato ao nome das notas, é apenas uma ilustração de como construir um instrumento musical, para se atingir as tonalidades executadas em um piano por exemplo, devemos considerar um tamanho qualquer para a primeira nota, assim com a ajuda de um diapasão, podemos identificar a nota que temos, assim podemos efetuar cálculos e fazer as devidas conversões, para se obter o som desejado, outros fatores que podem mudar o som obtido na sala de aula são, o diâmetro do tubo, a altura do tubo.

### 3.4. Atividade 4

- Tempo estimado: 4hs/aula

Para essa atividade, sugerimos uma explanação prática para abordar o conceito de Progressão Geométrica, tal conceito se torna evidente na construção do ciclo das quintas e no intervalo de oitava que aparecem na construção da escala pitagórica, bem como na construção da escala temperada.

Para essa abordagem seria muito relevante ter um piano elétrico em sala de aula como mostra a [\*Figura 5 – Ilustração do ciclo das quintas em sete oitavas\*](#), afim de mostrar a construção ao longo das oitavas, e assim abordar o conceito de P.G., visto que no ciclo de quintas temos uma P.G. de razão  $\frac{2}{3}$ , no intervalo de oitava temos razão  $\frac{1}{2}$ , e na escala temperada temos razão  $\sqrt[12]{2}$ .

As frações do comprimento podem ser estudadas no braço de um violão como mostra a [\*Figura 4 – Ilustração dos resultados Pitagóricos\*](#), para esse estudo podemos abordar ferramentas como, régua e compasso, ou então uma fita métrica para conferir no instrumento o resultado dos cálculos, proporcionando aos estudantes a aferição real dos cálculos, tornando significativa a sua participação na atividade.

Pode-se abordar o conceito de logaritmo, para determinar razões irracionais da progressão geométrica, como acontece com a razão da P.G. igual a  $\sqrt[12]{2}$ , como mostra [\*2.5.6 Característica e Mantissa\*](#), necessário para a construção da escala temperada, assim podemos problematizar pedindo que os alunos construam uma escala com um sistema de intervalo diferente das escalas mostradas nesse trabalho, dessa forma, apropriando-se das propriedades dos logaritmos e desenvolvendo o raciocínio lógico-matemático a partir da situação-problema, para encontrar a solução do problema criado pelos próprios alunos.

### 3.5. Atividade 5

- Tempo estimado: 4hs/aula

Sugestão de exercícios:

- a) Levando em consideração a construção da escala pitagórica [Tabela 2 - Frações do comprimento associado as notas musicais](#), [2.3.2 Ajuste de oitava](#), e convencionados:

$Dó = 1$ ,  $Sol = \frac{2}{3}$ , compreendidos na primeira oitava, queremos saber:

A fração  $\frac{1}{9}$  corresponde a qual nota musical? Em qual oitava ela está compreendida?

**Resposta:** A fração  $\frac{1}{9}$  corresponde a nota Ré, está compreendida na quarta oitava.

- b) E a fração  $\frac{32}{81}$  corresponde à qual nota musical? Qual oitava?

**Resposta:** Essa fração corresponde a nota Mi, repare que  $\frac{64}{81} = \frac{64}{81} \cdot \frac{1}{2} = \frac{64}{162} = \frac{32}{81}$ , e assim podemos dizer que ela faz parte da segunda oitava.

- c) Levando em consideração a escala temperada, temos que, para a construção do braço de um violão, é necessário fazer divisões no mesmo, sabendo que o intervalo de frequência é inversamente proporcional ao comprimento de corda, e ainda que a frequência pode ser expressada por  $f_n = \sqrt[12]{2^n}$ , ou ainda,  $f_n = 2^{\frac{n}{12}}$ , calcule:

Suponha que esse violão tenha comprimento de corda igual a  $900mm$ , qual será a posição das primeiras 3 casas do violão?

**Resposta:** Repare que, para encontrarmos o tamanho da primeira casa temos que:

$$c_1 = 900 - \frac{900}{2^{\frac{1}{12}}} \cong 50,5mm$$

Agora que sabemos o tamanho da primeira casa, basta que façamos

$$c_2 = \frac{c_1}{2^{\frac{1}{12}}} \cong 47,67mm$$

E assim:

$$c_3 = \frac{c_2}{2^{\frac{1}{12}}} \cong 45,00mm$$

- d) Encontre o comprimento de corda correspondente a 12 casas?

**Resposta:** Para esse questionamento basta que:

$$\frac{900}{2^{\frac{12}{12}}} \cong \frac{900}{2} = 450mm$$

Repare que o comprimento encontrado é a metade do tamanho original da corda, e isso nos diz que, concluímos um intervalo de oitava, ou seja, nessa casa acontecerá a repetição da corda solta, porém mais aguda, em outras palavras, com o dobro da frequência.

- e) Nos dias de hoje a frequência das notas musicais é medida em Hertz (Hz), foi conven-  
cionado que a nota Lá vibra na frequência de 440 Hz, isso significa dizer que a nota Lá  
vibra 440 vezes por segundo.

Conhecendo a razão intervalar de frequência da escala temperada.

$$f_n = \sqrt[12]{2^1} = 2^{\frac{1}{12}} \cong 1,059.$$

E ainda, para calcular qualquer intervalo temos,  $f_n = \sqrt[12]{2^n} \cong 1,059^n$ .

Como podemos obter a frequência da primeira nota Dó que vem depois da nota Lá (440 Hz)?

**Resposta:** Repare que a nota Dó está a 3 semitons de distância nota Lá, assim temos:

$$Lá \cdot \sqrt[12]{2^3} = 440 \cdot \sqrt[12]{2^0} = 440 \cdot 1,059^0 = 440 \text{ Hz}$$

Logo para encontrarmos a frequência da nota Dó, basta que:

$$440 \cdot \sqrt[12]{2^3} = 440 \cdot 1,059^3 \cong 522,56 \text{ Hz}$$

- f) E para a nota Sol que antecede a Nota lá?

**Resposta:** Temos que a nota Sol está 2 semitons abaixo da nota Lá, assim:

$$440 \cdot \sqrt[12]{2^{-2}} = 440 \cdot 2^{\frac{-2}{12}} = \frac{440}{2^{\frac{2}{12}}} \cong \frac{440}{1,059^2} \cong 391,99 \text{ Hz}$$

Outra maneira seria calcular a nota Sol como 10 semitons acima do Lá, então:

$$440 \cdot \sqrt[12]{2^{10}} = 440 \cdot 2^{\frac{10}{12}} = 440 \cdot 1,059^{10} \cong 783,99 \text{ Hz}$$

Fazendo o ajuste de oitava [2.3.2 Ajuste de oitava](#), temos:  $\frac{783,99}{2} \cong 391,99 \text{ Hz}$ , ob-  
serve que dividimos por 2, pois queremos a nota Sol anterior a nota Lá.

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta do trabalho é, mostrar da forma mais aberta possível, as contribuições da matemática para com a construção e formalização da escala musical, consideramos muito satisfatório o resultado da pesquisa, visto que conseguimos argumentos práticos que justificam essas construções, buscamos mostrar que a matemática não acontece com um passe de mágica, e ainda mostrar que a formalização matemática que temos hoje, muitas vezes não compreendidas, visto que, na maioria das vezes apenas aplicamos fórmulas e algoritmos, podem ser construídas, trazendo significado as formalizações.

Tentamos em todo o desenvolvimento do trabalho mostrar o porquê que as coisas funcionam, de forma prática e objetiva, ilustramos um pouco da matemática implícita na música, com cálculos aplicáveis que em nossa perspectiva, remontam um pouco do trabalho dos ilustres matemáticos abordados durante nossa escrita. De toda a forma, entendemos que os recursos disponíveis atualmente, poupam significativamente o que tentamos mostrar, mas o desafio de tentar reproduzir os argumentos, o desafio de tentar se colocar ante ao problema em seu cenário original, é extremamente gratificante.

Avaliamos essa investigação como muito produtiva, percorrer os caminhos que a matemática trilhou, foi além de nossas expectativas, tivemos um grande aprendizado, obviamente muitas dúvidas também, mas acima de tudo, nos sentimos satisfeitos com o que encontramos, e motivados a ir buscar muita mais.

Com as sugestões de atividade, esperamos que os participantes se sintam desafiados, e acima de tudo, que a proposta seja significativa, enxergamos que é possível abordar matemática e música em sala de aula, trazendo contextualização histórica, reproduzindo experiências, se colocando no cenário original, tentando realmente fazer a coisa acontecer.

Entendemos ao longo desse trabalho que o desafio é um dos maiores motivadores, buscamos ainda, tornar visual, sonoro, palpável e aplicável os conceitos abordados, trazendo conexões das figuras musicais com gráficos, relação de fração com unidade de tempo, com unidade de medida, sugerimos a construção de um instrumento musical, onde será necessário abordar conceitos de geometria plana, bem como nos gráficos, relacionamos as escalas musicais e sua construção a progressões geométricas, onde ainda existe muito material a ser trabalhado.

Dessa forma, destacamos ainda a possibilidade do uso de tecnologias digitais, visto que existem aplicativos que possibilitam afinar instrumentos musicais, dessa maneira, é possível

associar a construção feita em sala de aula e ainda aferir com o aplicativo o resultado, existem também aplicativos de escrita musical que podem ser inseridos a proposta, bem como a utilização do Geogebra, a fim de representar os gráficos da relação inversa entre comprimento de corda e frequência.

Como resultado espera-se que os alunos se motivem com as propostas, desenvolvam as habilidades necessárias para construção e internalizem os conceitos propostos durante a explanação da construção da escala pitagórica, escala temperada e da construção da atividade prática.

Para além disso, espera-se que os alunos tenham curiosidade de construir outros instrumentos, ou até mesmo, buscar a afinação na construção da flauta pã, seguindo os procedimentos da construção.

Dessa maneira, espera-se também mostrar a presença da matemática em nossas vidas, e a quão bela e interessante ela é, saindo da rotina da aplicação de fórmulas e contas, trazendo uma proposta descontraída de fazer matemática e música, e assim encerramos nosso trabalho, extremamente motivados para continuar.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Luan Xavier. **Matemática e música: Uma abordagem através do monocórdio de Pitágoras**. 2018. 37 f. Trabalho apresentado como parte dos requisitos obrigatórios para conclusão do curso de Licenciatura em Matemática, da Faculdade de Matemática, da Universidade Federal do Pará. Castanhal – PA, 2018. Disponível em: [https://bdm.ufpa.br:8443/jspui/bitstream/prefix/617/1/TCC\\_MatematicaMusicaAbordagem.pdf](https://bdm.ufpa.br:8443/jspui/bitstream/prefix/617/1/TCC_MatematicaMusicaAbordagem.pdf). Acesso em: 19 dez. 2022.

ALONSO, Carlos André dos Santos Costa. **Tópicos de Matemática e Música na Educação Básica**. 2016. Dissertação mestrado em Matemática – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

A MATEMÁTICA e a música. **Matematiquês**, 2003. Disponível em: <http://www.matematicas.com.br/conteudo.php?id=875>. Acesso em:

ÁVILA, Geraldo. Como se constrói uma tábua de logaritmos. **RPM 26**, s/d. Disponível em: <https://www.rpm.org.br/cdrpm/26/1.htm>. Acesso em:

BERTOLETTI, Anderson Nascimento et al. **A música na história da matemática**. S/d. 9 f. Texto referente ao seminário I. Disponível em: [https://edisciplinas.usp.br/plugin-file.php/4475160/mod\\_resource/content/1/matematica\\_musica.pdf](https://edisciplinas.usp.br/plugin-file.php/4475160/mod_resource/content/1/matematica_musica.pdf). Acesso em: 02 jan. 2022.

BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática, trad. **Elza. F. Gomide**, Ed. **Edgard Blücher**, 1974.

BOYER, Carl Benjamin. **Matemática e Música - O pensamento analógico na construção de significados**. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1996.

CAMARGOS, Chrisley Bruno Ribeiro. **Música e Matemática: a harmonia dos números revelada em uma estratégia de modelagem**. 2010.

CAMPOS, Danilo Albuquerque de. **Algoritmos de aproximação de raízes quadradas**. 2014.

CARVALHO, André. A Divisão Proporcional dos Valores. **Deus criou a música**, 2017. Disponível em: <https://deuscriouamusica.blogspot.com/2017/03/8-divisao-proporcional-dos-valores.htm>. Acesso em:

CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. A raiz quadrada ao longo dos séculos. **Bienal da SBM**, v. 5, n. 2010, p. 1-44, 2010.

CAVALCANTI, Valdir de Souza. Musicalizando o currículo: Uma proposta de ensino e aprendizagem da matemática. **Espaço currículo**, v.3, n.1, pp.363-379, 2010. Disponível em: <https://periodicos.ufpb.br/index.php/rec/article/view/9098/4786>. Acesso em: 01 jan. 2022.

COMO Aprender a Ler Partitura e Por Qual Motivo. **Polifono**, 2020. Disponível em: <https://www.google.com/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fblog.polifono.com%2F2020%2F->

[02%2F15%2Fcomo-aprender-a-ler-partitura-e-por-qual-motivo%2F&psig=AOvVaw3u-QA-IOUjo1TK\\_1MIA-7Vud&ust=1654280149978000&source=images&cd=vfe&ved=0CA0Q-jhxqFwoTCPC81M22j\\_gCFQAAAAAdAAAAABAD](https://www.youtube.com/watch?v=AOvVaw3u-QA-IOUjo1TK_1MIA-7Vud&ust=1654280149978000&source=images&cd=vfe&ved=0CA0Q-jhxqFwoTCPC81M22j_gCFQAAAAAdAAAAABAD). Acesso em:

COMPASSO musical. **Descomplicando a música**, s/d. Disponível em: <https://www.descomplicandoamusica.com/compasso-musical/#:~:text=Fra%C3%A7%C3%A3o%20de%20compasso&text=Informa%20quantas%20figuras%20cabem%20em,4%20sem%C3%ADni-mas%20em%20um%20compasso>. Acesso em:

COMUNE, Agnes Del. Pitágoras e a harmonia. **Arquitetura e música**, 2014. Disponível em: <https://arquiteturaemusica.wordpress.com/2014/01/01/pitagoras-e-a-harmonia/> . Acesso em: 23 jan. 2022.

CONSTRUIR uma flauta de pão. **Explicatorium**, s/d. Disponível em: <http://www.explicatorium.com/cfq-8/instrumentos-construir-flauta-pa.html> . Acesso em: 30 jan. 2022.

DAREZZO, Daniel. O que são Notas Enarmônicas?. **Instituto Musical Darezzo**, 2018. Disponível em: <https://institutomusicaldarezzo.com.br/o-que-sao-notas-enarmonicas/>. Acesso em:

DUPRÁ, Marcos. Aula 6 de Partitura - Compasso simples e composto. **Primeiros acordes**, 2015. Disponível em: <https://primeirosacordes.com.br/teoria/aula-6-de-partitura-compasso-simples-e-composto>. Acesso em:

EDILSON. Temperamento – a música através dos números. **Laboratório de Luthiria**, 2015. Disponível em: <https://laboratoriodeluthiria.wordpress.com/2015/07/02/temperamento-a-musica-atraves-dos-numeros/>. Acesso em:

ENSINO de música será obrigatório. **Ministério da educação**, 2008. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/222-537011943/11100-sp-433581153> . Acesso em: 24 nov. 2021.

FORMAÇÃO das notas musicais. **Essas e outras**, s/d. Disponível em: <https://essaseoutras.com.br/figuras-musicais-duracao-do-som-pulsacao-nome-e-valor-das-notas/> . Acesso em:

FRADE, Ricardo. Escalas menores naturais para piano. **Academia musical**, 2014. Disponível em: <https://www.academiamusical.com.pt/tutoriais/escalas-menores-naturais-para-piano/>. Acesso em:

IAZZETTA, Fernando. Escala pitagórica. **Eca**, 2000. Disponível em: <http://www2.eca.usp.br/prof/iazzetta/tutor/acustica/escalas/escalas.html>. Acesso em:

JUNIOR, Márcio. Sabe de onde vem os nomes para as notas musicais: Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si?. **Instituto canção nova**, 2018. Disponível em: <https://instituto.cancaonova.com/sabe-de-onde-vem-os-nomes-para-as-notas-musicais-do-re-mi-fa-sol-la-e-si/> . Acesso em: 24 dez. 2021.

JUNIOR, Paulo Lima; RODRIGUES, Luís Gustavo Pires; SILVA, Maria Teresinha Xavier. Sobre a não-linearidade de fenômenos acústicos e o funcionamento da flauta transversa: uma

incursão pela acústica musical. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 29, n. 1, p. 156-179, 2012.

JUNIOR, Rogerio Luiz Quintino de Oliveira. Uma introdução didática aos logaritmos de Napier a partir de sua origem histórica. **Cadernos de Educação Básica**, v. 5, n. 2, p. 150-169, 2020.

KILHIAN, Kleber. A Construção da Primeira Tábua de Logaritmos Decimais por Briggs. **O baricentro da mente**, 2011. Disponível em: <https://www.obaricentroda-mente.com/2011/08/construcao-da-primeira-tabua-de.html>. Acesso em:

LEMONS, Carlos M. Os Logaritmos e as suas aplicações nas ciências náuticas—um apontamento histórico. **Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática**, 2012.

MIRITZ, José Carlos Dittgen. **Matemática e música**. 2015. 95 f. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT submetido ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande. Rio Grande, 2015. Disponível em: [https://profmatt.furg.br/images/TCC/TCCJoseCarlos\\_versaofinal.pdf](https://profmatt.furg.br/images/TCC/TCCJoseCarlos_versaofinal.pdf). Acesso em: 10 nov. 2021.

NOBRE, Nídia. Sobre a Tetraktys pitagórica. **Matemática para filósofos**, 6 julho 2020. Disponível em: <https://www.matematicaparafilosofos.pt/sobre-a-tetraktys-pitagorica/>. Acesso em: 28 nov. 2021.

O QUE é unidade de som na música?. **Cultura mix**, 2019. Disponível em: <https://musica.culturamix.com/cifras/o-que-e-unidade-de-som-na-musica>. Acesso em:

PARDO, Toninho. Logaritmos e suas maravilhas. **Estado de Minas enem**, 2015. Disponível em: <https://www.em.com.br/app/noticia/especiais/educacao/enem/2015/04/28/noticia-especial-enem,641856/logaritmos-e-suas-maravilhas.shtml>. Acesso em:

PEREIRA, Marcos do Carmo. **Matemática e música, de Pitágoras aos dias de hoje**. 2013. 95 f. Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática, Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: <http://www2.unirio.br/unirio/ccet/profmat/tcc/2011/tcc-marcos>. Acesso em: 10 nov. 2021.

PERES, Larissa Soarez. **Matemática e música: em busca da harmonia**, 2006, p.3. 15 f. Monografia apresentada por Larissa Soarez Peres na Universidade do Grande ABC, s/d. Disponível em: [http://dirlsom.com.br/index\\_html\\_files/Matematica%20&%20Musica.pdf](http://dirlsom.com.br/index_html_files/Matematica%20&%20Musica.pdf). Acesso em: 04 dez. 2021.

PIPPA, Tania Cristina Maggioni. **A função logaritmo e a régua de cálculo**. 2014. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

RODRIGUES, José Francisco. A matemática e a música. **Lisboa, PT**, v. 200, 1999.

ROZIMEIRI. A música e a matemática. **Ceeja Profa. Sebastiana Ulian Pessine**, 2020. Disponível em: <https://ceejamarilia.wordpress.com/2020/07/01/historia-da-musica-pitagoras-e-a-escala-musical/>. Acesso em: 21 nov. 2021.

SANTOS, Jefferson. Breve história dos logaritmos. **Matemática é fácil**, s/d. Disponível em: <https://www.matematicaefacil.com.br/2016/09/breve-historia-logaritmos.html>. Acesso em:

SANTOS, Rodovlas Fabiano dos et al. **Matemática e música: uma abordagem para explorar conceitos musicais para ensinar matemática no ensino médio e fundamental**. 2015.

SILVA, Ana. A Matemática nas Escalas Musicais. **Matemática viva**, 2013. Disponível em: <https://www.matematicaviva.pt/2013/11/a-matematica-nas-escalas-musicais.html>. Acesso em:

SIMES, Eliton. O que é Mantissa e Característica?. **Ndmat – Núcleo de Desenvolvidos Matemáticos**, 2011. Disponível em: <https://ndmat.wordpress.com/2011/01/14/o-que-e-mantissa-e-caracteristica/#:~:text=Quando%20se%20calcula%20o%20logaritmo,decimal%20%C3%A9%20chamada%20de%20Mantissa.&text=A%20MAN-TISSA%20TEM%20COMO%20PROPRIEDADE,POR%20UMA%20POT%C3%8AN-CIA%20DE%2010>. Acesso em:

SOUSA, Rainer Gonçalves. A origem das notas musicais. **Brasil Escola**, s/d. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/curiosidades/a-origem-das-notas-musicais.htm#:~:text=Foi%20nesse%20contexto%20que%20um,at%C3%A9%20os%20dias%20de%20hoje>. Acesso em: 17 nov. 2021.

TEORIA Musical Online – Leitura de Música – Memorizando as Notas. **Música e adoração**, s/d. Disponível em: <https://musicaeadoracao.com.br/26157/teoria-musical-online-leitura-de-musica-memorizando-as-notas/>. Acesso em:

TESSMANN, Ramon. O que é um pentagrama?. **Aprenda teclado**, 2017. Disponível em: <https://www.aprendateclado.com/pentagrama/#:~:text=Conjunto%20de%20linhas%20horizontais,utilizada%20para%20simbolizar%20essa%20nota%C3%A7%C3%A3o>. Acesso em:

VIEGAS, Gustavo. Como calcular log (2) (logaritmos 5 de 30). You Tube, 16 agosto 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=TTcFaijhRX4>. Acesso em:

VIEGAS, Gustavo. Como calcular log (3) (logaritmos 6 de 30). You Tube, 01 novembro 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=oZOeIJxXEKY&t=198s>. Acesso em:

ZANATO, Fernando da Silva. **Matemática e música: relações entre as séries e transformadas de Fourier e a teoria musical**. 2017. Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, da Universidade do Estado de Mato Grosso - UNEMAT como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, 2017. Disponível em: <https://docplayer.com.br/78022512-Matematica-e-musica-relacoes-entre-as-series-e-transformadas-de-fourier-e-a-teoria-musical.html>. Acesso em: