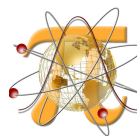




Universidade Federal do Rio Grande – FURG
Instituto de Matemática, Estatística e Física – IMEF
Curso de Licenciatura em Matemática



Gerson Freitas Luz

EXPLORANDO PROPRIEDADES DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: MOTIVADOS POR SÉRIES DE FOURIER

Brasil

2022

Gerson Freitas Luz

**EXPLORANDO PROPRIEDADES DE FUNÇÕES
TRIGONOMÉTRICAS:
MOTIVADOS POR SÉRIES DE FOURIER**

Trabalho de conclusão de curso de graduação submetido por Gerson Freitas Luz, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Orientadora: Profa. Dra. Juliana da Silva Ricardo Nunes

Brasil

2022



Universidade Federal do Rio Grande – FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física

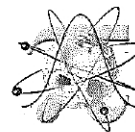
Curso de Licenciatura em Matemática

Av. Itália km 8 Bairro Carreiros

Rio Grande-RS CEP: 96.203-900 Fone (53)3293.5411

e-mail: imef@furg.br

Sítio: www.imef.furg.br



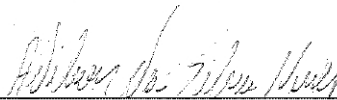
Ata de Defesa de Monografia

No décimo nono dia do mês de agosto de 2022, às 19h, no auditório do IMEF, foi realizada a defesa do Trabalho de Conclusão de Curso do acadêmico **Gerson Freitas Luz** intitulada **Explorando Propriedades de Funções Trigonométricas: Motivados por Série de Fourier**, sob orientação da Profa. Dra. Juliana da Silva Ricardo Nunes, deste instituto. A banca avaliadora foi composta pelo Prof. Dr. Adilson da Silva Nunes do IMEF/FURG e pela Profa. Dra. Luciele Rodrigues Nunes do IMEF/FURG. O candidato foi: (X) aprovado por unanimidade; () aprovado somente após satisfazer as exigências que constam na folha de modificações, no prazo fixado pela banca; () reprovado. Na forma regulamentar, foi lavrada a presente ata que é abaixo assinada pelos membros da banca, na ordem acima relacionada.

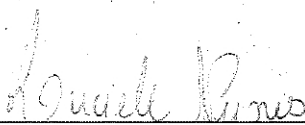


Profa. Dra. Juliana da Silva Ricardo Nunes

Orientadora



Prof. Dr. Adilson da Silva Nunes



Profa. Dra. Luciele Rodrigues Nunes

*Este trabalho é dedicado aos professores de Ensino Básico que possuam alunos que
buscam avançar nos estudos de matemática.*

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo apresentar uma proposta para trabalhar os conceitos de funções trigonométricas seno e cosseno e suas propriedades no ensino médio. A motivação para a escolha do tema está relacionada com a importância do estudo de funções trigonométricas em conceitos mais gerais, como o de séries de Fourier que, por sua vez, aparecem no estudo da equação do calor. Na atividade pretendemos resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, afim de contemplar um dos parâmetros da BNCC. Em conjunto, iremos fazer uso do software GeoGebra, o qual pode trazer uma contribuição significativa na aprendizagem não apenas desse conteúdo, mas também em todo período de vida escolar dos estudantes.

Palavras-chave: funções trigonométricas; GeoGebra; ensino médio; séries de Fourier; equação do calor.

Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais sem o zero
$\mathbb{Z}^+$	Conjunto dos números não negativos
$C[(-l, l)]$	Espaço das funções continuamente diferenciáveis (respectivamente contínuas) em $[-l, l]$ (p.26)
$SC[(-l, l)]$	Espaço das funções reais seccionalmente contínuas em $[l, -l]$ (p. 27)
$SC_{per}(2l)$	Espaço das funções reais seccionalmente contínuas periódicas de período $2l$ (p. 31)
$C_{per}(2l)$	Espaço das funções reais contínuas periódicas de período $2l$ (p. 31)
$\mathcal{L}^1$	Espaço das funções absolutamente integráveis (p. 52)
$\mathcal{S}$	Espaço de Schwartz (p. 57)
$C_{\mathbb{C}}^{\infty}(\mathbb{R})$	Espaço das funções que não infinitas vezes continuamente diferenciáveis (respectivamente contínuas) de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{C}$ (p. 61)

Sumário

1	INTRODUÇÃO	8
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	10
3	SÉRIE DE FOURIER	14
3.1	Os Coeficientes de Fourier	17
3.2	Interpretação Geométrica	31
3.3	Convergência Pontual das Séries de Fourier	38
3.4	Convergência Uniforme das séries de Fourier	41
4	INTRODUÇÃO DE SÉRIES DE FOURIER NO ENSINO MÉDIO	45
4.1	As fases da Lua	45
4.2	Propriedades de Seno e Cosseno	47
4.3	Soma e Produto de Funções	54
4.4	Aplicação	60
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	63
6	REFERÊNCIAS	64
7	APÊNDICE A: A TRANSFORMADA DE FOURIER	66
7.1	Transformada em $\mathcal{L}^1$	66
7.2	Espaço de Schwartz	73
7.3	A Operação Convolução	77
8	APÊNDICE B: EQUAÇÃO DO CALOR	82
8.1	Problema de Equação do Calor não-homogênea	82
8.2	Problema da Barra Infinita	82
8.3	Problema de Condição Inicial não-homogênea	85

1 Introdução

A equação do calor está entre os tópicos mais importantes no estudo de Equações Diferenciais Parciais. Essa equação está relacionada com ao menos dois problemas do milênio. O primeiro é o problema de Navier-Stokes, em que o escoamento incompressível de fluidos newtonianos relaciona a difusão do impulso e a equação do calor. O segundo problema do milênio que se envolve com a equação do calor pelas técnicas usadas para encontrar a solução é a conjectura de Poincaré que, em 1964, foi introduzido uma variante da equação do calor inspirando a introdução do fluxo de Ricci por Richard Hamilton em 1982 e culminando na prova da conjectura de Poincaré por Grigori Perelman.

A teoria da equação do calor foi desenvolvida inicialmente por Joseph Fourier (1768-1830) em 1822 para modelar como uma quantidade -como o calor- se propaga por uma barra, chapa e sólidos metálicos. Fourier no tratado *Théorie analytique de la chaleur*, utiliza séries de Fourier para solucionar a equação do calor. A série de Fourier é uma série trigonométrica usada para representar funções infinitas e periódicas complexas na forma de funções trigonométricas simples de senos e cossenos.

Tendo em vista a importância do estudo da série de Fourier, nesse trabalho daremos destaque as funções trigonométricas seno e cosseno. Veremos o conceito de funções periódicas e também algumas propriedades como a de amplitude, frequência e translação. Exploraremos os conceitos de funções pares e ímpares e verificaremos esse conceito para as funções seno e cosseno. Assim como analisaremos o contexto de fenômeno periódico real para apresentar uma proposta de ensino de funções trigonométricas. Além disso, com o objetivo de introduzir o conceito de somas de funções aos estudantes, faremos somas de senos e cossenos. Para embasar teoricamente o trabalho, estudaremos alguns tópicos avançados: os coeficientes de Fourier, as convergências pontual e uniforme da série de Fourier, o problema da barra infinita, a transformada de Fourier, o espaço de Schwartz, a operação convolução e a solução para o problema de equação do calor não homogêneo.

O presente trabalho justifica-se, visto que pretende contribuir com uma pesquisa que possa ampliar o entendimento da importância de introduzir conceitos avançados de matemática e uso do GeoGebra no ensino médio, além de proporcionar material aos professores que possuem alunos que buscam construir conceitos avançados de matemática. Sua relevância está na medida que se mostra que o estudo de somas de funções está ao alcance de alunos desse nível de ensino que possuem uma facilidade de interação com tecnologia digital.

2 Revisão Bibliográfica

A área de Equações Diferenciais Parciais (EDP) consiste em equações que envolvem derivadas parciais de uma função multivariável a qual é muito importante na matemática. De fato, Farlow (1993) afirma que:

A maioria das leis naturais da física, como as equações de Maxwell, a lei de resfriamento de Newton, as equações de Navier-Stokes, as equações de movimento de Newton e a equação de Schrodinger da mecânica quântica, são declaradas (ou podem ser) em termos de EDPs, isto é, essas leis descrevem fenômenos físicos relacionando derivadas de espaço e tempo.

Dentre as principais equações diferenciais parciais estão: a equação de Laplace; a equação de Poisson; a equação da onda e a equação do calor cuja aplicação se estende em diversas áreas de pesquisas. Como uma das soluções de equação do calor envolve séries de Fourier, abordaremos aqui algumas das aplicações para evidenciar sua importância. Os novos modelos matemáticos para analisar as previsões ou as anomalias de temperatura na superfície da Terra são realizadas usando equação da difusão de temperatura, em que a equação de difusão é uma versão mais geral da equação do calor (ALVEZ, 2003). Na química, está relacionada com o estudo de processos de difusão química (TORT, 2013). Na estatística, a equação de difusão é aplicada no movimento browniano (SALINAS, 2005). Hoje, sabemos que a idade da Terra é de aproximadamente 4,5 bilhões de anos e isso foi descoberto com o auxílio da radioatividade, mas Lord Kelvin foi um dos primeiros a estimar a idade da Terra utilizando a equação do calor unidimensional impondo condições iniciais segundo o texto Transferências de Massas. Na teoria de probabilidade, a equação do calor é relacionada ao estudo de passeios aleatórios e movimento browniano pelas equações de Fokker-Planck. Já na matemática financeira, a equação de Black-Scholes é uma variante da equação do calor. Além dessas aplicações, a equação do calor está sendo utilizada na indústria de petróleo em consonância com sistema de EDP's não-lineares que representam o escoamento bifásico de água e óleo (DA FONSECA, 2020).

Como queremos trabalhar com série de Fourier, é necessário que tenhamos algum conhecimento a respeito disso, como vemos no livro Farlow (1993):

A importância da série de Fourier na teoria EDP é que funções periódicas $f(x)$ definidas em $(-\infty, +\infty)$ ou funções definidas em intervalo finito podem ser representadas por séries infinitas de senos e cossenos, e desta forma, os problemas podem ser resolvidos de maneira mais simples.

Logo, podemos perceber que o conhecimento básico de séries de Fourier é plausível tendo em vista sua importância na matemática. Isso não significa que se deve trabalhar com conceitos avançados; pelo contrário, o processo de ensino para séries de Fourier leva em consideração que o aluno está no ensino básico. Assim, a fim de contemplar que o estudante tenha contato com conteúdo avançado da matemática, iremos somar algumas funções para que se tenha uma noção inicial da possibilidade de somar infinitas funções, criando uma base para o Ensino Superior.

As pesquisas feitas nos últimos anos na linha de estudo de assuntos da universidade no ensino médio convergem, em sua maioria, para a introdução de conhecimentos do ensino superior no ensino médio. No entanto, trata-se de inserir esses conceitos com noções básicas de seus conceitos fundamentais e não da forma que é trabalhado na educação superior.

Seria muito mais proveitoso que todo o tempo que hoje se gasta, no 2º grau, ensinando formalismo e longa terminologia sobre funções, que todo esse tempo fosse utilizado com o ensino das noções básicas do Cálculo e suas aplicações. Então, ao longo desse desenvolvimento, o ensino das funções seria feito no contexto apropriado, de maneira espontânea, progressiva e proveitosa (AVILA, 1991, apud GUIMARÃES, 2019, p. 14).

Com isso, podemos perceber o quanto o domínio de conceitos do ensino básico se faz necessário para gerar uma boa base para o avanço nos estudos em matemática. Sendo assim, precisamos buscar outras possibilidades para o ensino de funções trigonométricas de modo que motive os alunos, já que é evidenciado por Rezende (2003, p. 18) que:

Na tentativa de amenizar a situação catastrófica dos resultados de Cálculo, alguns professores de Cálculo, conscientes da

deficiente formação matemática dos seus alunos, têm procurado evitar os sintomas de “base” no processo de avaliação; isto é, procuram evitar manipulações algébricas exacerbadas, relações trigonométricas pouco conhecidas ou usadas pelos estudantes etc.

Esses muitos alunos que reprovam em Cálculo sofrem por ter uma enorme diferença do que é visto em matemática no ensino básico e no ensino superior. Logo, faz-se necessário olhar novos horizontes para o ensino de funções trigonométricas. Na BNCC diz que se deve desenvolver a habilidade de:

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria (2018, p. 536).

Usarmos situações cotidianas para motivar o ensino das funções seno e cosseno gera sentido ao que está sendo construído. Assim, podemos motivar o ensino de propriedades de senos e cossenos com séries de Fourier, haja vista que a BNCC afirma que:

No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade (2018, p. 471).

Acreditamos que o ensino de assuntos avançados de matemática não seja de maneira aprofundada, mas de maneira acessível ao aluno do ensino médio. Para enfatizar a forma de inserir conteúdos avançados no ensino médio temos a seguinte afirmação:

Não propomos inserir Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio em sua completude e sim ambientar os estudantes a interagirem de modo dinâmico com ideias que têm o intuito de desenvolver aptidões para uma melhor compreensão dos conceitos

abordados no estudo dos limites, derivadas e integral. Propomos um estudo livre de formalizações e muito mais prático, algo que fuja das técnicas e priorize a reflexão dos conceitos por parte dos alunos, familiarizando-os com novas simbologias e que desperte a curiosidade nas inúmeras aplicações dessa disciplina (JÚNIOR, 2014, p. 2 apud GUIMARÃES, 2019, p. 14).

O aplicativo que escolhemos usar para visualização do gráfico das funções e para algumas construções das propriedades foi o GeoGebra, visto que além do incentivo da BNCC no uso de aplicativos de álgebra e geometria no ensino de funções seno e cosseno, notamos que há bastante pesquisa favorável ao GeoGebra no ensino de matemática. Como vemos em Abar e Alencar (2013, p. 364) em que:

verificou-se que a característica dinâmica do software GeoGebra colaborou para a ocorrência da instrumentação, uma vez que, ao manipular as potencialidades do software, os professores condicionaram suas ações para responder aos questionamentos realizados.

Vale ressaltar que, em geral, espera-se que os estudantes não possuam grandes dificuldades com o uso de aplicativos por emergirem do digital. Além disso, há uma vantagem na utilização desse software por permitir que o aluno navegue num ambiente com alguma semelhança ao trabalho que se faz na pesquisa em matemática. De acordo com Gravina e Santarosa (1998, p. 2):

Na pesquisa matemática, o conhecimento é construído a partir de muita investigação e exploração, e a formalização é simplesmente o coroamento deste trabalho, que culmina na escrita formal e organizada dos resultados obtidos! O processo de aprendizagem deveria ser similar a este, diferindo essencialmente quanto ao grau de conhecimento já adquirido.

Dada uma introdução e nosso referencial, no próximo capítulo falaremos sobre a Série de Fourier para após apresentarmos uma proposta de ensino sobre funções trigonométricas motivados por séries de Fourier. Vale ressaltar que as definições e resultados presentes neste trabalho são, em sua maioria, do livro de Iório (2007).

3 Série de Fourier

A ideia de Séries de Fourier é escrever uma função como um somatório de combinações de funções trigonométricas. Esta ideia surgiu naturalmente advindo de um problema do começo do século XIX de condução do calor vindo de um contexto de Revolução Industrial e novas tecnologias em que o problema de dissipação de calor era relevante, mas pouco conhecido. Jean Baptiste Joseph Fourier estudou nessa direção resolvendo o seguinte problema: numa barra coloca-se temperaturas nas extremidades conhecidas e analisa como que evolui a temperatura ao longo da barra inteira. Como o modelo real do problema é sofisticado, o que se faz é começar com casos bem simplificados. Fourier precisou fazer muitas hipóteses simplificadoras para conseguir resolver e, após isso, ir introduzindo os complicadores até chegar na solução do problema real. A primeira hipótese simplificadora é a barra isolada lateralmente, isto é, só havia condução de calor nas extremidades. O comprimento da barra iniciamos dizendo que é π apenas porque sabemos que aparecerão senos e cossenos. É dada uma informação de que a temperatura da barra numa extremidade é $u(\pi, t)$ e na outra $u(0, t)$ e que a distribuição inicial é $f(x, 0)$. Aí procura-se encontrar a função $u(x, t)$ que é a temperatura no ponto de abscissa x no instante t .

A equação que rege a equação do calor é um problema de física que diz como se dá a transmissão de calor numa vizinhança. Fourier analisa esse problema e monta a chamada Equação do Calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.1)$$

A equação do calor está relacionada em diversos problemas de difusão, até mesmo no modelo de Black-Scholes para precificação de artigos financeiros.

Com aquelas hipóteses simplificadoras que comentamos anteriormente, fica-

mos com o seguinte problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0; \\ u(x, 0) = f(x); \end{cases}$$

veremos que surgirá a pergunta: quando que f se relaciona com as funções trigonométricas?

Fourier usou a técnica de separação de variáveis, isto é, existe uma $u(x, t)$ da forma $u(x, t) = X(x)T(t)$? Supondo que existe solução para a equação do calor com essa técnica, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= X(x)T'(t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= X''(x)T(t). \end{aligned}$$

Logo a equação do calor (3.1) fica da seguinte forma:

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (3.2)$$

A primeira conclusão é que as funções X e T são constantes. Isso vem da sutil observação que se tomarmos uma função g que depende apenas de uma variável x e outra função h que depende apenas de uma variável y sendo as duas funções iguais, então elas são constantes. De fato, se fixarmos uma variável $g(x_0)$, veremos que a outra função é constante por ter sempre o mesmo valor, já que $g(x_0) = h(y_1) = h(y_2) = h(y_3)$. Agora, se fixamos um y_0 e variamos o x obtemos $h(y_0) = g(x_1) = g(x_2) = g(x_3)$, como h possui o mesmo valor, ela também é constante. Assim, segue que:

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda, \quad (3.3)$$

onde k e λ são constantes.

De $T'(t) = k\lambda T(t)$ se conclui diretamente que $T(t) = a_0 e^{k\lambda t}$, visto que procuramos uma função cuja derivada é uma constante multiplicada pela própria função.

De $X''(x) = \lambda X(x)$ precisaríamos avaliar 3 possibilidades: $\lambda = 0, \lambda > 0, \lambda < 0$.

Se $\lambda = 0$, então $X''(x) = 0$, logo só pode que a função X é de primeiro grau, isto é, $X(x) = a_1 x + a_2$. Aí a função $u(x, t) = a_0 e^{k\lambda t} (a_1 x + a_2)$. Mas aí $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, implica que

$$a_0 = 0 \text{ ou } a_2 = 0, a_1 \pi + a_2 = 0.$$

De qualquer caso, $u(x, t) \equiv 0$ o que faz com que o problema não tenha sentido, visto que teríamos que ter temperatura inicial nula, e temperatura nas extremidades nula também.

Algumas das funções que são conhecidas cujas derivadas segundas se repete a função multiplicada por uma constante são a exponencial, seno e cosseno. Como agora veremos para o $\lambda > 0$, a solução se dá pela exponencial. Assim, $X(x) = a_3 e^{\sqrt{\lambda}x} + a_4 e^{-\sqrt{\lambda}x}$, a raiz quadrada vem do fato de querermos derivar duas vezes a função X para obtermos $\lambda X(x)$. Mas se fazemos $X(0) = 0$ e $X(\pi) = 0$, obtemos novamente que as constantes são nulas, isto é, que $a_3 = a_4 = 0$.

Finalmente, quando $\lambda < 0$. Agora na segunda derivada de X há troca de sinal, por isso, a solução se dá em seno e cosseno. Aí $X(x) = a_5 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + a_6 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$. Tomamos a solução com $-\lambda$ para que haja solução real, visto que $-\lambda > 0$ e a segunda derivada recupera o $\lambda X(x)$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} X(0) = 0 &\Rightarrow a_5 \cos(0) = 0 \Rightarrow a_5 = 0 \\ X(\pi) = 0 &\Rightarrow a_6 \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0 \\ &\Rightarrow a_6 = 0 \text{ ou } \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \sqrt{-\lambda} = n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda = -n^2. \end{aligned}$$

Logo, a solução geral do problema teria que ter a seguinte forma:

$$u(x, t) = a_0 e^{-kn^2 t} \sin(nx), n \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

e isso dá uma família de soluções. Agora, Fourier leva em conta que $u(x, 0) = f(x)$ e como (3.4) em $t = 0$ é igual à $f(x) = a_0 \sin(nx)$.

Agora, Fourier poderia chegar na conclusão de que não conseguiu resolver o problema e ver que é obrigatório que a distribuição de temperatura precisa ser senoide, caso contrário o problema não seria resolvido. Se a distribuição inicial de temperatura for $\sin(nx)$ saberia resolver o problema e o problema é a função (3.4). Mas, Fourier teve a brilhante ideia de ver que poderia fazer superposição de soluções e estenderia a solução para funções de distribuição de temperatura quando fossem somas de senoides. E não parou aí, se perguntou que tipo de função que é soma de senos. Assim, colocou a seguinte pergunta, e isto que é uma série de Fourier: quais são as funções que podem ser escritas como somas de senos.

As perguntas naturais a serem feitas é:

(i) quando que é possível escrever $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right] \quad (3.5)$$

(ii) conhecendo f como podemos calcular os coeficientes a_n e b_n ?

(iii) em que sentido a série (3.5) converge?

Dessas três perguntas, a segunda é a mais simples (de um ponto de vista formal) e é a que iniciaremos respondendo na próxima seção. Na segunda seção responderemos a primeira pergunta e na terceira seção responderemos a terceira pergunta. Os resultados e demonstrações foram guiados pelo livro da Iório (2007).

3.1 Os Coeficientes de Fourier

Nesta seção veremos como calcular os coeficientes a_n e b_n conhecendo f . Para isso, precisamos estudar algumas propriedades das funções trigonométricas que serão utilizadas na busca dos coeficientes. Antes, vamos definir função periódica.

Definição 3.1.1. *Uma função f é dita periódica com período T se seu domínio contém $x + T$ sempre que contém x , e se $f(x) = f(x + T)$ para todo x .*

Essa definição de função periódica permite que haja períodos negativos. Como a maioria das aplicações usa período para intervalo de tempo ou comprimento, é conveniente tomá-lo positivo. Positivo ou negativo, pode-se trocar o sinal negativo mudando o sentido do eixo da variável independente. Assim, sem perda de generalidade, podemos tomar T positivo e definir o *período fundamental* de f .

Definição 3.1.2. *Se existir o menor valor positivo de T para o qual é verdade que $f(x) = f(x + T)$ para todo x , então T é período fundamental de f .*

As funções trigonométricas que usaremos para calcular os coeficientes a_n e b_n são dadas por: $\varphi_n, \psi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por:

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.6)$$

e

$$\psi_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (3.7)$$

A primeira propriedade que veremos dessas funções é que são periódicas com período fundamental $T = 2l/n$. Antes de mostrar a propriedade, definiremos função periódica e período fundamental.

Agora, podemos mostrar a primeira propriedade as funções φ_n e ψ_n definidas em (3.6) e (3.7).

Proposição 3.1.1. *Dado $n \in \mathbb{N}$, as funções φ_n e ψ_n definidas por (3.6) e (3.7), respectivamente, são periódicas com período fundamental $T = 2l/n$.*

Demonstração. Vamos provar o resultado para φ_n . Primeiramente, mostraremos

que $T = 2l/n$ é um período para φ_n , isto é, $\varphi_n(x + T) = \varphi_n(x)$.

$$\begin{aligned}
 \varphi_n(x + T) &= \sin\left(\frac{n\pi(x + T)}{l}\right) \\
 &= \sin\left(\frac{n\pi x}{l} + \frac{n\pi T}{l}\right) \\
 &= \sin\left(\frac{n\pi x}{l} + \frac{n\pi \frac{2l}{n}}{l}\right) \\
 &= \sin\left(\frac{n\pi x}{l} + 2\pi\right) \\
 &= \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\
 &= \varphi_n(x).
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Na igualdade (3.8) acima, usamos que a função seno é periódica com período 2π , isso é visto na seção 4.2.

Agora mostraremos que esse período é período fundamental.

Como T' é período de φ_n , temos que:

$$\begin{aligned}
 \varphi_n(x + T') &= \varphi_n(x) \\
 \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi(x + T')}{l}\right) &= \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\
 \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) + \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) &= \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

Na igualdade (3.9) acima, usamos que $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$. Será provado na proposição 4.2.1.

Tomando $x = \frac{l}{n}$, teremos:

$$\begin{aligned}
(3.9) \quad &\Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi \frac{l}{n}}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) + \cos\left(\frac{n\pi \frac{l}{n}}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) = \sin\left(\frac{n\pi \frac{l}{n}}{l}\right) \\
&\Rightarrow \sin(\pi) \cos\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) + \cos(\pi) \sin\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) = \sin(\pi) \\
&\Rightarrow 0 \cos\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) + (-1) \sin\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) = 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; \frac{n\pi T'}{l} = 0 \\
&\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; T' = \frac{k\pi l}{n\pi} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; T' = \frac{k}{2}T.
\end{aligned}$$

Agora, vamos provar que ψ_n é periódica com período fundamental $T = 2l/n$.

Primeiramente, mostraremos que $T = 2l/n$ é um período para ψ_n , isto é, $\psi_n(x + T) = \psi_n(x)$.

$$\begin{aligned}
\psi_n(x + T) &= \cos\left(\frac{n\pi(x + T)}{l}\right) \\
&= \cos\left(\frac{n\pi x}{l} + \frac{n\pi T}{l}\right) \\
&= \cos\left(\frac{n\pi x}{l} + \frac{n\pi \frac{2l}{n}}{l}\right) \\
&= \cos\left(\frac{n\pi x}{l} + 2\pi\right) \\
&= \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\
&= \psi_n(x).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Na igualdade (3.10) acima, usamos que a função cosseno é periódica com período 2π , isso é visto na seção 4.2.

Agora, dado outro período T' de ψ_n , temos que:

$$\psi_n(x + T') = \psi_n(x) \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos\left(\frac{n\pi(x + T')}{l}\right) &= \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ \Rightarrow \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) - \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) &= \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Tomando $x = \frac{l}{n}$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos\left(\frac{n\pi \frac{l}{n}}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) - \sin\left(\frac{n\pi \frac{l}{n}}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) &= \cos\left(\frac{n\pi \frac{l}{n}}{l}\right) \\ \Rightarrow \cos(\pi)\cos\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) - \sin(\pi)\sin\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) &= \cos(\pi) \\ \Rightarrow -1\cos\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) - 0\sin\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) &= -1 \\ \Rightarrow \cos\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) &= 1 \\ \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; \frac{n\pi T'}{l} &= 2\pi k \\ \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; T' &= \frac{2k\pi l}{n\pi} \\ \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; T' &= kT. \end{aligned}$$

Na igualdade (3.12) acima, usamos que $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$. É provado na proposição 4.2.1. Portanto T é o menor período positivo de ψ_n . $\square$

Outra propriedade que precisaremos, é analisar se essas funções são ortogonais. Para isso, iremos definir um produto interno que irá nos ajudar a mostrar as relações de ortogonalidade da proposição 3.1.2 e para calcular os coeficientes a_n e b_n conhecendo a f .

Definição 3.1.3. Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são duas funções tal que o seu produto é integrável, definimos o produto interno de f com g como:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx. \quad (3.13)$$

Se $\langle f, g \rangle = 0$ dizemos que f e g são ortogonais em $[a, b]$. Uma família de funções é dita ortogonal em $[a, b]$ se as funções são ortogonais duas a duas.

Agora, com o auxílio do produto interno definido acima, vamos mostrar algumas relações entre as funções (3.6) e (3.7) que são as funções que aparecem multiplicando os coeficientes a_n e b_n em (3.5).

Proposição 3.1.2. *O conjunto $\{\psi_n : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortogonal em $[-l, l]$ e valem as seguintes relações de ortogonalidade:*

$$\int_{-l}^l \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n, m \in \mathbb{Z}^+, n \neq m, \\ l & \text{se } n = m \in \mathbb{N}, \\ 2l & \text{se } n = m = 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\int_{-l}^l \psi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+, \forall m \in \mathbb{N}, \quad (3.15)$$

$$\int_{-l}^l \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n, m \in \mathbb{N}, n \neq m, \\ l & \text{se } n = m \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Demonstração. Vamos provar (3.14).

$$\begin{aligned} \langle \psi_n, \psi_m \rangle &= \int_{-l}^l \psi_n(x) \psi_m(x) dx \\ &= \int_{-l}^l \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx. \end{aligned}$$

Para resolvermos essa integral, usaremos as fórmulas

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \quad (3.17)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b). \quad (3.18)$$

Somando (3.17) e (3.18),

$$\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos(a) \cos(b)$$

e portanto

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{\cos(a + b) + \cos(a - b)}{2}. \quad (3.19)$$

Usando (3.19) em (3.14), obtemos

$$\int_{-l}^l \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left[\cos \left(\frac{(n+m)\pi x}{l} \right) + \cos \left(\frac{(n-m)\pi x}{l} \right) \right] dx;$$

se $n \neq m$, temos que:

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \psi_n(x) \psi_m(x) dx &= \frac{1}{2} \left[\frac{l}{(n+m)} 2 \sin((n+m)\pi) + \frac{l}{(n-m)} 2 \sin((n-m)\pi) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2l}{(n+m)} \cdot 0 + \frac{2l}{(n-m)} \cdot 0 \right] \\ &= 0; \end{aligned}$$

se $n = m$, temos que:

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l (\psi_n(x))^2 dx &= \int_{-l}^l \left[\cos \left(\frac{2n\pi x}{l} \right) + \cos(0) \right] dx \\ &= \int_{-l}^l \left[\cos \left(\frac{2n\pi x}{l} \right) + 1 \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{l}{(2n\pi)} 2 \sin(n\pi) + 2l \right] \\ &= l; \end{aligned}$$

se $n = m = 0$, temos que:

$$\int_{-l}^l (\psi_0(x))^2 dx = \int_{-l}^l (\cos(0))^2 dx = \int_{-l}^l dx = 2l;$$

Agora vamos mostrar (3.15).

$$\langle \psi_n, \varphi_m \rangle = \int_{-l}^l \psi_n(x) \varphi_m(x) dx = \int_{-l}^l \cos \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \sin \left(\frac{m\pi x}{l} \right) dx. \quad (3.20)$$

Para resolvermos essa integral, usaremos as fórmulas:

$$\sin(a+b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b), \quad (3.21)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b). \quad (3.22)$$

Somando (3.21) e (3.22):

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin(a) \cos(b) \quad (3.23)$$

e portanto

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}. \quad (3.24)$$

Usando (3.24) em (3.20), obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \psi_n(x) \varphi_m(x) dx &= \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left[\sin\left(\frac{(n+m)\pi x}{l}\right) + \cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{l}\right) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-l}^l \sin\left(\frac{(n+m)\pi x}{l}\right) dx + \frac{1}{2} \int_{-l}^l \cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{l}\right) dx. \end{aligned}$$

A primeira integral:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-l}^l \sin\left(\frac{(n+m)\pi x}{l}\right) dx &= \frac{1}{2} \left[\frac{l}{(n+m)l} [\cos((n+m)\pi) - \cos(-(n+m)\pi)] \right] \\ &= \frac{l}{2(n+m)l} [\cos((n+m)\pi) - \cos((n+m)\pi)] \\ &= 0; \end{aligned}$$

A segunda integral:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-l}^l \cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{l}\right) dx &= \frac{1}{2} \left[\frac{l}{(n-m)l} [\cos((n-m)\pi) - \cos(-(n-m)\pi)] \right] \\ &= \frac{l}{2(n-m)l} [\cos((n-m)\pi) - \cos((n-m)\pi)] \\ &= 0; \end{aligned}$$

E finalmente vamos mostrar (3.16).

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \int_{-l}^l \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \int_{-l}^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx.$$

Para resolvermos essa integral, usaremos as fórmulas (3.17) e (3.18).

Subtraindo (3.17) de (3.18),

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = 2 \sin(a) \sin(b)$$

e portanto

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{\cos(a+b) - \cos(a-b)}{2}. \quad (3.25)$$

Usando a fórmula (3.25) para calcular a integral em (3.16), obtemos que

$$\int_{-l}^l \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx;$$

se $n \neq m$, temos que:

$$\int_{-l}^l \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx.$$

□

Essa proposição 3.1.2 pode ser observada com o auxílio do GeoGebra. Como estamos trabalhando integrais, isto é, com áreas, ao colocar essas integrais no GeoGebra e animar os parâmetros, obtemos um gráfico visivelmente atraente como vemos na figura 1 cuja construção e animação estão disponível em <https://www.geogebra.org/m/w9n52yrb>.

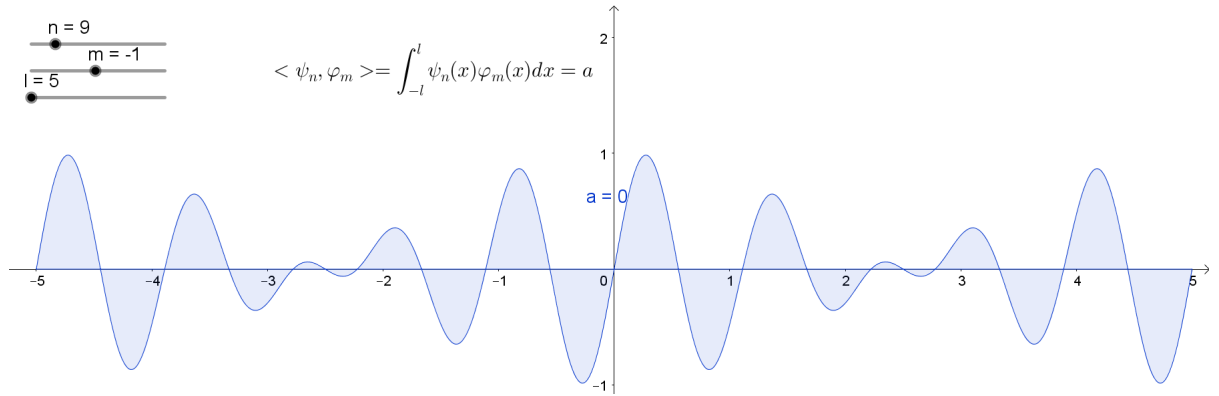


Figura 1 – $a = 0$ indica a área da função calculada pela integral à Riemann.

Agora, vamos usar as propriedades acima para calcular formalmente os coeficientes a_n e b_n na expressão (3.5) conhecida como a função f , a qual, em termos das funções φ_n e ψ_n , pode ser reescrita como:

$$f \sim \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \psi_n + b_n \varphi_n). \quad (3.26)$$

Calculando formalmente o produto interno de f com ψ_0 em $[-l, l]$, com o auxílio da proposição 3.1.2 obtemos

$$\begin{aligned}
 \langle f, \psi_0 \rangle &= \int_{-l}^l f \psi_0 dx \\
 &= \int_{-l}^l \left[\frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \psi_n + b_n \varphi_n) \right] \psi_0 dx \\
 &= \int_{-l}^l \frac{a_0}{2} \psi_0 \psi_0 dx + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \psi_n \psi_0 + b_n \varphi_n \psi_0) dx \\
 &= \int_{-l}^l \frac{a_0}{2} \psi_0^2 dx + \int_{-l}^l \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \psi_n \psi_0 dx + \int_{-l}^l \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \varphi_n \psi_0 dx \\
 &= \frac{a_0}{2} \int_{-l}^l \psi_0^2 dx + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{-l}^l \psi_n \psi_0 dx + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \int_{-l}^l \varphi_n \psi_0 dx \\
 &= \frac{a_0}{2} 2l + 0 + 0 \\
 &= a_0 l
 \end{aligned}$$

e portanto

$$a_0 = \frac{1}{l} \langle f, \psi_0 \rangle = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \psi_0(x) dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx;$$

Agora, calculando o produto interno de f com ψ_n , obtemos para cada n :

$$\begin{aligned}
 \langle f, \psi_n \rangle &= \int_{-l}^l f \psi_n dx \\
 &= \int_{-l}^l \left[\frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \psi_n + b_n \varphi_n) \right] \psi_n dx \\
 &= \int_{-l}^l \frac{a_0}{2} \psi_0 \psi_n dx + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \psi_n \psi_n + b_n \varphi_n \psi_n) dx \\
 &= \int_{-l}^l \frac{a_0}{2} \psi_0 \psi_n dx + \int_{-l}^l \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \psi_n^2 dx + \int_{-l}^l \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \varphi_n \psi_0 dx \\
 &= 0 + a_n \langle \psi_n, \psi_n \rangle + 0 \\
 &= a_n l
 \end{aligned}$$

e fazendo o produto interno de f com φ_n , obtemos para cada n ,

$$\begin{aligned}
 \langle f, \varphi_n \rangle &= \int_{-l}^l f \varphi_n dx \\
 &= \int_{-l}^l \left[\frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \psi_n + b_n \varphi_n) \right] \varphi_n dx \\
 &= \int_{-l}^l \frac{a_0}{2} \psi_0 \varphi_n dx + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \psi_n \varphi_n + b_n \varphi_n \varphi_n) dx \\
 &= \int_{-l}^l \frac{a_0}{2} \psi_0 \varphi_n dx + \int_{-l}^l \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \psi_n \varphi_n dx + \int_{-l}^l \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \varphi_n^2 dx \\
 &= 0 + 0 + b_n \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \\
 &= b_n l.
 \end{aligned}$$

Portanto

$$a_n = \frac{1}{l} \langle f, \psi_n \rangle = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad (3.27)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \langle f, \varphi_n \rangle = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx. \quad (3.28)$$

A obtenção das fórmulas acima foi inteiramente formal, mas agora é possível inverter o processo, isto é, dada $f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que as integrais em (3.27) e (3.28) façam sentido, podemos formar a série (3.5) e estudar sua convergência. As fórmulas (3.27) e (3.28) são conhecidas como as *fórmulas de Euler-Fourier*.

Assim, já possuímos nossa primeira resposta, vamos apenas formalizá-la para ir atrás das próximas perguntas da seguinte forma:

Sejam $l > 0$ e $f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. A *série de Fourier* de f é a série

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right] \quad (3.29)$$

onde os coeficientes a_n , $n \in \mathbb{Z}^+$ e b_n , $n \in \mathbb{N}$ são chamados de *coeficientes de Fourier* de f .

Exemplo 3.1.1. Vamos calcular a série de Fourier para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -3 < x < -1 \\ 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Das fórmulas de Euler-Fourier temos que:

$$a_0 = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 dx = \frac{1}{3} [1 - (-1)] = \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx \\ &= \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx \\ &= \frac{3}{3n\pi} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right) \right] \\ &= \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx \\ &= \frac{3}{3n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right) \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, a série de Fourier da função f é

$$S[f](x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right).$$

cujo gráfico é dada pela figura 2.

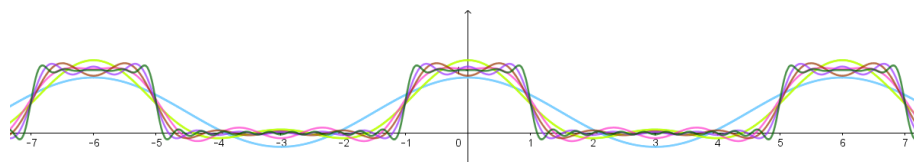


Figura 2 – Onda Retangular.

Pela proposição 3.1.1, cada um dos termos da série (3.29) é uma função periódica de período $2l$ (basta tomar $T = 2l$ com $n = 1$) e portanto, se a série converge para cada $x \in \mathbb{R}$, ela converge para uma função periódica $2l$. Em particular, se a função f for tal que $f(-l) \neq f(l)$, não podemos esperar que a série de Fourier convirja para $f(x)$ para todo $x \in [-l, l]$ pois não teremos uma função de período T .

Um fato interessante das séries de Fourier é que as funções pares sempre têm séries de Fourier apenas em cossenos, enquanto que as funções ímpares têm séries de Fourier em senos. A razão se dá porque uma função par é ortogonal em $[-l, l]$ a uma função ímpar. Ou seja, quando f for par, teremos $\sin(\frac{n\pi x}{l}) = 0$ e quando f for ímpar, teremos $\cos(\frac{n\pi x}{l}) = 0$.

Outro fato interessante, é que podemos reescrever a série de Fourier de uma função f definida em $[-l, l]$ na forma complexa. De fato, primeiramente precisamos lembrar da seguinte igualdade:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

isso implica que:

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos x + i \sin x - i \sin x \\ &= \frac{\cos x + i \sin x - i \sin x + \cos x}{2} \\ &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin x + \cos x - \cos x \\ &= \frac{i \sin x + \cos x - \cos x i \sin x}{2i} \\ &= \frac{\cos x + i \sin x - (\cos x - i \sin x)}{2i} \\ &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}[f] &= \frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(\frac{n\pi x}{l}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{l})] \\
&= \frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \frac{e^{in\pi x/l} + e^{-in\pi x/l}}{2} + b_n \frac{e^{in\pi x/l} - e^{-in\pi x/l}}{2i}] \\
&= \frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \frac{e^{in\pi x/l} + e^{-in\pi x/l}}{2} + b_n \frac{e^{in\pi x/l} - e^{-in\pi x/l}}{2i}] \\
&= \frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [\frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\pi x/l} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\pi x/l}] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{in\pi x/l}
\end{aligned}$$

onde a série de $-\infty$ a $+\infty$ deve ser interpretada no sentido de valor próprio, isto é,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^{+N} \hat{f}(n) e^{in\pi x/l} \quad (3.30)$$

e os coeficientes de $\hat{f}(n)$, também chamados de *coeficientes de Fourier complexos* de f , são dados por:

$$\hat{f}(0) = \frac{a_0}{2} \quad (3.31)$$

$$\hat{f}(n) = \frac{a_n - ib_n}{2}, n \in \mathbb{N} \quad (3.32)$$

$$\hat{f}(-n) = \frac{a_n + ib_n}{2}, n \in \mathbb{N} \quad (3.33)$$

a série (3.30) é a *série de Fourier complexa* de f . A convergência da série de Fourier de f dada por (3.29) é equivalente à convergência da série complexa no sentido da existência do limite em (3.30). Além disso, das fórmulas (3.27), (3.28), (3.31), (3.32) e (3.33) nota-se que:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} f(x) e^{-in\pi x/l} dx, n \in \mathbb{Z}. \quad (3.34)$$

Note que mesmo que a f seja real, os coeficientes de Fourier complexos são de fato números complexos, salvo se $b_n = 0$.

3.2 Interpretação Geométrica

O método utilizado para calcular os coeficientes de Fourier possui uma motivação geométrica. Para vermos isso, consideramos o espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ munido do produto interno usual:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j, \quad x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n).$$

Os vetores $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$ formam uma base para $\mathbb{R}^n$ e portanto cada vetor $x \in \mathbb{R}^n$ pode ser dado como uma combinação linear dos vetores $e_1, \dots, e_n$,

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e_j.$$

Sabemos que a base $\{e_1, \dots, e_n\}$ é ortonormal, isto é,

$$\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k \\ 1 & \text{se } j = k \end{cases}$$

(δ_{jk} é chamado de *delta de Kronecker*). Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle x, e_k \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^n x_j e_j, e_k \right\rangle \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k \\ x_k & \text{se } j = k \end{cases} \\ &= x_k. \end{aligned}$$

Geometricamente, o que temos de

$$x_j e_j = \langle x, e_j \rangle e_j$$

é a projeção ortogonal de x ao longo do vetor e_j -veja na figura 3.

Uma definição que nos ajudará fazer uma relação com as séries de Fourier é: denotamos por $C([-l, l])$ o conjunto das funções $f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciáveis (respectivamente contínuas).

Sendo assim, no caso de séries de Fourier é análogo, temos o espaço vetorial (por exemplo $C([-l, l])$) munido de um produto interno (definido por (3.13) com

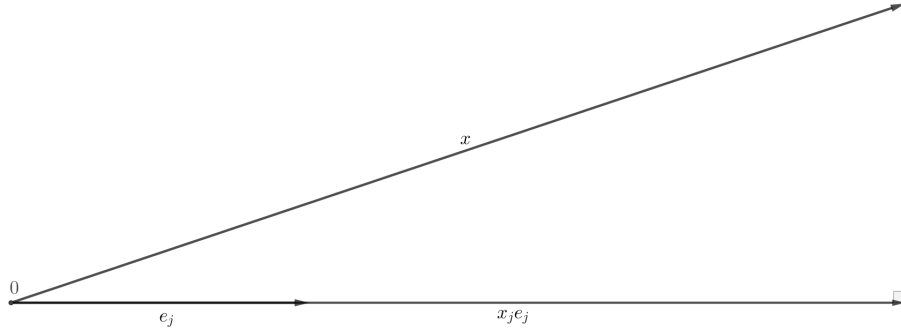


Figura 3 – $x_j e_j$ é a projeção ortogonal do vetor x sobre a reta determinada pelo vetor e_j .

$a = -b = l$) e um conjunto ortogonal (mas não ortonormal em geral, porque $\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = \langle \psi_n, \psi_n \rangle = l$ se $n \in \mathbb{N}$) formado pelas funções $\psi_n, n \in \mathbb{Z}^+$, e $\varphi_n, n \in \mathbb{N}$. Por mais que essas funções não formem uma base no sentido algébrico, se pudermos expandir uma função f em série de Fourier, se a série convergir pontualmente para f e se pudermos integrar a série termo a termo, então poderemos justificar as contas formais que fizemos para achar as fórmulas de Euler-Fourier.

Usando essas ideias geométricas, podemos obter algumas propriedades das séries de Fourier.

Definição 3.2.1. Uma função é dita seccionalmente contínua em $[a, b]$ se existe uma partição $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ do intervalo $[a, b]$ tal que f é contínua em cada subintervalo (x_j, x_{j+1}) e $f(x)$ tende a um limite finito quando $x \in (x_j, x_{j+1})$ tende a x_j ou a x_{j+1} , $0 \leq j \leq n-1$.

Exemplo 3.2.1. A função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico é mostrado na figura 4 é seccionalmente contínua, enquanto que a função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ não é pois $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty$.

Uma observação é que a função seccionalmente contínua em $[a, b]$ não está necessariamente definida em todo intervalo $[a, b]$. De fato, pode estar definida apenas em $\bigcup_{j=0}^{n-1} (x_j, x_{j+1})$. Note também que uma função seccionalmente contínua em $[a, b]$ é limitada, isto é, $\exists M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ qualquer que seja x no domínio de f . De fato, se isso não fosse verdade, então deixaríamos de ter a continuidade em

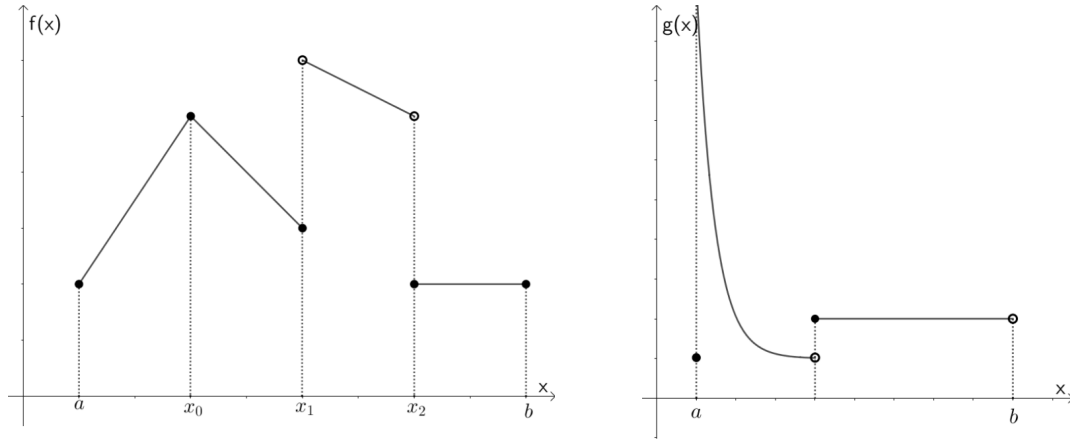


Figura 4 – f é seccionalmente contínua mas g não é. Observe que f' também é seccionalmente contínua mesmo que não esteja definida em x_0, x_1 e x_2 .

cada subintervalo (x_j, x_{j+1}) ou o limite finito quando $x \in (x_j, x_{j+1})$ tendesse a x_j ou a x_{j+1} .

Denotamos por $SC([-l, l])$ o espaço das funções reais seccionalmente contínuas em $[l, -l]$.

Há uma observação importante que precisamos fazer em $SC([-l, l])$. O produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-l}^l f(x)g(x)dx \quad (3.35)$$

não é um produto interno, já que as funções em $SC([-l, l])$ em geral não são contínuas, existem funções $f \in SC([-l, l])$ com $\langle f, f \rangle = 0$ mas $f(x) \neq 0$ para algum $x \in [-l, l]$.

De fato, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma *forma bilinear simétrica positiva* em $SC([-l, l])$, isto é, satisfaz as seguintes propriedades:

- i. $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle, \forall f, g, h \in SC([-l, l]), \alpha, \beta \in \mathbb{R};$
- ii. $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle, \forall f, g \in SC([-l, l]);$
- iii. $\langle f, f \rangle \geq 0, \forall f \in SC([-l, l]);$

Usando as propriedades de integral de Riemann obtemos os itens acima:

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha f + \beta g, h \rangle &= \int_{-l}^l [\alpha f(x) + \beta g(x)] h(x) dx \\
 &= \int_{-l}^l \alpha f(x) h(x) + \beta g(x) h(x) dx \\
 &= \alpha \int_{-l}^l f(x) h(x) dx + \beta \int_{-l}^l g(x) h(x) dx \\
 &= \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle f, g \rangle &= \int_{-l}^l f(x) g(x) dx \\
 &= \int_{-l}^l g(x) f(x) dx \\
 &= \langle g, f \rangle.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle f, f \rangle &= \int_{-l}^l f(x) f(x) dx \\
 &= \int_{-l}^l f^2(x) dx \geq 0.
 \end{aligned}$$

Dessas propriedades obtemos a **desigualdade de Cauchy-Bunyakowsky-Schwartz** quaisquer que sejam $f, g \in SC([-l, l])$,

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|. \quad (3.36)$$

onde

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}, \forall f \in SC([-l, l]). \quad (3.37)$$

Dados $r \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \langle rf + g, rf + g \rangle \\
 &= \langle rf, rf \rangle + \langle rf, g \rangle + \langle g, rf \rangle + \langle g, g \rangle \\
 &= r^2 \langle f, f \rangle + 2r \langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle \\
 &= r^2 \|f\|^2 + 2r \langle f, g \rangle + \|g\|^2;
 \end{aligned}$$

como é válido para todo $r \in \mathbb{R}$, a inequação não possui raízes reais na desigualdade estrita, o discriminante é menor ou igual a zero, isto é,

$$\begin{aligned}
 4 \langle f, g \rangle^2 - 4 \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle &\leq 0 \Rightarrow \langle f, g \rangle^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle \\
 &\Rightarrow \sqrt{\langle f, g \rangle^2} \leq \sqrt{\langle f, f \rangle \langle g, g \rangle} \\
 &\Rightarrow |\langle f, g \rangle| \leq \sqrt{\langle f, f \rangle} \sqrt{\langle g, g \rangle} \\
 &\Rightarrow |\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|.
 \end{aligned}$$

Geometricamente, se $f, g \in SC([-l, l])$, $\|f - g\|$ mede, de certa forma, o quanto as funções f e g estão longe uma da outra como podemos observar na figura 5.

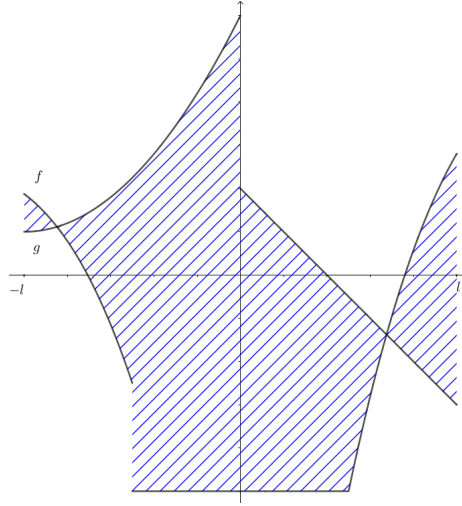


Figura 5 – $\|f - g\|$ e a área da região compreendida entre os gráficos de f e g possuem o mesmo valor.

Proposição 3.2.1. *Seja $f \in SC([-l, l])$ e seja*

$$S[f] = \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]$$

sua série de Fourier. Então as séries:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$$

convergem e vale a desigualdade de Bessel:

$$l\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2\right) \leq \|f\|^2. \quad (3.38)$$

Demonstração. Para cada $N, M \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| f - \frac{a_0}{2}\psi_0 - \sum_{n=1}^N a_n\psi_n - \sum_{m=1}^M b_m\varphi_m \right\|^2 \\ &= \langle f, f \rangle - \frac{a_0}{2} \langle f, \psi_0 \rangle - \sum_{n=1}^N a_n \langle f, \psi_n \rangle - \sum_{m=1}^M b_m \langle f, \varphi_m \rangle \\ &\quad - \frac{a_0}{2} \langle \psi_0, f \rangle + \frac{a_0^2}{2} \langle \psi_0, \psi_0 \rangle + \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^N a_n \langle \psi_0, \psi_n \rangle + \frac{a_0}{2} \sum_{m=1}^M b_m \langle \psi_0, \varphi_m \rangle \\ &\quad - \sum_{n=1}^N a_n \langle \psi_n, f \rangle + \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^N a_n \langle \psi_n, \psi_0 \rangle + \sum_{n=1}^N a_n^2 \langle \psi_n, \psi_n \rangle + \sum_{n=1}^N a_n \sum_{m=1}^M b_m \langle \psi_n, \varphi_m \rangle \\ &\quad - \sum_{m=1}^M b_m \langle \varphi_m, f \rangle + \frac{a_0}{2} \sum_{m=1}^M b_m \langle \varphi_m, \psi_0 \rangle + \sum_{m=1}^M b_m \langle \varphi_m, \psi_n \rangle + \sum_{m=1}^M b_m^2 \langle \varphi_m, \varphi_m \rangle \end{aligned}$$

usando as relações de ortogonalidade (3.1.2) e as equações de Euler-Fourier (3.27) e (3.28),

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle f, f \rangle - \frac{a_0^2}{2}l - \sum_{n=1}^N a_n^2l - \sum_{m=1}^M b_m^2l - \frac{a_0^2}{2}l + \frac{a_0^2}{2}l + 0 + 0 \\ &\quad - \sum_{n=1}^N a_n^2l + 0 + \sum_{n=1}^N a_n^2l + 0 - \sum_{m=1}^M b_m^2l + 0 + 0 + \sum_{m=1}^M b_m^2l \\ &= \langle f, f \rangle - l\frac{a_0^2}{2} - l \sum_{n=1}^N a_n^2 - l \sum_{m=1}^M b_m^2 \\ &= \langle f, f \rangle - l\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 + \sum_{m=1}^M b_m^2\right) \\ &= \|f\|^2 - l\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 + \sum_{m=1}^M b_m^2\right). \end{aligned}$$

Portanto, quaisquer que sejam $N, M \in \mathbb{N}$, quando multiplicamos a desigualdade por $-\frac{1}{l}$ obtemos:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N a_n^2 + \sum_{m=1}^M b_m^2 \leq \frac{1}{l} \|f\|^2. \quad (3.39)$$

Como toda série limitada de termos positivos é convergente, a desigualdade em (3.39) implica na convergência das séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2.$$

Assim, podemos tomar o limite quando $N, M \rightarrow +\infty$ em (3.39) e obtemos a desigualdade de Bessel.

$$l\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2\right) \leq \|f\|^2.$$

□

Da desigualdade de Bessel resulta o *lema de Riemann-Lebesgue* que é fundamental para a teoria de Séries de Fourier.

Corolário 3.2.1. *Se $f \in SC([-l, l])$ e*

$$S[f] = \frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n\psi_n + b_n\varphi_n)$$

é sua série de Fourier, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

Demonstração. Da Proposição 3.2.1, sabemos que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$$

convergem. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^2 = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n^2$$

Logo, para qualquer $\varepsilon_1 > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}; n > n_0$ implica que:

$$a_n^2 < \varepsilon_1.$$

Assim, temos que:

$$\forall n > n_0, |a_n| = \sqrt{a_n^2} < \sqrt{\varepsilon_1} = \varepsilon.$$

Isto é, $a_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. É exatamente análogo para b_n .

□

O mesmo resultado vale para a série de Fourier na forma complexa, o qual enunciaremos abaixo.

Corolário 3.2.2. *Se $f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{C}$ é seccionalmente contínua, então $\hat{f}(n) \rightarrow 0$ quando $|n| \rightarrow +\infty$.*

Com os coeficientes de Fourier e a interpretação geométrica, na próxima seção veremos a convergência pontual das séries de Fourier.

3.3 Convergência Pontual das Séries de Fourier

Inicialmente, vemos que podemos estender uma função $f \in SC([-l, l])$ a uma função periódica F de período $2l$ que é seccionalmente contínua em cada intervalo $[a, b]$: se $x \in [(2k-1)l, (2k+1)l]$ e f está definida em $x - 2kl \in [-l, l]$, a extensão F é dada por:

$$F(x) = f(x - 2kl).$$

Além disso, vamos denotar dois espaços que serão importantes para o estudo das convergências:

Denotamos por $SC_{per}(2l)$ o espaço das funções reais periódicas de período $2l$ que são seccionalmente contínuas em qualquer intervalo $[a, b]$. Observe que podemos identificar, de maneira natural, $SC_{per}(2l)$ e $SC([-l, l])$.

De maneira análoga, denotamos por $C_{per}(2l)$ o espaço das funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas e periódicas de período $2l$. Note que podemos identificar, de maneira natural $C_{per}(2l)$ com $\{f \in C([-l, l]) : f(-l) = f(l)\}$.

Dados $f \in SC_{per}(2l)$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, denotaremos por $f(x_0^+)$ e $f(x_0^-)$ os limites laterais

$$f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \quad f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

O objetivo desta seção é provar o seguinte teorema:

Teorema 3.3.1. *Seja $f \in SC_{per}(2l)$ e suponha que f é diferenciável, a menos de um número finito de pontos $(-l, l)$, com $f' \in SC_{per}(2l)$. Então, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, a série de Fourier de f no ponto x converge a $(f(x^+) + f(x^-))/2$.*

Antes de demonstrar o teorema 3.3.1, vamos mostrar que o resultado é válido com uma hipótese simplificadora:

Lema 3.3.1. *Seja f como no teorema 3.3.1 e suponha que f é contínua na origem com $f(0) = 0$. Então a série de Fourier de f na origem converge para $f(0)$, isto é,*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) = 0.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-in\pi x/l} dx \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \frac{f(x)}{e^{i\pi x/l} - 1} (e^{i\pi x/l} - 1) e^{-in\pi x/l} dx \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \frac{f(x)}{e^{i\pi x/l} - 1} (e^{i\pi x/l} e^{-in\pi x/l} - e^{-in\pi x/l}) dx \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \frac{f(x)}{e^{i\pi x/l} - 1} (e^{i\pi x/l - in\pi x/l} - e^{-in\pi x/l}) dx \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \frac{f(x)}{e^{i\pi x/l} - 1} (e^{-i(n-1)x/l} - e^{-in\pi x/l}) dx \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \left[\frac{f(x)}{e^{i\pi x/l} - 1} e^{-i(n-1)x/l} - \frac{f(x)}{e^{i\pi x/l} - 1} e^{-in\pi x/l} \right] dx \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \frac{f(x)}{e^{i\pi x/l} - 1} e^{-i(n-1)x/l} dx - \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \frac{f(x)}{e^{i\pi x/l} - 1} e^{-in\pi x/l} dx. \end{aligned}$$

Como a função f e $x \mapsto e^{i\pi x/l} - 1$ são contínuas em $x = 0$, por f ser seccionalmente contínua, $\frac{f(x)}{e^{i\pi x/l} - 1}$ é seccionalmente contínua e vale o lema de Riemann-Lebesgue. Isto é,

$$\lim_{|n| \rightarrow +\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \frac{f(x)}{e^{i\pi x/l} - 1} e^{-inx/l} dx = 0.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^{+N} \hat{f}(n) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^{+N} \left[\frac{1}{2l} \int_{-l}^l \frac{f(x)}{e^{i\pi x/l} - 1} e^{-i(n-1)x/l} dx - \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \frac{f(x)}{e^{i\pi x/l} - 1} e^{-in\pi x/l} dx \right] \\ &= \sum_{n=-N}^{+N} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2l} \int_{-l}^l \frac{f(x)}{e^{i\pi x/l} - 1} e^{-i(n-1)x/l} dx - \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \frac{f(x)}{e^{i\pi x/l} - 1} e^{-in\pi x/l} dx \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

□

Este caso implica o teorema geral. A ideia é ir transformando a função f até obter outra função como no lema.

É interessante observar que o Lema 3.3.1 prova a convergência da série complexa no sentido que

$$\lim_{n,m \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^m \hat{f}(k) = 0$$

e não apenas no sentido de valor principal, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) = 0.$$

Para o caso geral, provaremos apenas a convergência no sentido de valor principal.

Demonstração do Teorema 3.3.1. Seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Vamos primeiro definir uma transformação no plano que leve o ponto $(x_0, [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2)$ na origem.

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x - x_0, y - [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2). \end{aligned}$$

Note que:

$$T(x_0, [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2) = (x_0 - x_0, [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2 - [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2) = (0, 0)$$

e

$$T(x, f(x)) = (x - x_0, f(x) - [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2),$$

ou seja, T leva o gráfico de f nos pontos da forma $(x - x_0, f(x) - [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2)$.

Assim, definimos a função g como

$$g(x) = f(x + x_0) - [f(x_0^+) + f(x_0^-)]/2.$$

A função g ainda não está como no lema 3.3.1 porque não necessariamente é contínua em $x = 0$; mas, como

$$[g(0^+) + g(0^-)]/2 = 0$$

podemos obter uma função contínua na origem fazendo a média

$$h(x) = \begin{cases} [g(x) + g(-x)]/2 & \text{se } x \neq 0, x \in [-l, l) \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$h(x + 2l) = h(x).$$

Como $f, f' \in SC_{per}(2l)$, por construção, $g, g', h, h' \in SC_{per}(2l)$. Além disso, h é contínua na origem com $h(0) = 0$, o que satisfaz as hipóteses do lema 3.3.1. Assim, obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \hat{h}(k) = 0.$$

Como $\hat{h}(k) = [\hat{g}(k) + \hat{g}(-k)]/2$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \hat{h}(k) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \hat{g}(k) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2l} \int_{-l}^l [f(x + x_0) - \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]] e^{-ik\pi x/l} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{-ik\pi x_0/l} - \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{-ik\pi x_0/l} = \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)].$$

□

Com esse resultado, uma das coisas que sabemos é que as séries de Fourier converge para a média nos pontos de descontinuidade da função. Na próxima seção veremos outra convergência das séries de Fourier.

3.4 Convergência Uniforme das séries de Fourier

Para que possamos mostrar a convergência uniforme da Série de Fourier, precisamos de alguns resultados que enunciaremos aqui cuja demonstração e maiores detalhes se encontra no livro de EDP (IÓRIO, 2007).

Teorema 3.4.1. (*Teste M de Weierstrass*) Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ um conjunto não vazio e $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ uma sequência em $C_{\mathbb{C}}(\Omega)$. Suponha que existe uma sequência numérica $\{M_n\}_{n=1}^{+\infty}$ tal que:

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty.$$

Então a série de funções $\sum f_n(x)$ converge uniformemente em ω .

Teorema 3.4.2. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ um conjunto não vazio e $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ uma sequência em $C_{\mathbb{C}}(\Omega)$. Se a sequência $\{f_n\}$ converge uniformemente para uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, então $f \in C_{\mathbb{C}}(\Omega)$.

Proposição 3.4.1. Suponha que $f \in C_{\text{per}}(2l)$ é diferenciável em $(-l, l)$ a menos de um número finito de pontos com $f' \in SC_{\text{per}}(2l)$. Então os coeficientes de Fourier complexos de f e f' satisfazem

$$(\hat{f}')(n) = \frac{in\pi}{l} \hat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.40)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \hat{f}'(n) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f'(x) e^{-in\pi x/l} dx \\ &= \frac{1}{2l} \left[f(x) e^{-in\pi x/l} \Big|_{x=-l}^{x=l} + \frac{in\pi}{l} \int_{-l}^l f(x) e^{-in\pi x/l} dx \right] \\ &= \frac{in\pi}{l} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-in\pi x/l} dx \\ &= \frac{in\pi}{l} \hat{f}(n). \end{aligned}$$

□

A equação (3.40) nos diz que quanto mais diferenciável é a função f , mais rápido sua série de Fourier converge. Se f é k vezes diferenciável com $f^{(k)} \in SC_{\text{per}}(2l)$, $k > 1$, usando (3.40) k vezes obtemos:

$$\hat{f}(n) = \left(\frac{l}{in\pi} \right)^k \hat{f}^{(k)}(n), \quad n \in \mathbb{Z}, n \neq 0. \quad (3.41)$$

Em particular, se $k \geq 2$, a série de Fourier de f converge uniformemente para f .

De fato, se $f, f' \in C_{per}(2l)$ e $f'' \in SC_{per}(2l)$, pelo lema de Riemann-Lebesgue na forma complexa (Corolário 3.2.2), $\hat{f}''(n) \rightarrow 0$ quando $|n| \rightarrow +\infty$, logo a sequência $\{\hat{f}''(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é limitada, isto é, existe uma constante $K > 0$ tal que:

$$|\hat{f}''(n)| \leq K, \forall n \in \mathbb{Z};$$

aplicando (3.41), obtemos:

$$|\hat{f}(n)e^{in\pi x/l}| \leq \frac{l^2}{n^2\pi^2} |\hat{f}''(n)| \leq \frac{Kl^2}{\pi^2} \frac{1}{n^2};$$

como a série $\sum(1/n^2)$ converge, pelo Teste M de Weierstrass a série de Fourier de f converge uniformemente; como a série de Fourier de f converge para f pelo teorema 3.4.2 a série converge uniformemente para f .

Sendo assim, podemos melhorar o argumento acima da seguinte forma:

Teorema 3.4.3. *Suponha que $f \in C_{per}(2l)$ é diferenciável em $(-l, l)$ a menos de um número finito de pontos, com $f' \in SC_{per}(2l)$. Então a série de Fourier de f converge uniformemente em $\mathbb{R}$ para f .*

Demonstração. Pelo teorema 3.3.1 e pelo Teste M de Weierstrass, basta mostrar que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)| \leq K, \forall N \in \mathbb{N}. \quad (3.42)$$

Assim, seja $N \in \mathbb{N}$ arbitrário; usando (3.40), a desigualdade CBS (3.36) para $\mathbb{R}^{(2N)}$

e a desigualdade de Bessel (3.38), obtemos:

$$\sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)| = |\hat{f}(0)| + \sum_{1 \leq |n| \leq N} |\hat{f}(n)| \quad (3.43)$$

$$= |\hat{f}(0)| + \frac{l}{\pi} \sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{|n|} |\hat{f}'(n)| \quad (3.44)$$

$$\leq |\hat{f}(0)| + \frac{l}{\pi} \left(\sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{1 \leq |n| \leq N} |\hat{f}'(n)|^2 \right)^{1/2} \quad (3.45)$$

$$\leq |\hat{f}(0)| + \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{\pi}} \|f'\| \left(\sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} = K. \quad (3.46)$$

□

Com tanto, sabemos duas convergências da série de Fourier e já podemos dizer que a função f pode ser escrita da forma 3.5 quando tivermos as convergências. Ainda mais, sabemos que nos intervalos abertos em que a função é contínua, a série de Fourier converge uniformemente e nos pontos de descontinuidade da função, a série de Fourier converge para o ponto médio. No próximo capítulo, iremos apresentar uma proposta para trabalhar com as funções trigonométricas no ensino médio, introduzindo algumas demonstrações iniciais e utilizando o GeoGebra para ajudar na parte visual.

4 Introdução de Séries de Fourier no Ensino Médio

Nesse capítulo apresentaremos uma sugestão para trabalhar as funções de seno e cosseno no Ensino Médio como solicitado na habilidade (EM13MAT306) da BNCC. Tomamos o cuidado de deixar a ordem das seções da maneira que acreditamos que o professor possa trabalhar com os alunos. Sendo assim, esse capítulo pode ser visto como um plano de aula, podendo ser construído passo a passo juntamente com os estudantes.

4.1 As fases da Lua

Há oito fases da Lua, as quais são: Lua nova, Crescente, Quarto Crescente, Crescente Gibosa, Lua Cheia, Minguante Gibosa, Quarto Minguante e Minguante. Como vemos na figura 6.



Figura 6 – As oito fases da Lua.

Agora, vamos observar a figura 6 apenas com as fases: Lua Nova, Quarto Crescente, Lua Cheia e Quarto Minguante juntamente com os eixos Ox e Oy .

Nota-se que podemos associar cada fase da lua como imagem dos pontos do eixo x , isto é, Lua Nova e Lua Cheia associamos como imagem do ponto $x = 0$, Quarto Minguante associamos como imagem do ponto $x = -1$ e a Quarto Crescente como imagem do ponto $x = 1$. Podemos ver isso na figura 7.

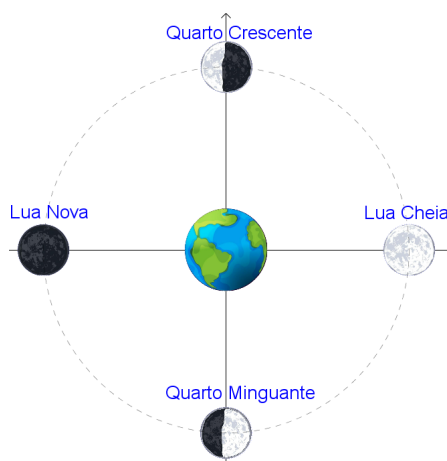


Figura 7 – As quatro fases da Lua com os eixos Oy, Ox .

Como as fases da Lua demoram aproximadamente 29,5 dias para concluir seu ciclo, vamos imaginar o eixo Ox como o tempo e organizar as Luas ao longo do eixo Ox de modo a distribuir as fases ao longo dos 29,5 dias. Como estamos trabalhando com 4 fases, podemos dividir os 29,5 dias por 4 fases e obteremos que cada Lua terá um período de aproximadamente 7,4 dias. Sendo assim, iniciando com a Lua nova no ponto $(0, 0)$, a Lua Quarto Crescente ficará no ponto $(7.4, 1)$, a Lua Cheia no ponto $(14.8, 0)$, a Quarto Minguante no ponto $(22.2, -1)$ e a próxima Lua Nova no ponto $(29.6, 0)$ como ilustrado na Figura 8.

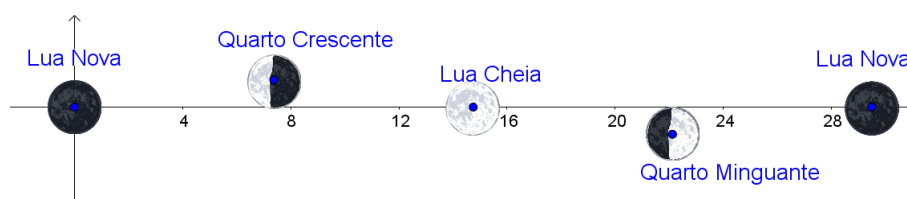


Figura 8 – Fases da Lua no período de 29,5 dias.

Agora, imaginemos que há uma função que passe por esses pontos em que

as fases da Lua são imagens. Sendo assim, podemos imaginar que o gráfico da função fica como na Figura 9.

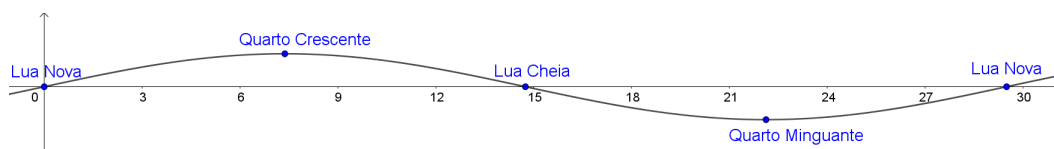


Figura 9 – Função que aproxima as 4 fases da Lua.

Agora, as perguntas que precisamos responder são: qual a função que aproxima dessa curva? Quais propriedades necessárias para obter a curva? Para isso, na próxima seção veremos a definição e algumas propriedades de duas funções periódicas que nos permitirão responder as perguntas.

4.2 Propriedades de Seno e Cosseno

Visto o problema, precisamos de ferramentas matemáticas que nos ajude o resolver. As funções que irão nos ajudar na aplicação será as funções seno e cosseno. Por isso, traremos aqui uma definição para tais funções.

Definição 4.2.1. Dado um número real θ , $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, seno de θ é definido pelo número real associado ao triângulo retângulo como a razão do cateto oposto ao ângulo θ e hipotenusa. O cosseno é a razão do cateto adjacente ao ângulo θ e a hipotenusa.

Note que dado um ponto $P = (a, b)$ no círculo de raio 1 podemos escrever o ponto como $P = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ para algum θ . De fato, seja P ponto de coordenada (a, b) no círculo de raio 1. O triângulo formado pelos segmentos do ponto P até a origem, do ponto P até a e da origem até a é um triângulo retângulo cuja hipotenusa unitária é o segmento do ponto P até a origem e catetos de tamanho a e b . Se θ é o ângulo $a\hat{O}P$ temos que $\sin \theta = a/1 = a$ e $\cos \theta = b/1 = b$ como queríamos. Isso pode ser observado na figura abaixo.

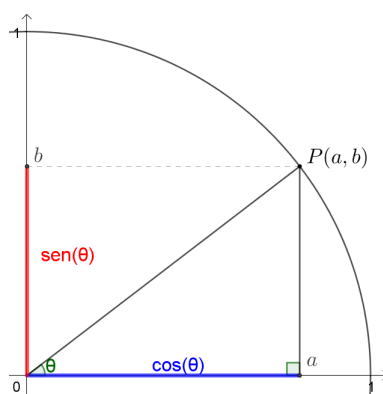


Figura 10 – Triângulo Retângulo no Círculo Trigonométrico.

Uma lei que será útil para demonstrarmos uma propriedade abaixo é a lei dos Cossenos. Com essa lei, poderemos encontrar o tamanho de um segmento de um triângulo dado dois lados e um ângulo.

Para demonstrar a **lei dos cossenos**, primeiramente construímos um triângulo de lados ABC. Opostos aos ângulos α , β e γ , os lados terão medidas a, b e c, respectivamente, como na figura 11.

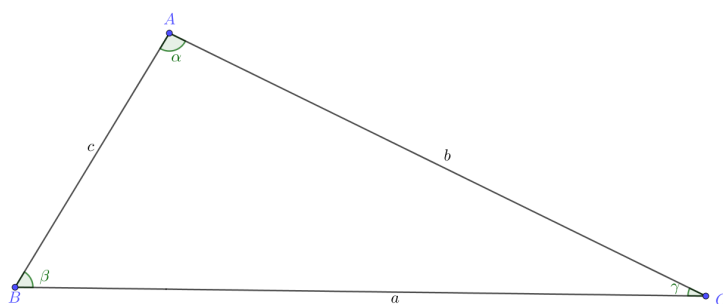


Figura 11 – Triângulo ABC.

Agora, podemos tomar um segmento de reta passando pelo ponto A e perpendicular ao segmento BC. Tomamos o segmento DC medindo $a - m$. Como na figura 12. Primeiramente, analisaremos o triângulo ABD.

Como o cosseno de um ângulo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo pela hipotenusa, temos que:

$$\cos(\beta) = \frac{m}{c} \Rightarrow c \cdot \cos(\beta) = m. \quad (4.1)$$

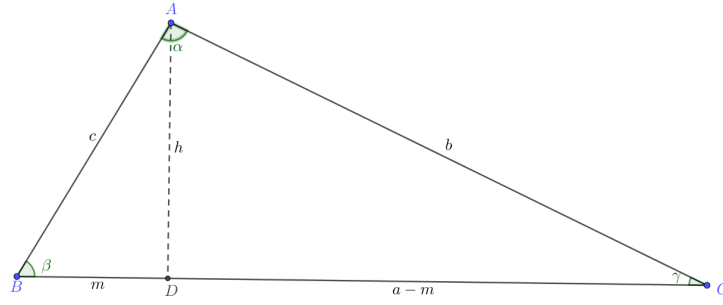


Figura 12 – h é o segmento perpendicular ao segmento $\overline{BC}$ que passa pelo ponto A.

O Teorema de Pitágoras diz que $H^2 = CO^2 + CA^2$, onde H é a hipotenusa, CO é o cateto oposto e CA o cateto adjacente. Ilustrado na figura 13.

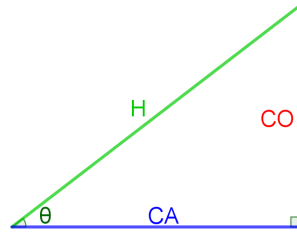


Figura 13 – Triângulo Retângulo.

Assim, utilizando o Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$c^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - m^2. \quad (4.2)$$

Agora, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ACD, obtemos:

$$b^2 = h^2 + (a - m)^2 = h^2 + a^2 - 2am + m^2. \quad (4.3)$$

De substituindo (4.2) em (4.3) obtemos:

$$b^2 = c^2 - m^2 + a^2 - 2am + m^2 = c^2 + a^2 - 2am. \quad (4.4)$$

Sabemos também de (4.1) que $m = c \cdot \cos(\beta)$.

Portanto, a lei dos Cossenos é:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos(\beta). \quad (4.5)$$

Agora, dado um triângulo em que sabendo o valor de dois segmentos e o cosseno de um dos ângulos conseguimos encontrar o valor do terceiro segmento - o que será muito útil para demonstrarmos um dos itens da proposição abaixo.

Proposição 4.2.1. *Dado $a, b \in \mathbb{R}$, valem as seguintes afirmações:*

1. $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$,
2. $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$,
3. $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(b) \sin(a)$,
4. $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)$,
5. $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$.

Demonstração. Dado $a, b \in \mathbb{R}$.

Item 1: Aqui usaremos a definição 4.2.1 e o Teorema de Pitágoras. Pela definição 4.2.1, temos que:

$$\begin{aligned} \sin^2(a) + \cos^2(a) &= \frac{CO(a)^2}{H^2} + \frac{CA(a)^2}{H^2} \\ &= \frac{CO(a)^2 + CA(a)^2}{H^2}. \end{aligned}$$

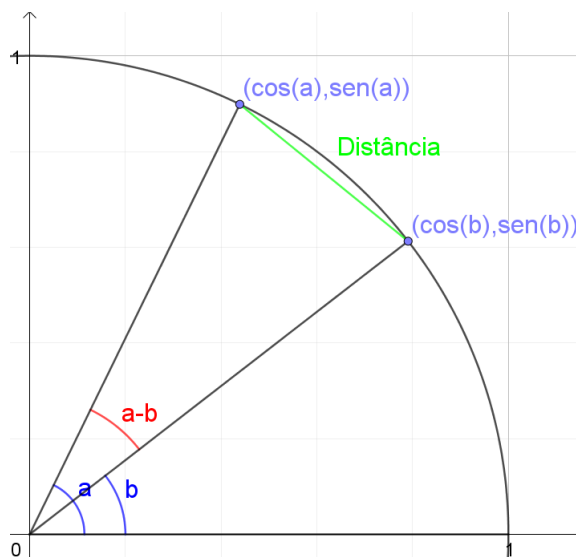
Como temos hipotenusa ao quadrado, podemos lembrar do Teorema de Pitágoras, e substituir na igualdade acima, isto é,

$$\begin{aligned} \sin^2(a) + \cos^2(a) &= \frac{CO(a)^2 + CA(a)^2}{H^2} \\ &= \frac{CO(a)^2 + CA(a)^2}{CO(a)^2 + CA(a)^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Item 2: Aqui teremos que ir ao GeoGebra e verificar no círculo trigonométrico como podemos visualizar o $\cos(a - b)$. Usamos o círculo trigonométrico por saber

que podemos representar a imagem dos pontos por seno e cosseno e por ter raio 1 facilitará algumas contas.

Dado dois pontos no círculo trigonométrico $(\cos(a), \sin(a)) = A$ e $(\cos(b), \sin(b)) = B$, o ângulo $\widehat{BOA} = a - b$, como vemos na imagem abaixo.



Note que a distância d entre os pontos $(\cos(b), \sin(b))$ e $(\cos(a), \sin(a))$ é:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(\cos(a) - \cos(b))^2 + (\sin(a) - \sin(b))^2} \\ \Rightarrow d^2 &= (\cos(a) - \cos(b))^2 + (\sin(a) - \sin(b))^2. \end{aligned}$$

Como o raio do ciclo trigonométrico é 1, então os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ da 4.2 tem tamanho 1. Pela Lei dos Cossenos temos:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(a - b).$$

Logo,

$$\begin{aligned} 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(a - b) &= (\cos(a) - \cos(b))^2 + (\sin(a) - \sin(b))^2 \\ 2 - 2 \cos(a - b) &= \cos^2(a) - 2 \cos(a) \cos(b) + \cos^2(b) + \\ &\quad \sin^2(a) - 2 \sin(a) \sin(b) + \sin^2(b) \\ 2 - 2 \cos(a - b) &= 1 - 2(\cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)) + 1 \\ \cos(a - b) &= \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b). \end{aligned}$$

Para provar o item 3 vamos utilizar o exemplo 4.3.3, que está na seção seguintes.

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
 \cos(a + b) &= \cos(a - (-b)) \\
 &= \cos(a) \cos(-b) + \sin(a) \sin(-b) \\
 &= \cos(a) \cos(b) + \sin(a)(-\sin(b)) \\
 &= \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b).
 \end{aligned}$$

No item 4, usaremos que a área de um triângulo é a metade do produto de dois lados conhecidos com o seno do ângulo por eles formados; usaremos também que a área de um triângulo retângulo é a metade da multiplicação da base com a altura. Além disso usaremos a figura 14.

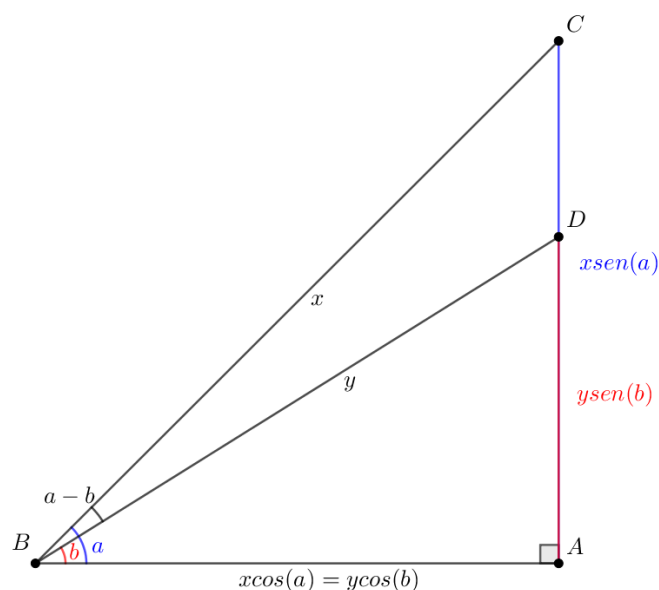


Figura 14 – Prova da propriedade do item 4.

Note que a área A_1 do triângulo DBC é igual a área A_2 do triângulo ABC

menos a área A_3 do triângulo ABD, isto é,

$$\begin{aligned}
 A_1 &= A_2 - A_3 \\
 \Rightarrow \frac{xy \sin(a-b)}{2} &= \frac{x \cos(a)x \sin(a)}{2} - \frac{y \cos(b)y \sin(b)}{2} \\
 \Rightarrow \frac{xy \sin(a-b)}{2} &= \frac{y \cos(b)x \sin(a)}{2} - \frac{x \cos(a)y \sin(b)}{2} \\
 \Rightarrow \frac{xy \sin(a-b)}{2} &= \frac{xy \cos(b) \sin(a)}{2} - \frac{xy \cos(a) \sin(b)}{2} \\
 \Rightarrow \sin(a-b) &= \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a).
 \end{aligned}$$

Para o item 5, usaremos que $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ e $\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$ e que $a+b = a-(-b)$. Logo:

$$\begin{aligned}
 \sin(a+b) &= \sin(a-(-b)) \\
 &= \sin(a) \cos(-a) - \cos(a) \sin(-b)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$= \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b). \tag{4.7}$$

O que encerra a demonstração de todos os itens. $\square$

Um resultado imediato dessas propriedades é que as funções seno e cosseno são periódicas com período 2π . De fato, pelo item 3 nós temos que:

$$\begin{aligned}
 \cos(2\pi + x) &= \cos(2\pi) \cos(x) + \sin(2\pi) \sin(x) \\
 &= 1 \cdot \cos(x) + 0 \cdot \sin(x) \\
 &= \cos(x).
 \end{aligned}$$

Já pelo item 5:

$$\begin{aligned}
 \sin(2\pi + x) &= \sin(2\pi) \cos(x) + \sin(x) \cos(2\pi) \\
 &= 0 \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot 1 \\
 &= \sin(x).
 \end{aligned}$$

Esse resultado foi usado algumas vezes nos capítulos anteriores. Ainda falta verificarmos as operações de soma e produto entre as funções seno e cosseno. Veremos isso na próxima seção.

4.3 Soma e Produto de Funções

Nas propriedades da seção 4.2 percebe-se a ideia, mesmo que de maneira sutil, de funções pares e ímpares, soma e produto de funções. Agora, veremos um pouco mais sobre essas operações dando alguns exemplos que podem motivar de maneira visual o aluno e ainda utilizar das propriedades que construímos até agora.

Definição 4.3.1. *Uma função f é dita par se $f(x) = f(-x)$ e ímpar se $f(x) = -f(-x)$ para todo x no domínio de f .*

Exemplo 4.3.1. *A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^2$ é par.*

De fato,

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.3.2. *A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^3$ é ímpar.*

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.3.3. *As funções $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ são respectivamente ímpar e par.*

A prova do exemplo 4.3.3, inicia com o círculo trigonométrico da figura 4.3.

$$f(-\alpha) = \sin(-\alpha) = -y_p = -\sin(\alpha) = -f(\alpha).$$

Isto é, $f(-x) = -f(x)$ o que implica que a função seno é ímpar.

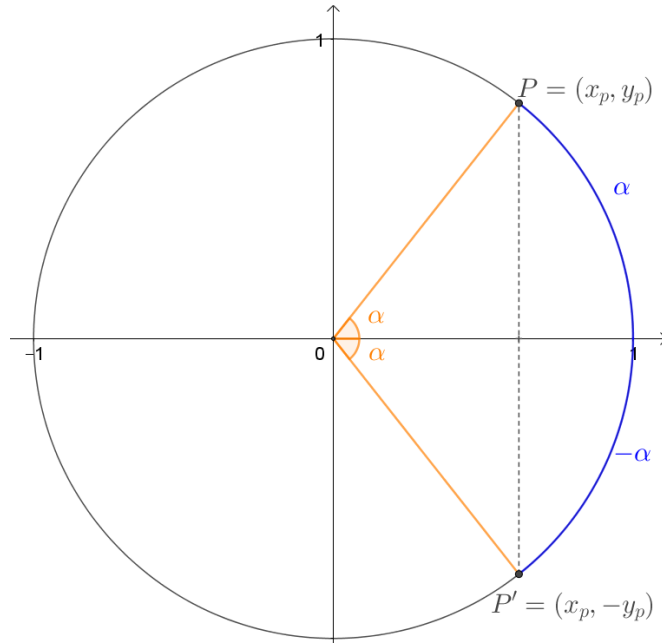
Já para o cosseno, temos que:

$$g(-\alpha) = \cos(-\alpha) = x_p = \cos(\alpha) = g(\alpha).$$

Logo a função cosseno é uma função ímpar, visto que $g(-x) = g(x)$.

Definição 4.3.2. *A soma entre f e g é a função $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.*

Lema 4.3.1. *A soma de duas funções pares é uma função par.*



De fato, se f e g são funções pares, então

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f + g)(-x).$$

Lema 4.3.2. *A soma de duas funções ímpares é uma função ímpar.*

De fato, se f e g são funções ímpares, então

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x)) = -(f + g)(x).$$

Lema 4.3.3.

Definição 4.3.3. *O produto da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função $f \cdot g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.*

O produto de duas funções pares é uma função par.

onde o produto da função f e g é a função $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

De fato, $(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$.

Lema 4.3.4. *O produto de duas funções ímpares é uma função par.*

De fato, $(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot [-g(x)] = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$.

Lema 4.3.5. *Se f é uma função par e g é uma função ímpar, então o produto de $f \cdot g$ é ímpar.*

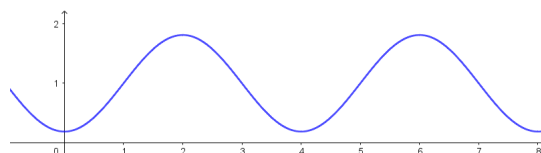
De fato, $(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = -f(x)g(x) = -(f \cdot g)(x)$.

Abaixo temos algumas funções interessantes para ilustrar a soma e produto de funções que são visualmente atrativas para mostrar aos alunos são: Onda Triangular, Onda Quadrada e Onda Dente de Serra.

Nesses exemplos, é interessante que o professor já possua as funções salvas no GeoGebra para que, quando mostrar aos alunos, possa apresentar os gráficos gradativamente.

Exemplo 4.3.4. *Onda Triangular.*

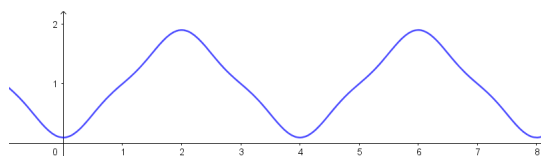
Se colocamos na entrada do GeoGebra a função $f_1(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{\cos\left(\frac{(2 \cdot 1 - 1)\pi x}{2}\right)}{(2 \cdot 1 - 1)^2}$ obtemos o seguinte gráfico:



Quando somamos a função

$$f_2(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{\cos\left(\frac{(2 \cdot 1 - 1)\pi x}{2}\right)}{(2 \cdot 1 - 1)^2} + \frac{\cos\left(\frac{(2 \cdot 2 - 1)\pi x}{2}\right)}{(2 \cdot 2 - 1)^2} \right)$$

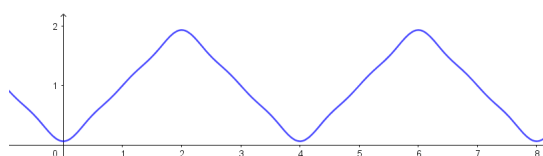
obtemos o seguinte gráfico:



Já para

$$f_3(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{\cos\left(\frac{(2 \cdot 1 - 1)\pi x}{2}\right)}{(2 \cdot 1 - 1)^2} + \frac{\cos\left(\frac{(2 \cdot 2 - 1)\pi x}{2}\right)}{(2 \cdot 2 - 1)^2} + \frac{\cos\left(\frac{(2 \cdot 3 - 1)\pi x}{2}\right)}{(2 \cdot 3 - 1)^2} \right)$$

obtemos o seguinte gráfico:



Até chegarmos em

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)}{(2n-1)^2}.$$

cujo gráfico vemos na figura 15

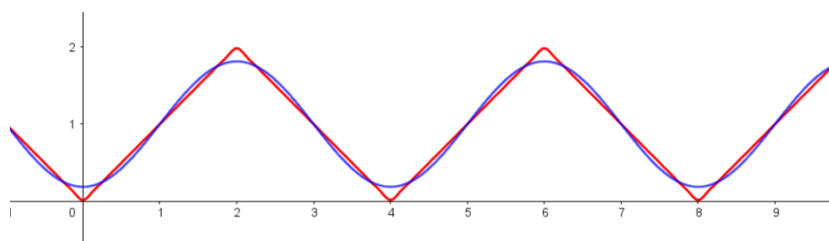


Figura 15 – Onda Triangular, em azul tomamos $n = 1$.

A ideia das próximas figuras é fazer um processo análogo ao exemplo da Onda Triangular para os outros exemplos juntamente com os alunos.

Sabendo que podemos somar e multiplicar funções, podemos voltar ao GeoGebra e verificar o gráfico das funções seno e cosseno escrevendo as seguintes funções:

$$f(x) = a + b \sin(cx + d)$$

$$g(x) = a + b \cos(cx + d)$$

onde a, b, c e d são constantes, chamadas de parâmetros.

Agora, apresentamos algumas figuras alterando as constantes a, b, c e d .

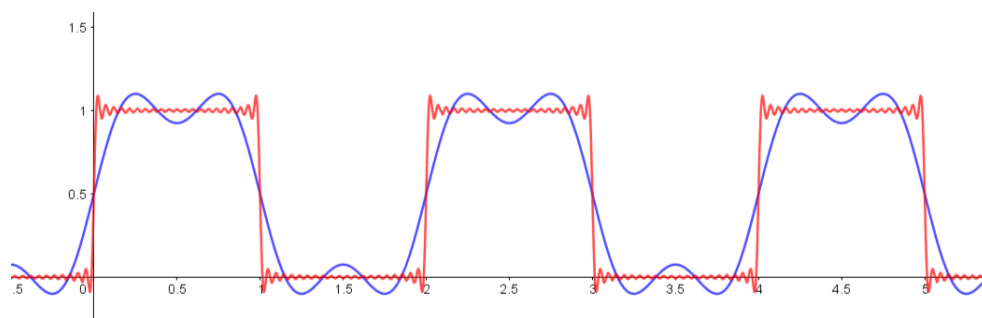


Figura 16 – Onda Quadrada: $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}$.

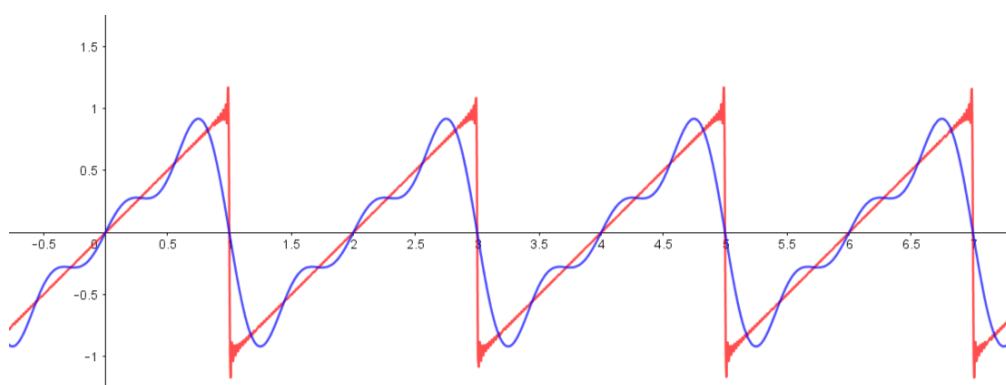


Figura 17 – Onda Dente de Serra: $f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(2\pi x)}{n}$.

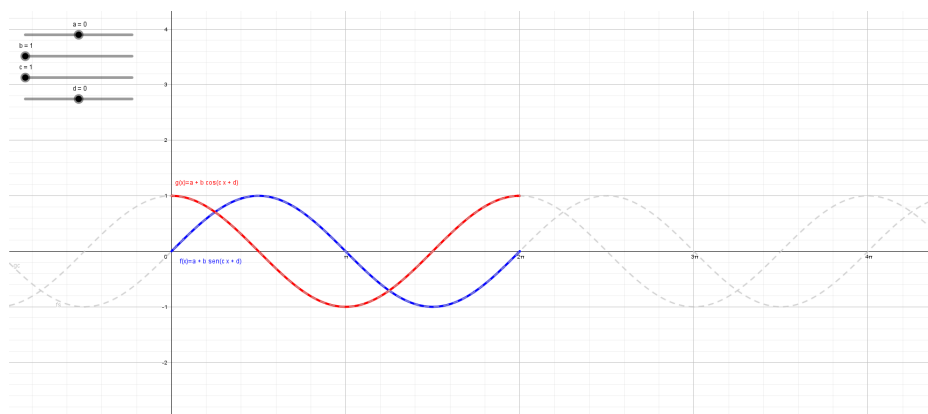


Figura 18 – $f(x) = a + b \sin(cx + d)$ cuja imagem assume o valor $(0, 0)$ e $g(x) = a + b \cos(cx + d)$.

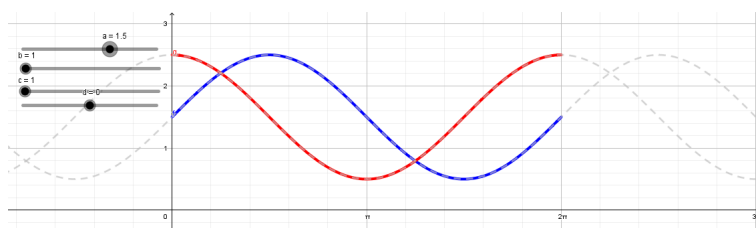


Figura 19 – A constante a translada o gráfico no eixo Oy .

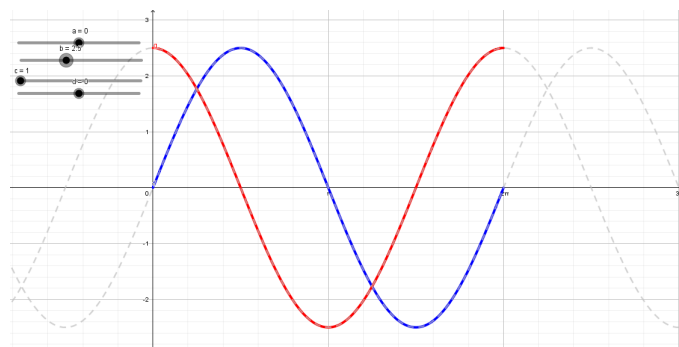


Figura 20 – A constante b altera a amplitude.

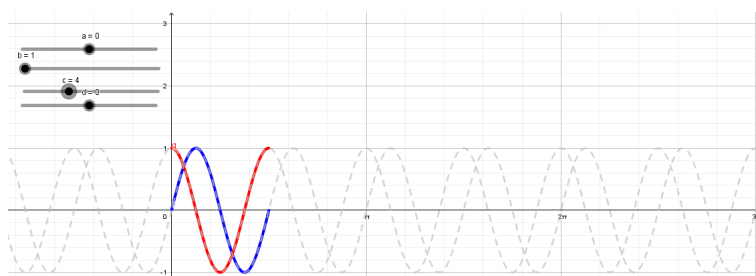


Figura 21 – A constante c a frequência.

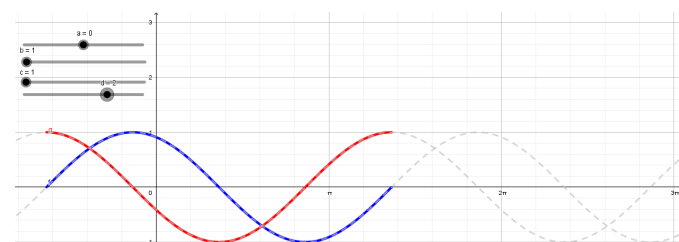


Figura 22 – A constante d a translação no eixo Ox .

Com isso, percebemos que alterar a constante d de maneira a obter um gráfico que se aproxima do que estávamos procurando na seção 4.1. Assim, temos as ferramentas necessárias para trabalhar o problema de representar as fases da Lua com funções periódicas que veremos na próxima seção.

4.4 Aplicação

Agora que obtivemos alguns resultados da seção 4.2 e 4.3 podemos resgatar os problemas que deixamos em aberto, isto é, qual a função que se aproxima da curva formada pela figura 9.

Por iniciar com $x = 0$ e $y = 0$ vamos pensar na função $f(x) = a + b \sin(cx + d)$. O gráfico da figura 9 não está transladado horizontalmente nem verticalmente. Não alterou a amplitude mas está com uma frequência maior. Logo, $a = 0$, $b = 1$ e $d = 0$. Já o parâmetro c , se aumentarmos ele, a frequência diminuirá. Então, alterando c entre 0 e 1, percebe-se que ele se aproxima da figura 9. Tomando $c = 0.231$ temos uma função seno com frequência de aproximadamente 28 unidades como vemos na figura 23

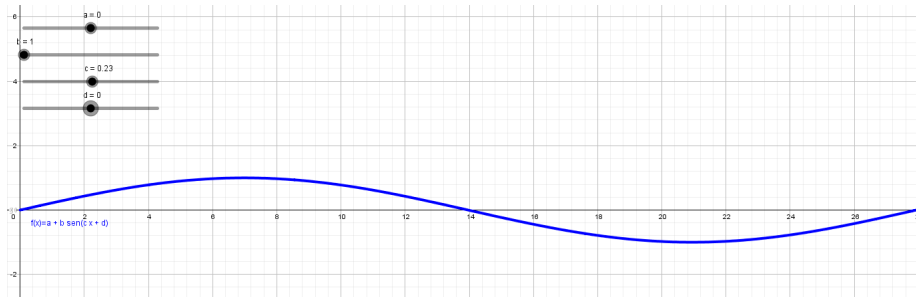


Figura 23 – $f(x) = \sin(0.231x)$.

Agora que temos uma ideia de como representamos as fases da Lua por função seno. Vamos usar as 8 fases da Lua começando no ponto $(0, 1)$ de modo à obter a função cosseno.

Para a figura 24, associamos o ponto $(0, 1)$ para a Lua Nova. Tendo em vista que queríamos o valor no eixo Ox e no eixo Oy para os ângulos de $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$. Como $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Figura 24 – 8 fases da Lua no plano cartesiano.

Escolhemos os pontos $(0, 1)$ para a Lua nova, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ para a Crescente, $(1, 0)$ para a Quarto Crescente, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ para a Crescente Gibosa, $(0, -1)$ para a Lua Cheia, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ para a Minguante Gibosa, $(0, -1)$ para a Quarto Minguante, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ para a Minguante.

Novamente queremos um período de aproximadamente 29,5 dias. Alterando o parâmetro c da função condicional

$$a + b \cos(cx + d), \text{ se } x \in [(-d)/c, (2\pi - d)/c],$$

percebemos que precisamos ter mais precisão para o parâmetro c . Por isso, vamos na propriedade do parâmetro e em “incremento” colocamos 0,001. Assim, quando o parâmetro $c = 0.213$ temos um perímetro de aproximadamente 29,5 dias.

Agora, precisamos saber onde cada Lua ficará de acordo com os dias da semana. Para isso, dividimos $\frac{29,5}{8} = 3,7$. Assim, a posição da Lua nova será $(0, 1)$, da Crescente será $\left(3,7, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, da Quarto Crescente será $(7,4, 0)$, da Crescente Gibosa será $\left(11,1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, da Lua Cheia será $(14,8, -1)$, da Minguante Gibosa será $\left(18,5, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, da Quarto Minguante será $(22,2, 0)$ e da Minguante será $\left(25,9, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e iniciará a Lua nova em $(29,6, 1)$ como mostra na figura 25.

Portanto, podemos desenvolver uma atividade de resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais e comparar suas

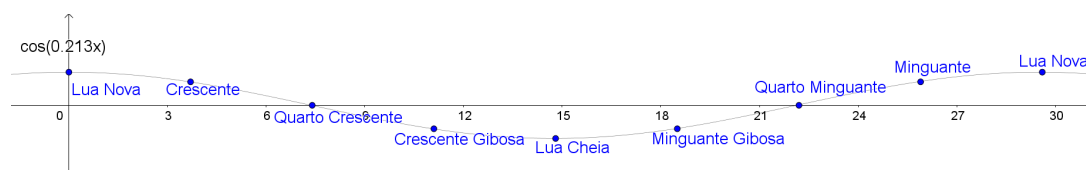


Figura 25 – As 8 fases da Lua estão distribuídas em 29,5 dias.

representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com apoio de aplicativos de álgebra e geometria como diz na habilidade (EM13MAT306) da BNCC. Deixamos de sugestão que os professores desafiem aos alunos para que façam o gráfico das 8 fases da lua para a função seno e das 4 fases da lua para a função cosseno, analogamente ao que fizemos.

5 Considerações Finais

O trabalho, portanto, buscou uma proposta que tenha resultados positivos no processo de aprendizagem de funções seno e cosseno e suas propriedades em que foi identificado nos cursos superiores como uma defasagem dos alunos [4]. Além disso, temos a expectativa de que seja uma referência para professores que pensam em ensinar as propriedades de funções trigonométricas e introduzir somas finitas de funções utilizando o GeoGebra.

Por haver dificuldade na compreensão das propriedades das funções trigonométricas sem a mínima visualização do que está ocorrendo, buscamos construí-las com o auxílio do software GeoGebra pelo fato de ser um software riquíssimo, por ser muito usados no ensino superior. Com isso, acredita-se que não somente o aluno construa conceitos importantes, como também abra caminhos para o contato com ferramentas tecnológicas matemáticas que o ajude nas próximas etapas das suas formações.

Além disso, o trabalho contribuiu significativamente na aprendizagem de matemática tendo em vista o estudo que se fez para provar as propriedades de funções trigonométricas, Coeficientes de Fourier, Convergências Pontual e Uniforme da Série de Fourier, Transformada de Fourier, Espaço de Schwartz, Operação convolução, o problema da Barra Infinita e o problema da equação do calor não homogênea.

6 Referências

- ABAR, C. A. A. P.; ALENCAR, S. V. **A Gênese Instrumental na interação com o GeoGebra**: uma proposta para a formação continuada de professores de matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v. 27, n. 46, p. 349-365. 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000300002>. Acesso em: 11 jan. 2022.
- ALVES, J. M. B., SOUZA, R. O.; CAMPOS, J. N. B. **Previsão da anomalia de Temperatura da Superfície do Mar (TSM) no Atlântico Tropical, com a equação da difusão de temperatura**. *Revista Climanalise: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais-INPE*, 2003. 6-19 p.
- OLIVEIRA, M. S. d. **Dificuldades na Aprendizagem Trigonométrica**: reflexos da educação básica no Ensino Superior. *Intermaths*, v. 2, n. 2, p. 140-155. 2021.
- FONSECA, I. A. d. **Aplicações da Equação do Calor na Indústria do Petróleo**. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC-Rio, 2020.
- FARLOW, S. J.. **Partial Differential Equations for Scientists and Engineers**. Courier Corporation, 1993.
- FIGUEIREDO, D. G. d. **Análises de Fourier e Equações Diferenciais**. 4^a ed. Brasil: Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2014. 274 p.
- GUIMARÃES, M. E. d C. **Introduzindo os conceitos de limite, derivada e integral no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), Faculdade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019. 105 p.
- IÓRIO, V. **EDP: Um Curso de Graduação**. 2. ed. Brasil: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2007. 245 p.
- TORT, A. C.; NOGAROL, F. **Reverendo o debate sobre a idade da Terra**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 35, p. 1-9. 2013.

PORTAL LABORATÓRIOS VIRTUAIS DE PROCESSOS QUÍMICOS.

Transferências de Massas. Disponível em: <http://labvirtual.eq.uc.pt/siteJoomla/index.php?option=com_content&task=view&id=249&Itemid>.

Acessado em 5 jan. 2022.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo:** Dificuldades de Natureza Epistemológica. São Paulo. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo: USP, 2003.

SALINAS, S RA. **Einstein e a teoria do movimento browniano.** Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 27, p. 263-269, 2005.

SANTAROSA, L. M. A.; GRAVINA, M. **Aprendizagem da matemática em ambientes informatizados.** In: IV Congresso RIBIE. Brasília. 1998. 24 p.

7 Apêndice A: A Transformada de Fourier

Nesse capítulo estudamos algumas propriedades da transformada de Fourier no espaço de funções absolutamente integráveis, o Espaço de *Schwartz* e uma introdução ao conceito de convolução para funções não periódicas do livro da Iório (2007).

7.1 Transformada em $\mathcal{L}^1$

Definição 7.1.1. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é integrável em qualquer intervalo $[a, b]$ e se a integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \lim_{a, b \rightarrow \infty} \int_{-a}^{+b} |f(x)| dx = \|f\|_1 < +\infty \quad (7.1)$$

existe, então a função $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad (7.2)$$

está bem definida para qualquer $\xi \in \mathbb{R}$ e será chamada de transformada de Fourier de f .

Denotamos por $\mathcal{L}^1$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ absolutamente integráveis, isto é, integráveis em qualquer intervalo $[a, b]$ e satisfazendo 7.1. $\|\cdot\|_1$ define uma *semi-norma* em $\mathcal{L}^1$. Como as funções em $\mathcal{L}^1$ não são necessariamente contínuas, $\|f\|_1$ pode ser zero sem que $f \equiv 0$, basta que os pontos em que f é diferente de zero formem um conjunto de medida nula.

Proposição 7.1.1. Sejam $f, g \in \mathcal{L}^1$. Então:

1. $(f + \lambda g)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi) + \lambda \hat{g}(\xi), \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \xi \in \mathbb{R};$
2. $\hat{\hat{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}, \forall \xi \in \mathbb{R};$

3. se $x, y \in \mathbb{R}$ e $f_y(x) = f(x - y)$, então $f_y \in \mathcal{L}^1$ e

$$(f_y)^\wedge(\xi) = e^{-i\xi y} \hat{f}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}; \quad (7.3)$$

4. $|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$

Demonstração. A primeira propriedade resulta da linearidade da integral.

$$\begin{aligned} (f + \lambda g)^\wedge(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f + \lambda g)(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) + \lambda g(x)] e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx + \lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \hat{f}(\xi) + \lambda \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

A segunda propriedade resulta da conjugação da integral.

$$\begin{aligned} \hat{\bar{f}}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\xi x} dx} \\ &= \overline{\hat{f}(-\xi)}. \end{aligned}$$

Na terceira propriedade basta tomar $t = x - y$, como $f \in \mathcal{L}^1$, a translação $f(t) \in \mathcal{L}^1$.

$$\begin{aligned}
(f_y)^\wedge(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_y(x) e^{-i\xi x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) e^{-i\xi x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi(t+y)} d(t+y) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi(t+y)} dt + 0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi(t+y)} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} e^{-i\xi y} dt \\
&= \frac{e^{-i\xi y}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt \\
&= e^{-i\xi y} \hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando o módulo temos

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) e^{-i\xi x}| dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| |e^{-i\xi x}| dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1.
\end{aligned}$$

□

Agora que temos algumas propriedades, vamos mostrar que a transformada de Fourier é uniformemente contínua no espaço real para funções são absolutamente integráveis. Para isso e para outras demonstrações, usaremos a seguinte igualdade:

$|e^{-i\xi}| = 1$. De fato, usando a identidade $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$.

$$\begin{aligned}
 |e^{-i\xi x}| &= \left| \frac{1}{e^{i\xi x}} \right| = \left| \frac{1}{\cos(\xi x) + i \sin(\xi x)} \right| \\
 &= \left| \frac{1}{\cos(\xi x) + i \sin(\xi x)} \frac{\cos(\xi x) - i \sin(\xi x)}{\cos(\xi x) - i \sin(\xi x)} \right| \\
 &= \left| \frac{\cos(\xi x) - i \sin(\xi x)}{\cos^2(\xi x) + \sin^2(\xi x)} \right| \\
 &= |\cos(\xi x) - i \sin(\xi x)| \\
 &= \sqrt{(\cos(\xi x))^2 + (-\sin(\xi x))^2} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Teorema 7.1.1. *Seja $f \in \mathcal{L}^1$. Então sua transformada de Fourier $\hat{f}$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. O queremos provar é a continuidade uniforme que é uma propriedade global e não local, no sentido de que a continuidade uniforme se refere a imagem de dois pontos próximos serem próximas. Isto é,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \xi, \eta \in \mathbb{R}, |\xi - \eta| < \delta \Rightarrow |\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\eta)| < \varepsilon.$$

A ideia principal é quebrar o domínio da integração em duas partes que chamaremos de "caudas" e "corcunda" e então usar propriedades para cada uma dessas partes.

$$\begin{aligned}
 |\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\eta)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\eta x} dx \right| \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) [e^{-i\xi x} - e^{-i\eta x}] dx \right| \\
 &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) [e^{-i\xi x} - e^{-i\eta x}]| dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| |e^{-i\xi x} - e^{-i\eta x}| dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| \geq M(\varepsilon)} |f(x)| |e^{-i\xi x} - e^{-i\eta x}| dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M(\varepsilon)}^{+M(\varepsilon)} |f(x)| |e^{-i\xi x} - e^{-i\eta x}| dx.
 \end{aligned}$$

Na primeira parcela, usamos que por $f \in \mathcal{L}^1$ satisfaz (7.1) o que diz que a integral não diverge, ou seja, para $\varepsilon_1 > 0$

$$\int_{|x| \geq M(\varepsilon)} |f(x)| dx < \varepsilon_1,$$

o que significa que podemos tomar as caudas com uma área menor que infinito. Agora, na integral das caudas precisamos ajustar o segundo fator. Mas, como $|e^{-i\xi x} - e^{-i\eta x}| \leq |e^{-i\xi x}| + |-e^{-i\eta x}| \leq 1 + 1 = 2$.

Logo, a parcela das caudas fica:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| \geq M(\varepsilon)} |f(x)| |e^{-i\xi x} - e^{-i\eta x}| dx < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$$

A segunda parcela é a corcunda, é mais complicada porque não podemos necessariamente dizer que a área é pequena, principalmente se tivéssemos que tornar $M(\varepsilon)$ grande para obter as caudas suficientemente pequenas. Além disso temos a parcela exponencial.

Agora usaremos a parte da hipótese que ainda não usamos. Se $f \in \mathcal{L}^1$, f é integrável em qualquer intervalo $[a, b]$. Logo, tomamos $B(\varepsilon) > 0$ e $B(\varepsilon) = \sup_{x \in [-M(\varepsilon), M(\varepsilon)]} |f(x)|$.

O limite depende de ε porque, se variarmos ε , esperamos que o limite varie. Queremos obter uma estimativa para a corcunda que é útil. Isso envolve trabalhar com fator exponencial da seguinte maneira.

$$\begin{aligned}
|e^{ia} - e^{ib}| &= |\cos a + i \sin b - \cos b - i \sin a| \\
&= |(\cos a - \cos b) + i(\sin b - \sin a)| \\
&= \sqrt{(\cos a - \cos b)^2 + (\sin b - \sin a)^2} \\
&= \sqrt{\cos^2 a - 2 \cos a \cos b + \cos^2 b + \sin^2 a - 2 \sin a \sin b + \sin^2 b} \\
&= \sqrt{2 - 2 \cos a \cos b - 2 \sin a \sin b} \\
&= \sqrt{2(1 - \cos(a - b))} \\
&= \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \left(\frac{a - b}{2} \right)} \\
&= 2 \sin \left(\frac{a - b}{2} \right) \\
&\leq 2 \left| \sin \left(\frac{a - b}{2} \right) \right| \\
&\leq 2 \left| \frac{a - b}{2} \right| \\
&= |a - b|.
\end{aligned}$$

Assim temos que:

$$|e^{-i\xi x} - e^{-i\eta x}| \leq |x| |\xi - \eta|.$$

Agora, podemos controlar o integrando da corcunda da seguinte forma: para $x \in [-M(\varepsilon), M(\varepsilon)]$ e B o supremo da f nesse intervalo, temos

$$\begin{aligned}
|f(x)| |e^{-i\xi x} - e^{-i\eta x}| &\leq \sup_{x \in [-M(\varepsilon), M(\varepsilon)]} \{|f(x)| |x| |\xi - \eta|\} \\
&\leq B(\varepsilon) 2M(\varepsilon) |\xi - \eta|.
\end{aligned}$$

Então, a parcela da corcunda fica

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M(\varepsilon)}^{+M(\varepsilon)} |f(x)| |e^{-i\xi x} - e^{-i\eta x}| dx &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M(\varepsilon)}^{+M(\varepsilon)} B(\varepsilon) 2M(\varepsilon) |\xi - \eta| dx \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} B(\varepsilon) 4M^2(\varepsilon) |\xi - \eta|.
\end{aligned}$$

Finalmente, temos que

$$|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\eta)| \leq \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} B(\varepsilon) 4M^2(\varepsilon) |\xi - \eta|.$$

Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, temos $\delta = \frac{\sqrt{2\pi}\varepsilon}{B(\varepsilon)8M^2(\varepsilon)} > 0$, tal que

$$\xi, \eta \in \mathbb{R}, |\xi - \eta| < \delta \Rightarrow |\hat{f}(\xi) - \hat{f}(\eta)| < \varepsilon.$$

□

É interessante observar que o lema de Riemann-Lebesgue também é válido em $\mathcal{L}^1$, isto é, se $f \in \mathcal{L}^1$, $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ quando $|\xi| \rightarrow +\infty$. Aqui faremos a demonstração num caso particular.

Proposição 7.1.2. *Seja $f \in \mathcal{L}^1$ tal que f é seccionalmente contínua em qualquer intervalo $[a, b]$. Então*

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Demonstração. Queremos que dado $\varepsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que:

$$|\xi| > \delta \Rightarrow |\hat{f}(\xi)| < \varepsilon.$$

Note que:

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M}^{+M} f(x) e^{-i\xi x} dx + \int_{|x|>M} f(x) e^{-i\xi x} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-M}^{+M} f(x) e^{-i\xi x} dx \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{|x|>M} f(x) e^{-i\xi x} dx \right|. \end{aligned}$$

De (7.1) temos que existe $M > 0$ tal que

$$\int_{|x|>M} |f(x)| dx < \varepsilon_1.$$

Como f é seccionalmente contínua em $[-M, M]$, pelo lema de Riemann-Lebesgue (Corolário 3.2.1), temos que:

$$|\xi| > \delta \Rightarrow |\hat{f}(\xi)| < \varepsilon_2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-M}^{+M} f(x) e^{-i\xi x} dx \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>M} |f(x)| |e^{-i\xi x}| dx \\ &< \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon_2 2M + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon_1 = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Um espaço interessante para a Transformada de Fourier é o Espaço de Schwartz. Nele, resolveremos um problema de Equação do Calor que será visto no capítulo (8): Apêndice B. Na próxima secção iremos definir e ver alguns resultados do Espaço de Schwartz.

7.2 Espaço de Schwartz

O *Espaço de Schwartz* é a coleção das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$ tais que, quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$, existe uma constante $C_{\alpha,\beta}$ com

$$|x^\alpha f^{(\beta)}(x)| \leq C_{\alpha,\beta}, \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad (7.4)$$

onde $f^{(\beta)}$ é a β -ésima derivada de f . Denotamos o Espaço de Schwartz por $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Primeiramente, podemos notar que as funções de $\mathcal{S}$ tendem a zero em $\pm\infty$ rapidamente: de fato, se $f \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ e $\beta = 0$, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)| \leq \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{C}{|x^n|} = 0.$$

Logo, $f(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow +\infty$ mais rápido que o inverso de qualquer polinômio.

A próxima proposição nos dirá que o espaço de Schwartz é "feito sob medida" para o estudo da transformada de Fourier, visto que o diferencial no domínio $\mathcal{S}$ possui imagem no contradomínio $\mathcal{S}$ via transformada de Fourier, em que sua imagem é sua transformada de Fourier multiplicado por $i\xi$.

Proposição 7.2.1. *Se $f \in \mathcal{S}$ então $f' \in \mathcal{S}$ e*

$$(f')^\wedge(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (7.5)$$

Demonstração. Vimos anteriormente que $f' \in \mathcal{S}$. Calculando a transformada de Fourier de f' temos:

$$(f')^\wedge(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\xi x} dx \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-i\xi x} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - (-i\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \right] \quad (7.7) \\ &= i\xi \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Em (4.6) usamos integração por partes tomando $u = e^{-i\xi x}$ e $dv = f'(x)dx$. Em (4.7) precisaríamos analisar os limites quando $x \rightarrow \pm\infty$. Mas como $f \in \mathcal{S}$, $f(x) \rightarrow 0$. $\square$

Corolário 7.2.1. Se $f \in \mathcal{S}$ então $f' \in \mathcal{S}$ e

$$(f^{(n)})^\wedge(\xi) = (i\xi)^{(n)} \hat{f}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (7.8)$$

Demonstração. A ideia aqui tentar demonstrar por indução. Usaremos a proposição 7.2.1 como base de indução ($n = 1$) e supomos que é válido para $n - 1$, isto é,

$$f^{(n-1)\wedge}(\xi) = (i\xi)^{(n-1)} \hat{f}(\xi). \quad (7.9)$$

Agora provamos que é válido para n .

$$\begin{aligned} (f^{(n)})^\wedge(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n)}(x) e^{-i\xi x} dx \quad (7.10) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-i\xi x} f^{(n-1)}(x) \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - (-i\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n-1)}(x) e^{-i\xi x} dx \right] \\ &= i\xi (i\xi)^{n-1} \hat{f}(\xi) = (i\xi)^n \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Onde em (4.10) tomamos $u = e^{-i\xi x}$ e $dv = f^{(n)}(x)dx$. $\square$

Esse resultado nos diz que o operador diferencial $\frac{d}{dx^n}$ agindo em $\mathcal{S}$ é levado, via transformada de Fourier, no operador de multiplicação $i\xi$ no espaço $\{\hat{f} : f \in \mathcal{S}\}$. Isto é,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx^n} : \mathcal{S} &\rightarrow \mathcal{S} \\ \hat{f} &\mapsto \frac{d}{dx^n} \hat{f}(\xi) = (i\xi)^n \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Isso implica que as equações diferenciais ordinárias podem ser transformadas em equações algébricas e que, mais tarde, nos permitirá que equações diferenciais parciais sejam transformadas em equações diferenciais ordinárias. Sendo assim, precisamos que verificar como é o espaço das transformadas de $\mathcal{S}$.

Se soubermos que a Transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ é uma bijeção, então as fórmulas

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx \quad (7.11)$$

e

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x} d\xi \quad (7.12)$$

são equivalentes: de fato, se (7.11) é válido, como $\mathcal{F}$ é uma bijeção, toda $f \in \mathcal{S}$ é da forma $f = \hat{g}$ para alguma função $g \in \mathcal{S}$ e portanto:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(x) = (\mathcal{F}\hat{g})(x) &= (\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}g)(x) = g(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\xi)e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{i\xi x} d\xi. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se (7.12) é válida,

$$f(x) = (\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f)(x) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x} d\xi.$$

Antes disso, precisamos usar um lema cuja demonstração está no livro da Iório (2007) que nos permitirá provar que a transformada de Fourier define uma bijeção do espaço de Schwartz em si mesmo.

Lema 7.2.1. *Se $f \in \mathcal{S}$, então $\hat{f} \in \mathcal{S}$ e*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x} d\xi.$$

Teorema 7.2.1. *A transformada de Fourier $\mathcal{F}$ define uma bijeção linear de $\mathcal{S}$ em si mesmo e sua inversa é dada por*

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{S}. \quad (7.13)$$

Demonstração. Para que $\mathcal{F}$ seja bijeção linear, precisamos que seja linear, injetiva e sobrejetiva.

Pela proposição 7.1.1 e pelo lema 7.2.1 a $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ é linear.

Para mostrar a injetividade, usamos a fórmula de inversão do lema 7.2.1 para verificar quais funções possuem imagem 0, isto é,

$$\mathcal{F}f = 0 \Rightarrow \hat{f} \equiv 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = 0.$$

Como $(\mathcal{F}f)(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$, temos a injetividade.

Falta mostrar que $\mathcal{F}$ é sobrejetiva, isto é, precisamos mostrar que dada qualquer função f no contradomínio $\mathcal{S}$, existe uma função $\hat{g}$ no domínio $\mathcal{S}$ tal que $f = \hat{g}$.

Dado $f \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i(-x)\xi} d\xi = \hat{f}(-x). \end{aligned}$$

está em $\mathcal{S}$, pois $\hat{f} \in \mathcal{S}$ e como $f \in \mathcal{S}$, $x \mapsto f(-x)$ também está em $\mathcal{S}$ e, pela fórmula de inversão no lema 7.2.1,

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(-x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{i\xi y} dy = \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

□

isto é, $f = \hat{g}$.

Portanto, a transformada de Fourier é linear, injetiva, sobrejetiva e a inversa é dada por (7.13).

Uma operação importante que é boa para o Espaço de Schwartz e corresponde, via transformada de Fourier, à multiplicação pontual (a menos de uma constante) é a operação Convolução que veremos na próxima seção.

7.3 A Operação Convolução

A Operação Convolução resulta, a partir de duas funções dadas, numa terceira função que mede a soma do produto dessas funções ao longo da região desejada pela superposição delas em função do deslocamento existente entre elas. Veremos que a convolução define uma operação no espaço de Schwartz e que corresponde, via transformada de Fourier, à multiplicação pontual (a menos de uma constante).

Primeiramente, vamos definir a operação convolução: se $f \in \mathcal{L}^1$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é limitada e seccionalmente contínua em qualquer intervalo fechado, a *convolução* de f e g é a função $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (7.14)$$

Note que a integral em (7.14) converge, visto que como g é limitada, existe $M > 0$ tal que $|g(x)| < M$, $\forall x \in \mathbb{R}$, logo

$$|f(y)g(x-y)| \leq |f(y)|M \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)g(x-y)|dy \leq M\|f\|_1 < +\infty. \quad (7.15)$$

Dada a definição, vamos enunciar um resultado cuja demonstração se encontra no livro da Iório (2007), o qual diz que a operação está no espaço das funções infinitas vezes continuamente diferenciáveis reais e no espaço das funções absolutamente integráveis.

Denotamos por $C_{\mathbb{C}}^{\infty}(\mathbb{R})$ o conjunto de funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que não infinitas vezes continuamente diferenciáveis (respectivamente contínuas).

Lema 7.3.1. *Se $f, g \in \mathcal{S}$, então $f * g \in C_{\mathbb{C}}^{\infty}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1$ e*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1. \quad (7.16)$$

Sabendo que a operação convolução está no espaço $C_{\mathbb{C}}^{\infty}(\mathbb{R})$ e no espaço $\mathcal{L}^1$, podemos mostrar as seguintes propriedades:

Proposição 7.3.1. *Sejam $f, g, h \in \mathcal{S}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então:*

1. $f * g = g * f$,
2. $(f * g) * h = f * (g * h)$,
3. $(f + g) * h = f * h + g * h$,
4. $(\lambda f) * g = \lambda(f * g) = f * (\lambda g)$.

Demonstração. 1. Toma-se $\alpha = x - y$.

$$\begin{aligned}
 (f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x - y)dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \alpha)g(x - (x - \alpha))d\alpha \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\alpha)f(x - \alpha)d\alpha \\
 &= (g * f)(x).
 \end{aligned}$$

2. Aqui tomamos $\alpha = y - z$.

$$\begin{aligned}
 ((f * g) * h)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(y)h(x - y)dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)g(y - z)h(x - y)dz dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)g(\alpha)h(x - (z + \alpha))dz d\alpha \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \int_{-\infty}^{+\infty} g(\alpha)h(x - z - \alpha)d\alpha dz \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)(g * h)(x - z)dz \\
 &= (f * (g * h))(x).
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
((f + g) * h)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f + g)(y)h(x - y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (f(y) + g(y))h(x - y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [f(y)h(x - y) + g(y)h(x - y)]dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)h(x - y)dy + \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)h(x - y)dy \\
&= (f * h)(x) + (g * h)(x).
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
((\lambda f) * g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda f)(y)g(x - y)dy \\
&= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} (f)(y)g(x - y)dy \\
&= \lambda (f * g)(x) \\
&= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} (f)(y)g(x - y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda (f)(y)g(x - y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (f)(y)(\lambda g)(x - y)dy \\
&= f * (\lambda g)(x).
\end{aligned}$$

□

Agora, definiremos um produto interno e uma norma no espaço de Schwartz cujos detalhes estão presentes no livro Iório (2007, p. 191).

Definição 7.3.1. Se $f, g \in \mathcal{S}$, definimos o produto interno em $\mathcal{S}$ como

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Definição 7.3.2.

$$\|f\|_2 = [\langle f, f \rangle]^{1/2} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

O próximo teorema, além de mostrar que a operação convolução é fechada no Espaço de Schwartz, diz que a transformada de Fourier no espaço Schwartz da operação convolução define uma multiplicação pontual a menos de uma constante, e ainda faz uma relação direta entre a função e a Transformada de Fourier.

Teorema 7.3.1. *Se $f, g \in \mathcal{S}$, então $f * g \in \mathcal{S}$ e*

$$(f * g)^\wedge(\xi) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (7.17)$$

Além disso, vale a identidade de Parseval

$$\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2. \quad (7.18)$$

Demonstração. Como $f, g \in \mathcal{S}$ pelo lema 7.3.1, podemos calcular a Transformada de Fourier de $f * g$ e as integrais convergem uniformemente, isto é, podemos trocar a ordem de integração, o que faz com que:

$$\begin{aligned} (f * g)^\wedge(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x - y) dy e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} dx g(x - y) e^{-i\xi x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} dz g(z) e^{-i\xi y + iz} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(y) e^{-i\xi y} \int_{-\infty}^{+\infty} dz g(z) e^{-i\xi z} \\ &= \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(y) e^{-i\xi y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz g(z) e^{-i\xi z} \\ &= \sqrt{2\pi} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

Logo, como $f, g \in \mathcal{S}$, pelo lema 7.2.1, $\hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{S}$ e $(f * g)^\wedge = \sqrt{2\pi} \hat{f} \hat{g}$ estão em $\mathcal{S}$. Assim, pelo teorema 7.2.1, temos que $f * g \in \mathcal{S}$.

Por fim, precisamos ver que $\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2$.

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{f}(\xi)} d\xi. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
 \overline{\hat{f}(\xi)} &= \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)} e^{i\xi x} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(-x)} e^{-i\xi x} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{g(x)} e^{-i\xi x} dx \\
 &= \hat{g}(\xi).
 \end{aligned}$$

onde $g(y) = \overline{f(-y)}$.

Temos que

$$\begin{aligned}
 \|\hat{f}\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{f}(\xi)} d\xi \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) d\xi \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f * g)^\wedge(\xi) d\xi \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)^\wedge(\xi) d\xi \\
 &= (f * g)(0) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(-y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \overline{f(y)} dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2 dy \\
 &= \|f\|_2^2.
 \end{aligned}$$

□

8 Apêndice B: Equação do Calor

8.1 Problema de Equação do Calor não-homogênea

Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty)) \text{ limitada,} \\ u_t = u_{xx} + g(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (8.1)$$

onde $f \in C(\mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ são funções limitadas dadas. A EDP em (8.1) é a equação do calor acrescida de um termo não homogêneo $g(x, t)$. Nesse problema, tanto a EDP quanto condição inicial não são homogêneas. Vamos dividir o problema em uma EDP homogênea e outra com a condição inicial homogênea, isto é, respectivamente:

$$\begin{cases} v \in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty)) \text{ limitada,} \\ v_t = v_{xx}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ v(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (8.2)$$

$$\begin{cases} w \in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty)) \text{ limitada,} \\ w_t = w_{xx} + g(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ w(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (8.3)$$

Procuraremos candidatos à solução de (8.2) com o método de separação de variáveis e (8.3) com a transformada de Fourier.

8.2 Problema da Barra Infinita

Para o problema (8.2), chamado de Problema da Barra Infinita, observamos primeiro que esse problema é a equação do calor usual tomando $\alpha = 1$, em que a

equação do calor usual é dada por:

$$u_t = \alpha^2 u_{yy}; \quad (8.4)$$

mas isso não é uma restrição, visto que se tomarmos $x = \alpha/y$ e $v(x, t) = u(y, t)$ transformaremos (8.4) na equação $v_t = v_{xx}$ que temos em (8.2). Aqui tomamos a equação do calor usual com a derivada segunda em y apenas por uma questão estética, isto é, para chegarmos em v_{xx} .

A segunda observação, é que o fato de v ser limitada é uma condição de contorno no infinito que irá garantir a unicidade de solução.

Agora, vamos encontrar um candidato à solução de (8.2). Para isso, aplicamos o método de separação de variáveis e vamos procurar soluções da forma:

$$v(x, t) = X(x)T(t), \quad (8.5)$$

para o problema de EDP homogênea (8.2).

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= X(x)T'(t) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= X''(x)T(t). \end{aligned}$$

Substituindo (8.5) em (8.2), obtemos:

$$\begin{aligned} XT' &= X''T \\ \frac{T'}{T} &= \frac{X''}{X} = \text{cte.} \end{aligned}$$

Assim, obtemos dois problemas:

$$\begin{cases} X \in C^2(\mathbb{R}) \text{ limitada,} \\ X'' = -\lambda X, \text{ em } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (8.6)$$

$$\begin{cases} T \in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, +\infty)) \text{ limitada,} \\ T' = -\lambda T, \text{ em } (0, +\infty). \end{cases} \quad (8.7)$$

A solução geral da EDO em (8.6) é:

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}, \quad (8.8)$$

e, como procuramos soluções limitadas, $\sqrt{-\lambda}$ tem que ser um imaginário puro, de modo que $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$.

A solução geral da EDO em (8.7) é:

$$T(t) = Ce^{-\lambda t}. \quad (8.9)$$

Logo, obtemos, para cada $\lambda \geq 0$, a solução do problema (8.2):

$$v_\lambda(x, t) = (A_\lambda e^{i\sqrt{\lambda}x} + B_\lambda e^{-i\sqrt{\lambda}x})e^{-\lambda t},$$

e tomando $\lambda = \xi^2$, $\xi \geq 0$,

$$v_\xi(x, t) = (a_\xi e^{i\xi x} + b_\xi e^{-i\xi x})e^{-\xi^2 t}. \quad (8.10)$$

Como não temos uma família enumerável de auto-valores, não podemos formar uma série de todas as soluções de (8.10). Mas o que corresponde a uma "soma contínua" é uma integral. Integrando as soluções de (8.10) obtemos:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \int_0^{+\infty} v_\xi(x, t) d\xi = \int_0^{+\infty} (a(\xi) e^{i\xi x} + b(\xi) e^{-i\xi x}) e^{-\xi^2 t} d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} a(\xi) e^{i\xi x} e^{-\xi^2 t} d\xi + \int_0^{+\infty} b(\xi) e^{-i\xi x} e^{-\xi^2 t} d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} a(\xi) e^{i\xi x} e^{-\xi^2 t} d\xi + \int_{-\infty}^0 b(-\xi) e^{i\xi x} e^{-\xi^2 t} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) e^{i\xi x} e^{-\xi^2 t} d\xi. \end{aligned}$$

Pela condição inicial, f deve satisfazer:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) e^{i\xi x} d\xi. \quad (8.11)$$

A pergunta natural é, se f pode ser representada da forma (8.11) então quem será a função g ?

A ideia será proceder da mesma forma para encontrar os coeficientes de Fourier, isto é:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f, \varphi_\xi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\varphi_\xi(x)} dx = g(\xi),$$

portanto, os coeficientes da expansão (8.11) devem ser dados por:

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx, \xi \in \mathbb{R}. \quad (8.12)$$

Substituindo (8.12) em (8.11) obtemos a solução do problema(8.2):

$$v(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) K(x - y, t) dy, \quad (8.13)$$

onde o núcleo do calor para esse problema é:

$$K(x - y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 t} e^{i\xi(x-y)} d\xi. \quad (8.14)$$

8.3 Problema de Condição Inicial não-homogênea

Para o problema (8.3), aplicando a transformada de Fourier na variável x , obtemos

$$\partial_t \hat{w} = \partial_{xx} \hat{w} + \hat{g}(\xi, t) \quad (8.15)$$

$$\Rightarrow \partial_t \hat{w} = (i\xi)^2 \hat{w} + \hat{g}(\xi, t)$$

$$\Rightarrow \partial_t \hat{w} = -\xi^2 \hat{w} + \hat{g}(\xi, t), \quad t > 0, \quad (8.16)$$

$$\hat{w}(\xi, 0) = 0.$$

em (8.15) usamos o Corolário 7.2.1.

Para cada $\xi \in \mathbb{R}$ fixo, temos um problema de valor inicial para uma EDO de primeira ordem, ou seja, a solução é única. Como (8.16) pode ser escrito como $\partial_t \hat{w} + \xi^2 \hat{w} = \hat{g}(\xi, t)$, usamos o fator integrante $e^{\xi^2 t}$ e obtemos:

$$\hat{w}(\xi, t) = e^{-\xi^2 t} \int_0^t e^{\xi^2 s} \hat{g}(\xi, s) ds.$$

Agora, calculando formalmente a transformada inversa na igualdade acima obtemos:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}^{-1}\hat{w})(\xi, t) &= w(x, t) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{w}(\xi, t) e^{i\xi x} d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{-\xi^2 t} \int_0^t e^{\xi^2 s} \hat{g}(\xi, s) ds] e^{i\xi x} d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{-\xi^2 t} \int_0^t e^{\xi^2 s} [\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y, s) e^{-i\xi y} dy] ds] e^{i\xi x} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^t ds \int_{-\infty}^{+\infty} dy g(y, s) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2(t-s)} e^{i\xi^2(x-y)} d\xi.
\end{aligned} \tag{8.17}$$

Como $s < t$, vale que:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2(t-s)} e^{i\xi(x-y)} d\xi &= \sqrt{\frac{\pi}{t-s}} \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{4(t-s)}\right) \\
&= 2\pi K(x-y, t-s).
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$w(x, t) = \int_0^t ds \int_{-\infty}^{+\infty} dy g(y, s) K(x-y, t-s). \tag{8.18}$$

Provar que as candidatas à solução definidas em (8.13) e (8.18) de fato são soluções, respectivamente, de (8.2) e (8.3) e que (8.13)+(8.18) é a solução de (8.1) é um estudo interessante que fica para um futuro trabalho.