



Universidade Federal do Rio Grande
Instituto de Matemática Estatística e Física
Curso de Matemática Licenciatura

Trabalho de Conclusão de Curso

**Uma proposta pedagógica para auxiliar no ensino e
aprendizagem dos números inteiros relativos**

Fabiane Pontes Pereira

Rio Grande, janeiro de 2023

Fabiane Pontes Pereira

Uma proposta pedagógica para auxiliar no ensino e aprendizagem dos números inteiros relativos

Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, requisito para conclusão da disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso II junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Licenciatura em Matemática

Orientadora: Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Fabiane Pontes Pereira

**Uma proposta pedagógica para auxiliar no ensino e
aprendizagem dos números inteiros relativos**

Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática, requisito para conclusão da disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso II junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Prof^a. Dr^a. Cinthya Maria Schneider Meneghetti

(Orientadora – FURG)

Prof^a. Dr^a. Celiane Costa Machado

(FURG)

Prof. Dr. Rodrigo Barbosa Soares

(FURG)

Resumo

O tema desse Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) surgiu a partir da necessidade de investigar formas de colaborar com o ensino e a aprendizagem dos discentes do 8^a ano do Ensino Fundamental, devido às dificuldades apresentadas por eles na disciplina de matemática no conteúdo dos números inteiros relativos. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) nessa etapa do ensino é esperado que os estudantes resolvam e elaborem problemas que envolvam operações com números inteiros, porém alguns alunos do 8^o ano ainda não compreendem o assunto. O objetivo do TCC é propor atividades para trabalhar com os números inteiros relativos, com contextos atuais que refletem a realidade do estudante e assim verificar que os números inteiros estão presentes de forma recorrente no nosso cotidiano. Para justificar nossa proposta, uma revisão bibliográfica sobre diferentes sistemas de expressão e representação de objetos matemáticos, bem como o estudo de dois livros didáticos que apresentam o assunto foi realizado. Através desse trabalho, pretendemos apresentar uma matemática mais ligada ao cotidiano do aluno utilizando temas acessíveis como, por exemplo, dados de contas bancárias, utilização de elevadores, estudo das temperaturas (positivas e negativas) e jogos de tabuleiro.

Palavras-chave: Números Inteiros; Operações com números inteiros; Ensino Fundamental; Dificuldades de Aprendizagem.

Índice

Introdução.....	1
1 Objetivos.....	3
2 Revisão Bibliográfica.....	4
2.1 Um breve histórico sobre a origem dos números negativos.....	5
2.2 Uma possível abordagem para introdução dos números inteiros relativos.....	6
2.3 Os números inteiros relativos em dois livros didáticos.....	7
3 Metodologia.....	12
4 Relato da aplicação das Atividades.....	14
5 Considerações Finais.....	18
Referências.....	19
Apêndice A - Atividade de Extensão - Versão para o aluno.....	20
O Ice Bar de CANELA possui mais de 30 toneladas de gelo distribuídas entre, cadeiras, poltronas, balcões, sofás, algumas paredes, onde até os copos são feitos de gelo.....	27
FRIO, MUITO FRIO!.....	27
Apêndice B - Atividade de Extensão - Respostas e comentários para o professor.....	29
O Ice Bar de CANELA possui mais de 30 toneladas de gelo distribuídas entre, cadeiras, poltronas, balcões, sofás, algumas paredes, onde até os copos são feitos de gelo.....	33
FRIO, MUITO FRIO!.....	33

Introdução

O conjunto dos números inteiros relativos ou simplesmente números inteiros é formado por todos os números inteiros negativos, pelo zero e por todos os números inteiros positivos. O primeiro registro publicado sobre as regras de sinal da multiplicação de números inteiros foi na China Antiga na Dinastia Han (202 a. C – 220) embora os chineses não acreditassem na ideia dos números para solucionar as equações. Na Índia, na tentativa de resolver uma equação quadrática, os matemáticos utilizaram os números negativos ao tentar formular um algoritmo para sua resolução. No século III foi que Diofanto começou a efetuar cálculos com números inteiros negativos que constam na obra *Aritmetika* e, somente em 1867, Hankel conseguiu demonstrar de interpretação geométrica dos números inteiros relativos através dos segmentos de direções opostas (HILLESHEIM e MORETTI, 2016, p. 102). Apesar de terem se passado 155 anos da comprovação das regras da multiplicação por números inteiros negativos, elas ainda causam um desconforto em sua aplicação na sala de aula. O leitor interessado pode ler mais sobre o assunto em Boyer (1996).

O ensino do conjunto dos números inteiros aparece na BNCC no 7º ano do Ensino Fundamental, nas habilidades: EF07MA03 - Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração; e ainda EF07MA04 - Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros. Vale ressaltar que na BNCC (BRASIL, 2018), com relação às operações de multiplicação e divisão, não aparecem habilidades específicas. Em conversas com alguns alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, percebemos que eles ainda não dominavam essas habilidades e essa foi a motivação para a escolha do tema do TCC.

Os números inteiros são frequentemente associados a modelos comerciais, isto é, exemplos e exercícios em que os números positivos correspondem à crédito ou ganho e os negativos à débito ou perda. Esse fato auxilia o professor a atribuir um caráter concreto ao número, porém pode dificultar o ensino das propriedades da multiplicação de inteiros relativos. Isso porque o surgimento desses números se deu em um contexto algébrico e não aritmético (HILLESHEIM e MORETTI, 2016).

Raymond Duval é um filósofo, psicólogo e pesquisador francês que investiga a aprendizagem matemática e seus sistemas de representação para a apreensão do conhecimento matemático. Segundo Duval (2009, p.14), “não se pode ter compreensão em matemáticas, se nós não distinguimos um objeto de sua representação”. Um mesmo objeto pode ter diferentes sistemas de representação e toda confusão entre objeto e representação gera uma perda de compreensão. A passagem de um sistema para outro não é simples para a maioria dos estudantes, sendo assim, os diferentes sistemas acabam sendo ensinados separados e isso faz surgir uma não-congruência entre as diferentes formas de representação de um mesmo objeto, no caso deste trabalho, os números inteiros relativos.

A fim de contribuir com o ensino e aprendizagem dos números inteiros relativos, foram elaboradas atividades com problemas contextualizados, com a intenção de explorar objetos e sua representação. Desejamos contribuir para apresentar a matemática mais ligada ao cotidiano do

aluno, utilizando temas acessíveis, como por exemplo, dados de contas bancárias, utilização de elevadores, estudo das temperaturas (positivas e negativas) ou ainda jogos de tabuleiro.

No Capítulo 1 são apresentados os objetivos geral e específicos do trabalho. No Capítulo 2 realizamos a pesquisa realizada sobre o estudo dos números inteiros e as dificuldades encontradas no ensino do conteúdo. No Capítulo 3 é exposta a metodologia trabalhada seguindo as recomendações da BNCC. No Capítulo 4 é retratada a escola onde foi realizada a pesquisa. No Capítulo 5 apresentamos um breve relato da aplicação da proposta em uma escola estadual localizada no município de Rio Grande-RS e o comportamento dos alunos referente ao conteúdo.

1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é investigar e propor atividades para colaborar com a aprendizagem dos discentes do 8^a ano do Ensino Fundamental, precisamente no conteúdo de números inteiros relativos por meio de atividades e problemas contextualizados.

Os objetivos específicos são:

- Pesquisar em livros didáticos como o conteúdo de números inteiros é apresentado;
- Estudar e compreender as regras operacionais envolvidas e suas demonstrações;
- Utilizar termos acessíveis e pertencentes ao cotidiano do aluno para explorar os conceitos envolvidos;
- Investigar quais habilidades e competências relacionadas ao assunto são apresentadas na BNCC;
- Elaborar e apresentar atividades contextualizadas sobre o tema números inteiros.

No próximo capítulo é apresentada uma revisão bibliográfica sobre a pesquisa referente às dificuldades encontradas na compreensão dos números inteiros, algumas reflexões de autores sobre o assunto e também como o conteúdo é apresentado em dois livros didáticos do ensino básico.

2 Revisão Bibliográfica

Em teoria, a apresentação dos números inteiros relativos para os alunos deveria ser algo simples por estar presente no nosso cotidiano, porém, na prática o ensino desse conteúdo apresenta problemas devido a não congruência semântica, isto é da falta de exatidão e de significado das palavras e o objeto matemático representado que acaba ocasionando a dificuldade de compreensão do conteúdo matemático. Segundo Hillesheim e Moretti (2020), dizemos que há congruência semântica quando o aluno reconhece facilmente o objeto matemático, ou seja, quando existe uma correspondência direta entre a linguagem natural (discurso) e os conteúdos a serem substituídos.

Segundo Moretti, Brandt e Almouloud (2022),

A noção de congruência semântica, fenômeno estudado por Duval, promove as operações semi cognitivas de tratamento e conversão e tem um papel fundamental na compreensão dos acertos e erros da produção discente. Ela mostra-se importante na preparação de atividades didáticas que têm potencial para promover a aprendizagem de noções matemáticas (MORETTI, BRANDT e ALMOULOU, 2022, p.93).

Três exemplos de registros de representação semiótica são: a linguagem natural (discurso), registro simbólico (cálculo) e a representação geométrica (reta). Segundo Hillesheim e Moretti (2020), quando ocorre a passagem de uma representação semiótica a outro sistema de maneira espontânea diz-se que há congruência semântica. O termo conversão se refere a vários registros diferentes e o termo tratamento se refere a diferentes abordagens dentro de um mesmo registro.

O problema da congruência ou da não congruência semântica de duas representações de um mesmo objeto é, portanto, o da distância cognitiva entre essas duas representações sejam elas pertencentes ou não ao mesmo registro. Quanto maior a distância cognitiva, mais o custo da passagem de uma representação a outra corre o risco de ser elevado e não ser efetuado ou entendido (DUVAL, 2012, p. 105).

Um exemplo simples de congruência semântica na adição de dois números inteiros positivos em que o resultado é positivo pode ser dado considerando que se um estudante tiver R\$ 5,00 e ganhar mais R\$ 3,00 o seu resultado será positivo R\$ 8,00 (linguagem natural), ou seja, $(+5) + (+3) = (+8)$ (registro simbólico). Já para o caso da subtração de 2 números inteiros, pode ser aplicado o exemplo da temperatura: se está $-3C^{\circ}$ e a temperatura diminuiu $2C^{\circ}$ então a temperatura final será $-5C^{\circ}$, ou seja, $(-3) - (+2) = (-5)$. Porém a nossa maior dificuldade está na não congruência semântica, que ocorre na multiplicação de dois números negativos, por exemplo, em $(-4) \times (-2) = (+8)$, onde temos um resultado positivo. Como poderia uma dívida multiplicada por outra dívida representar uma receita? Tal resposta cria uma ideia contraditória para o aluno.

A matemática é uma criação humana e suas regras e aplicações fazem parte dessa criação. Nem sempre a compreensão dela por parte dos alunos se torna acessível. Não costuma ser fácil justificar ao aluno que as regras de sinais foram uma criação do homem e que elas devem seguir uma lógica. A conversão entre linguagem e cálculo não é sempre espontânea, por isso pode interferir no sucesso ou fracasso de sua aprendizagem.

2.1 Um breve histórico sobre a origem dos números negativos

Segundo Hillesheim e Moretti (2016), o estudo dos números negativos é bastante antigo. Diofanto foi um brilhante matemático da escola de Alexandria considerado o “pai da álgebra” e teria escrito 13 livros. Sua coletânea era repleta de inovações para o período clássico e a sua origem e período em que viveu é desconhecido, o que podemos afirmar é que ele foi o primeiro matemático a realizar operações com números negativos que apareciam em diversos cálculos intermediários e em problemas de seu livro *Aritmetika*. Diofanto também foi o primeiro a afirmar que um número negativo multiplicado por um número negativo terá como resposta um número positivo, porém a ideia de um número ser negativo ainda causava um desconforto devido ao fato de não considerarem a existência dos mesmos na época.

No entanto, quando matemáticos calculavam as raízes de equações lineares quadradas, equações cúbicas e biquadradas e a sua solução resultava em números inteiros negativos, as respostas não eram aceitas. Com o desenvolvimento do comércio na baixa idade média surgiram interesses pela contagem da aritmética impulsionados pelo desenvolvimento do mercantilismo. O matemático Fibonacci que assumiu em sua obra *Flos* (publicada em 1225) a existência dos números negativos e imaginários com uma certa restrição de que seriam aceitas somente para representação de dívidas. Com o surgimento do sistema bancário os números negativos passaram a ser utilizados nas contas de subtração devido ao fato de os banqueiros perceberem que o saldo retirado por um cliente era maior que o saldo que ele havia depositado no banco e deu origem ao crédito bancário.

As primeiras demonstrações das regras de sinais ocorreram no ano de 1634 pelo matemático Simon Stevin (Belgo) devido ao fato que matemáticos estavam incomodados com os números negativos. Ele tentou comprovar o funcionamento das regras de sinais, porém sua demonstração era apenas a comprovação de um caso em particular. Leonardo Euler (1707-1783) possuía o mesmo objetivo de demonstrar a regra de sinais e não obteve sucesso por não haver conhecimentos suficientes dos conceitos matemáticos para demonstrar a sua teoria. No ano de 1748 foi publicado um livro que tratava de *Álgebra*, o qual aborda os números negativos com sentido oposto ao positivo e utiliza a distributividade em relação a multiplicação. Seu estudo se tornou referência, porém ainda não estava comprovada a teoria.

O alemão Carl Gauss no ano de 1831 apresentou uma nova teoria dos números complexos através de pontos no plano e seu estudo foi aprofundado por Cauchy (1789-1857). Ele foi o primeiro a comprovar a adição de números inteiros, porém não conseguiu apresentar de forma clara a multiplicação. Pierre Simon Laplace, um estudioso (1749-1827) conseguiu um avanço nas demonstrações da propriedade distributiva, mas ainda era considerada insuficiente. No ano de 1830 foi publicado o “tratado de *Álgebra*” na qual George Peacock (1891-1858) apresenta “como sendo o estudo do uso de símbolo para denotar os números decimais positivos usuais, juntamente com os símbolos operatórios, como o de adição e o de multiplicação, aos quais podem-se sujeitar esses números”. Essa justificativa foi chamada de princípio de permanência das formas equivalentes e, em 1867, o alemão Hermann Hankel ampliou o conceito de número tornando mais notória.

Quando duas formas da arithmetica universalis expressas em símbolos gerais são iguais entre si, elas devem permanecer iguais entre si mesmo quando os símbolos deixam de designar simplesmente grandezas, e dessa forma também as operações podem obter qualquer outro conteúdo. (NETO, 2011, p.15 apud HANKEL, 1867, p. 11).

Ao longo do desenvolvimento desse trabalho, houve muita dificuldade em encontrar material didático que contasse a história mais aprofundada de como foi desenvolvido as demonstrações das operações e propriedades dos números negativos e os desafios encontrados ao longo da história da matemática. Se tornaria interessante ao aluno conhecer a história do surgimento dos números negativos e perceber que os matemáticos desprezavam as soluções negativas até o século XVI, por conta de sua complexidade. Houve vários estágios presentes no desenvolvimento histórico que mostram os obstáculos enfrentados ao longo dos séculos até compreender o funcionamento das operações básicas.

2.2 Uma possível abordagem para introdução dos números inteiros relativos

Posterior aos debates entre professores de matemática nas comunidades acadêmicas onde a maior preocupação dos professores era a respeito de ensinar aos alunos que a regra de sinal é uma convenção que não pode ser provada e que ela é para simplesmente comprovar formalismo matemático já existente.

Para que os alunos compreendam o conteúdo, será necessário o estudo prévio das regras operacionais. No Quadro 1 apresentamos a regra de sinais para a multiplicação de números inteiros.

Quadro 1: Regra de Sinais para a multiplicação de números inteiros negativos

Sinal do fator	Operação (Multiplicação)	Sinal do fator		Sinal do Resultado
+	×	+	=	+
+	×	-	=	-
-	×	+	=	-
-	×	-	=	+

Fonte: Próprio Autor

Algumas pesquisas e propostas pedagógicas são feitas na tentativa de tornar esse assunto mais familiar e acessível. Na revista Superinteressante, o matemático Luiz Barco discute uma justificativa para o resultado da multiplicação de dois números inteiros negativos ser um número inteiro positivo (BARCO, 1999). Segundo o autor, é necessário compreender a lógica conforme segue:

Considere um número qualquer multiplicado por zero: $5 \times 0 = 0$.

Substitua o número zero por $3-3$: $5 \times (3 - 3) = 0$.

O resultado é escrito de uma forma diferente, respeitando as propriedades da matemática sem alterar o resultado. Utilizando a distributividade da multiplicação, temos

$$(5 \times 3) + (5 \times (-3)) = 0.$$

Como sabemos que 5×3 é 15, logo a resposta da multiplicação de $5 \times (-3)$ deverá ser -15 para que essa igualdade seja verdadeira. Com essa confirmação, ele justifica que ao multiplicar um número negativo com um número positivo a resposta é um número negativo.

Em seguida o autor explica o motivo de o produto de dois números negativos ter a resposta positiva através da equação $2y - 2y = 0$. Se substituirmos a letra y por -5 teremos a seguinte equação: $2(-5) - 2(-5) = 0$. Quando calculamos $2(-5)$ a resposta deverá ser um número negativo conforme já verificado anteriormente, logo para comprovar a veracidade da equação, a multiplicação de $-2(-5)$ resultará em um número positivo. Portanto, $-10 + 10 = 0$.

2.3 Os números inteiros relativos em dois livros didáticos

A fim de investigar como o conteúdo de operações com números inteiros relativos é apresentado em livros didáticos que fazem parte do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), pesquisamos as obras de Joamir Souza, Matemática realidade & tecnologia: 7º ano (SOUZA, 2018) e ainda Carlos N. C. de Oliveira e Felipe Fugida, Geração Alpha matemática ensino fundamental (OLIVEIRA e FUGIDA, 2018).

O livro Matemática realidade e tecnologia do 7º ano - manual do professor (SOUZA, 2018) na unidade temática dos números é composto de 26 páginas de conteúdo, que tem como objetivos de uso a história, ordenação, associação com o ponto e a reta numérica e operação. A unidade finaliza com uma orientação didática de planejamento financeiro através da criação de uma planilha eletrônica.

O autor inicia o conteúdo da unidade com dois exemplos de temperatura nas cidades de Bom Jesus - RS (-3°C) e Chapadinha - MA (21°C) para explicar que, em uma mesma estação do ano, a temperatura do dia pode ter uma grande diferença de temperatura e isso ocorre por vários fatores que incluem a extensão territorial. Na página seguinte, o autor sugere que a turma dialogue a respeito da variação da temperatura em diferentes partes do Brasil e sobre o que os alunos entendem sobre a variação da temperatura.

Inicia então o assunto dos números negativos. O autor sugere ao professor perguntar para os alunos se eles já vivenciaram situações que envolvam os números negativos e explique os exemplos de amplitude, de saldo de gols, extrato bancário e temperatura (em todos os exemplos existem sugestões do autor de como conduzir a aula). O próximo tópico é “Números Inteiros Negativos” onde é sugerido que, caso necessário, o professor pode relembrar a reta numérica com os alunos e propõe uma atividade para eles criarem uma reta seguindo as informações sugeridas. No exemplo apresentado no livro, a respeito de retas numéricas, é trabalhado a sequência de sucessor e antecessor, definição de módulo, valor absoluto, e números opostos e após esse exemplo é abordado no livro os contextos de geografia em seis atividades para serem efetuadas pelo discente do conteúdo visto anteriormente.

Avançado o conteúdo, o autor faz algumas comparações dos números inteiros e existe uma explicação da reta numérica em caso de comparar número negativo e positivo, de dois números negativos e de um número positivo com um número negativo e posterior essa explicação existem 8 exercícios que são bem detalhados no qual são trabalhados os números inteiros. Para iniciar as operações com os números inteiros, o primeiro tópico é a adição e é sugerido uma atividade de escrever números aleatórios e pedir para os alunos sortearem e efetuarem o cálculo. E o exemplo do livro é um contexto bastante atual que trabalha a pontuação de um jogo de dardos utilizando um celular e calculando a sua pontuação utilizando a reta numérica. Após a explicação detalhada são recomendados nove exercícios bem detalhados que trabalham como conteúdo visto anteriormente.

O segundo tópico da operação dos números inteiros é a subtração. Entre as recomendações para o professor existe uma que sugere, caso necessário, lembrar os alunos a respeito do simétrico e número oposto e efetuar oito exercícios do conteúdo. Vale ressaltar que todos os exercícios são de linguagem acessível e seguindo o modelo do exemplo. O próximo tópico trabalha com as propriedades da multiplicação e apresenta três exemplos: o primeiro somente com números positivos, o segundo estuda o que são números negativos e o terceiro finaliza com a multiplicação de dois números negativos.

No livro consta a seguinte explicação a respeito dos sinais do produto entre dois números inteiros: “O produto de dois números inteiros, diferente de zero, com sinais iguais é um número positivo. O produto de dois números inteiros, diferente de zero, com sinais diferentes é um número negativo.” (SOUZA, 2018, p.55).

A explicação a respeito da divisão inicia lembrando que a divisão é a operação inversa da multiplicação: “O quociente de dois números inteiros, diferentes de zero com os sinais iguais é um número positivo. O quociente de dois números inteiros, diferente de zero, com sinais diferentes é um número negativo.” (SOUZA, 2018, p. 55).

Após essas duas explicações, existem onze exercícios de divisão e multiplicação, porém, vale ressaltar que o número de exercícios que contém divisão é inferior ao de multiplicação sendo somente dois exercícios na atividade 1 trabalhando a contextualização dos números inteiros. Após a conclusão do conteúdo são apresentadas duas orientações didáticas: a primeira é sobre a preservação das águas na qual trabalha com conhecimentos básicos a respeito da profundidade dos mergulhos em Fernando de Noronha; A segunda orientação é de trabalhar o controle financeiro utilizando planilha eletrônica com o objetivo de o aluno organizar suas despesas financeiras. O capítulo é finalizado com reflexões a respeito do conteúdo e sugere para fazer um mapa mental com a sequência do conteúdo a para verificar se houve a compreensão de todos os tópicos abordados e sugere que em caso de dúvidas esclarecer o conteúdo com a professora.

Com relação ao livro Geração Alpha matemática ensino fundamental 7º ano (OLIVEIRA e FUGIDA, 2018), os autores iniciam o Capítulo 1 com os números inteiros e tem como objetivo reconhecer os números negativos em diferentes situações. Iniciando com a imagem demonstrando que um iceberg pode estar tanto acima quanto abaixo do nível do mar, tem por objetivo mostrar ao aluno que os números positivos e negativos estão presentes em nosso universo.

Encontramos no livro uma breve explicação de números positivos e negativos e que devido a convenções os números positivos não necessitam do sinal + em sua escrita e que o número zero é nulo. O autor mostra exemplos de como utilizamos no nosso cotidiano os números positivos e negativos temperatura e transação bancária. Inicia o conteúdo com o conjunto dos números inteiros definindo a necessidade do conhecimento dos números naturais e da sua representação numérica, apresentando a seguinte observação: "Observe que todo número natural é um número inteiro, mas nem todo inteiro é um número natural" (OLIVEIRA e FUGIDA, 2018, p.11).

O próximo passo é a representação de um número inteiro na reta numérica e existe o passo a passo de como construir a reta e os conceitos de antecessor e sucessor (como o autor do primeiro livro consultado). Em seguida, fala em valor absoluto ou módulo de um número inteiro com um exemplo associando as estações de um metrô. Em seguida são trabalhados os números opostos e simétricos utilizando o exemplo anterior do metrô e mais dois exemplos observando a reta numérica.

Os contextos históricos estão presentes no livro com uma breve história do surgimento dos números negativos, um diferencial em relação a obra citada anteriormente, e prossegue com seis atividades propostas. Na continuação do conteúdo, a próxima etapa é a comparação de números inteiros, porém o autor ressalta a necessidade verificar se os alunos conseguem identificar se os números são maiores, menores ou iguais antes de prosseguir o conteúdo de comparação de um número inteiro através de duas situações: a primeira um termômetro com os dados apresentados na vertical e na situação dois uma linha do tempo sendo demonstrada na horizontal. Uma sugestão proposta no livro de que se o aluno obtiver dificuldades de comparar o conteúdo é sugerido que lembre que o conceito de módulo está ligado a distância que um número inteiro se encontra do zero utilizando quatro exemplos e seguindo para três atividades. Na página seguinte, existem orientações didáticas nas quais estão onze exercícios que possuem atividades contextualizadas com o objetivo de reforçar os conhecimentos dos alunos.

O objetivo do Capítulo 2, intitulado "Operações com Números Inteiros", é de realizar as quatro operações matemáticas envolvendo os números inteiros. Inicia com a adição de números inteiros com uma tabela de saldo de gols com dados de um campeonato feminino perguntando ao leitor como faria para desempatar os dois times de futebol que possuem o mesmo saldo de gols e no parágrafo seguinte é explicado como deve ser feito o desempate. O tema esporte foi incorporado à atividade proposta, por concordarmos ser um assunto de interesse dos estudantes.

O livro segue com duas situações: a primeira situação que envolve a solução de um problema de adição de dois números positivos e a sua solução representada na reta numérica e após a solução contém mais dois exemplos de adição de números positivos. Na segunda situação, encontramos um problema envolvendo a adição de dois números negativos e na qual também é utilizada a reta numérica para explicar o problema. Na adição de dois números negativo e positivo é indicado adicionar o módulo do número e são sugeridos mais dois exemplos de adição com números negativos. Na terceira situação encontramos um problema de adição de números inteiros com sinais opostos e na explicação informa que o resultado terá o sinal do número de maior módulo. Após a resolução feita através da reta dos negativos existem mais dois exemplos de somas com módulos opostos. Na quarta situação problema foi trabalhado foi a adição de números simétricos na qual a soma é igual a zero. Na continuação do exercício existem mais dois exemplos parecidos. Finalizando essa parte do conteúdo, exemplificando as três maneiras de calcular, na quinta situação na resolução do problema é justificado que podemos calcular de duas formas, sendo a primeira por algoritmo usual e a segunda forma por cálculo mental. A sexta situação na resolução do problema demonstra que podemos calcular através do algoritmo usual ou através do algoritmo da decomposição.

O próximo objetivo do livro é estudar as propriedades da adição dos números inteiros, reconhecendo as propriedades comutativa, associativa, do elemento neutro e distributiva em relação da adição. Cada propriedade possui quatro exemplos de utilização com a exceção do elemento neutro da adição que possui somente dois exemplos. Na sequência existem oito exercícios do conteúdo.

Para a subtração de números inteiros, o livro traz uma retomada do conteúdo da deslocação da reta numérica até o significado de opostos. Na primeira situação "a diferença de dois números

inteiros é igual a soma do primeiro número com o oposto do segundo” como já havia sido explicado no conteúdo da adição, não existem outros exemplos. Na situação dois é trabalhado a subtração de dois números através da reta numérica ou representando pela adição do minuendo pelo número oposto do subtraendo. Portanto, para a diferença após os exemplos, o autor sugere estratégia de cálculo mental a fim de um melhor desenvolvimento dos alunos. A Situação 3 utiliza o algoritmo usual, decomposição e o cálculo mental. E na última situação trabalha com a representação numérica. Na sequência, o conteúdo trata da adição algébrica e o próximo passo é a adição e subtração dos números utilizando a calculadora. No final da página, contém cinco exercícios de subtração e duas atividades complementares.

O próximo passo é a multiplicação de números inteiros não nulos que é dividido em quatro casos, sendo o primeiro caso a multiplicação de dois números positivos onde é explicado de duas formas (algoritmo usual ou a adição das parcelas repetidas) e contém dois exemplos. O segundo caso, fala da multiplicação de dois números inteiros com sinais diferentes através das mesmas estratégias vistas anteriormente. No terceiro exemplo é visto a multiplicação de dois números inteiros negativos e é exibido em um quadro que a multiplicação dos números segue um padrão e que quando multiplicamos dois números negativos podemos utilizar a ideia de oposto, seguido de mais dois exemplos demonstrados. No quarto exemplo é utilizado a multiplicação de três ou mais fatores e para isso os exemplos usados foram “número positivo multiplica número positivo que multiplica um número negativo e temos a resposta um número negativo”. Na continuação são trabalhadas as propriedades da multiplicação dos números inteiros. As propriedades comutativa, associativa, elemento neutro e distributivo possuem dois exemplos de cada e o próximo passo é de resolução de oito exercícios de reforço do conteúdo. Finalizando, o conteúdo das operações com a divisão de números inteiros é separado em divisão de números inteiros com sinais diferentes e divisão de números inteiros com sinais iguais. O autor salienta a necessidade da utilização do módulo é que o resultado sempre será negativo e existem quatro exemplos de resolvidos.

Existe um lembrete importante de que não existe divisão zero. A divisão de número inteiro com sinais iguais acompanha dois exemplos de problemas envolvendo somente números positivos e mais três exemplos de exercícios resolvidos. Na continuação do conteúdo é pedido para que o educador certifique se o aluno compreende os conceitos da divisão e explica a forma correta de organizar os termos da divisão. Como a divisão e a multiplicação são operações inversas existem três exemplos dessas operações. O próximo passo é ensinar o aluno a realizar a operação de divisão através da calculadora e existe uma atividade complementar para realizar as operações. Após essa atividade, no livro existem mais 7 atividades do conteúdo de divisão. E o último conteúdo visto é a expressões numéricas com números inteiros no qual existem dois exemplos contendo números negativos integrando as quatro operações. E logo após o conteúdo existem 2 atividades referentes ao conteúdo. Existem estratégias de apoio que informam as maiores dificuldades que podem acontecer com os alunos e também as estratégias de apoio de estudo. O capítulo termina com cinco exercícios que envolvem o material de todo o conteúdo.

A seguir apresentamos um quadro comparativo (Quadro 2) entre as duas obras consultadas.

Quadro 2: Alguns destaques na comparação entre as obras consultadas

Matemática realidade & tecnologia	Geração Alpha matemática ensino fundamental
Maior número de problemas envolvendo exemplos cotidianos	Melhor detalhamento na resolução dos problemas
Aplicação da reta numérica de forma satisfatória	Aplicação da reta numérica de forma satisfatória
Módulo ou valor absoluto	Módulo ou valor absoluto
Números opostos ou simétricos	Números opostos ou simétricos
Quatro operações detalhadas em diversos exemplos	Quatro operações detalhadas em diversos exemplos
Ensino de como utilizar a calculadora e sugestão de atividade de construção de planilhas	Inserção somente da calculadora em uma atividade do livro
Diversos exemplos com contextos atuais	Diversos exemplos com opções de resoluções manual e pela calculadora.
Apresenta uma única forma de resposta	Apresentação de diferentes formas de resolução.
Propriedade da adição e multiplicação explicado de forma simples.	Propriedades da adição e multiplicação detalhada
Apresenta expressões numéricas separadas.	Possui mais exemplos de expressões numéricas com as quatro operações

Fonte: Próprio Autor.

A partir das leituras e consultas realizadas, foi elaborada uma proposta pedagógica para estudar os números inteiros relativos, conforme a metodologia que explicamos no próximo capítulo.

3 Metodologia

De acordo com a BNCC os números inteiros estão inseridos na habilidade EF07MA04 que consiste em resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros. Essa habilidade está prevista para o 7º ano, porém alguns alunos do 8º ainda não compreendem o assunto. Devido a pandemia Covid-2019 muitos alunos não tiveram acesso ao conteúdo e estão encontrando dificuldades na aprendizagem dos conteúdos do ano seguinte. Neste trabalho, desejamos propor atividades para tentar diminuir tais dificuldades que têm se mostrado recorrentes, em particular no caso dos números inteiros negativos.

Entendemos que existe uma necessidade de o aluno compreender o motivo pelo qual ele deverá inverter os sinais no caso da multiplicação entre dois números negativos, por exemplo, e de entender a lógica do funcionamento do Quadro 3. Com a utilização da reta numérica podemos trabalhar com os números opostos (um sistema diferente de representação do sinal) e com eles reforçar a compreensão da lógica utilizada no Quadro 3 da reta de sinais conforme os exemplos:

Quadro 3: Exemplos de números opostos

Número	Número Oposto Correspondente
+ 5	- (+ 5) = - 5
- 8	- (- 8) = + 8
+ 2	- (+2) = - 2
- 4	- (- 4) = +4

Fonte: Próprio Autor

Acreditamos que quando o aluno compreende a ideia de oposição de um número ele passa a compreender com uma maior facilidade a regra de sinais sem a necessidade de memorização da regra, pois inverter o sinal no número passa a corresponder a inverter o sentido de sua posição na reta real.

Os números negativos estão presentes na nossa rotina diária. Existem diferentes formas de verificar sua utilização como através de extrato do cartão bancário, fatura do cartão de crédito, campeonatos (saldo de gols) e temperatura que são alguns exemplos que podemos trabalhar na sala de aula. Por isso, foram elaboradas atividades sobre adição, subtração e multiplicação de números inteiros relativos, reunidas em uma proposta pedagógica que pretendeu mobilizar diferentes formas de representação e que pode ser aplicada com alunos que estejam com dificuldades no estudo desse conteúdo.

A proposta elaborada encontra-se disponível no Apêndice A em uma versão para impressão (versão do aluno) e no Apêndice B em uma versão com comentários para o professor. Ela consiste em trabalhar com a história do surgimento dos números inteiros desde a época do Renascimento. A definição de número inteiro foi apresentada e após trabalhamos refletindo sobre os conceitos de antecessor e sucessor. Observamos as posições verticais e horizontais em sala de aula e trabalhamos

o conceito de opostos. O objetivo do trabalho foi de colocar em prática os assuntos abordados através de 6 exercícios que envolveram o cotidiano do aluno por meio de uma comunicação de fácil compreensão.

No próximo capítulo apresentamos um relato da aplicação da proposta que foi elaborada e aplicada na disciplina de Atividade de Extensão e fez parte do projeto deste trabalho de conclusão de curso.

4 Relato da aplicação das Atividades¹

Realizei nos dias 24 e 25 de agosto uma aplicação da minha pesquisa do TCC em uma escola estadual de ensino fundamental com o objetivo de aplicar a proposta de atividade elaborada durante a disciplina de Atividade de Extensão, de acordo com o projeto do meu TCC. Foi uma manhã maravilhosa e me senti muito bem recepcionada tanto por professores e alunos. Apesar de ser simples e de poucos recursos pude perceber que existe muito amor e carinho de funcionários e alunos por aquela escola.

A fachada da escola sempre me remeteu a uma escola antiga e sempre tive uma certa curiosidade de conhecer a parte interna do estabelecimento. Adentrando na escola percebo uma modesta escola com mobílias simples, porém tudo bem limpo e organizado. Finalmente conheci a professora regente presencialmente, a qual foi minha supervisora do PIBID no formato online devido a pandemia do COVID-19, e falei o quanto estava grata pela oportunidade de poder aplicar a proposta pedagógica do projeto em sua turma. A minha ida a escola foi acertada previamente com a professora por um aplicativo de mensagens.

A professora regente é uma professora extremamente atenciosa com todos os seus alunos da escola a ponto de ceder o seu horário de intervalo para vender lanches com os alunos do 9º ano com o objetivo de arrecadar dinheiro para a formatura deles. Cheguei em um horário próximo ao intervalo e pude reparar no amor e o respeito que todos os alunos têm pela professora. Finalizando o intervalo a educadora recolheu os produtos que não foram comercializados e encaminhamos para a sala de aula.

Minhas primeiras percepções da sala de aula foram que existem algumas classes de forma retangular e outras de forma circular. Além disso, que é uma sala de tamanho pequeno e que na minha perspectiva encontraria uma turma toda enfileirada (isso não era necessário, era apenas uma forma que havia pensado que encontraria). Outro detalhe importante foi o que a professora teve que buscar alguns alunos no intervalo (estamos em um momento difícil decorrente da pandemia onde muitos alunos estão com um grau de ansiedade grande e acabam sobrecarregando ainda mais os professores). Enfim, estamos com todos os alunos na sala de aula e a professora regente me apresenta para os seus alunos.

Após as saudações iniciais começo a apresentar o projeto e entrego uma folha para cada aluno. Essa folha foi recolhida no final do segundo encontro, o que permitiu uma análise das respostas de cada estudante. No início achei bastante assustador e desconfortável pois era o meu primeiro contato com alunos do nível fundamental e a tensão e o medo começaram a tomar conta. Iniciei o projeto perguntando quem gostaria de ler a história de como surgiram os números negativos e 3 alunos se disponibilizaram a ler. Conversamos um pouco sobre o assunto e revimos as regras de sinais no quadro. Minutos antes de avançar o conteúdo ainda havia a curiosidade dos alunos em saber qual era o motivo que eu estava lecionando no lugar da professora (que estava acompanhando a aula) e expliquei

¹ Essa seção está escrita em primeira pessoa, uma vez que apresenta impressões pessoais da autora sobre a proposta realizada.

que esse trabalho faz parte da atividade de uma disciplina que estou cursando na Universidade e que necessitava fazer esse trabalho para poder aprovar na disciplina.

Retornei para o conteúdo dos números inteiros e apresentei uma tabela com o antecessor e sucessor e pedi para os alunos resolverem e realizaram a atividade sem nenhuma dificuldade. O exemplo descrito no exercício ficou bastante complicado de executar pois a ordem que eles estavam sentados dificultava o andamento da atividade, que foi pensada para a organização das classes em fileiras. Foi trabalhado um quadro com os números opostos e no quadro do primeiro exemplo os alunos não tiveram dificuldades na análise. Porém, no segundo quadro, o qual possuía uma reta dos números opostos, alguns alunos encontram dificuldades no preenchimento. Entre os números selecionados na tabela estava o número zero e o que chamou bastante a atenção é que alguns alunos responderam que o número oposto do zero é o menos zero e na reta ficou representado $-0; 0; +0$. Foi explicado passo a passo aos alunos sobre os números opostos e o elemento neutro da adição. Porém, foi possível perceber que é um pouco complexo a compreensão, pois os expressaram dúvidas, mas também não demonstraram que compreenderam a explicação.

Iniciamos o segundo encontro, o qual tinha por objetivo o reconhecimento dos números inteiros. Foram aplicados 6 problemas cotidianos e foi pedido aos alunos a resolução deles. O que chamou bastante a atenção foi a dificuldade de interpretação de texto e que muitos alunos não conseguiam desenvolver o problema sem o auxílio do professor para realizar a leitura e ajudar a analisar a situação.

Participaram da atividade 17 estudantes. Sobre as questões propostas (que estão disponibilizadas no Apêndice A), algumas observações que considero relevantes:

Questão 1- Trata da adição de números inteiros com o sinal contrário através de um saldo bancário. Somente 52,94% dos responderam corretamente. Houveram casos em que os alunos ignoraram o valor negativo.

Questão 2- Envolve a subtração e divisão de números inteiros positivos através da utilização valores reais do parque de diversão que estava na cidade no mês que foi realizada a atividade. Apenas 29,5% dos alunos responderam corretamente o primeiro questionamento e 35,26% responderam corretamente o segundo questionamento.

Questão 3- Trata do produto de um número inteiro positivo com um inteiro negativo, envolvendo diferentes formas de resolver esse problema. Nesta questão, 64% dos alunos responderam de forma correta sendo que houveram 3 formas de respostas corretas diferentes.

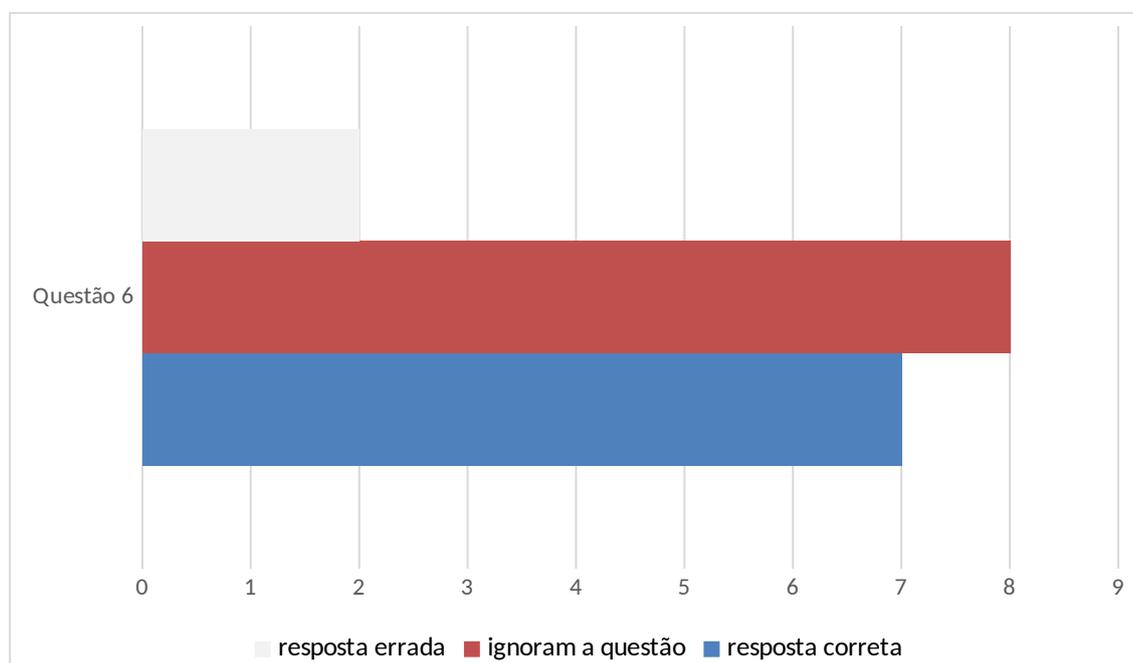
Questão 4- Envolve a multiplicação de dois números inteiros com temática da variação de temperatura e nela os alunos deveriam verificar a variação de temperatura. A grande dificuldade encontrada na hora, foi que boa parte dos alunos acreditavam que $19 - (-22) = 41$ deveria ser calculado como $19 - 22 = -3$ graus ou $22 - 19 = 3$. E somente 29,41% dos alunos acertaram a questão e 64,70% não responderam na folha.

Questão 5- Discute a subtração de números inteiros positivos e foi um exercício que causou bastante dúvidas e receios dos alunos. Somente 23,52% dos alunos, com alguma ajuda, conseguiram responder corretamente e 52,94% responderam pelo menos uma das opções da forma esperada.

Questão 6- A última questão envolve adição de números inteiros com sinais contrários e foi a questão na qual os alunos compreenderam com maior facilidade, porém somente 41% dos alunos responderam na folha e 47% dos alunos nem percebem a existência da questão e 12% dos alunos erraram a resposta.

Essa questão foi considerada a mais fácil na opinião dos estudantes. A Figura 1 auxilia a visualização do quantitativo de respostas corretas obtidas nessa questão, em relação às respostas erradas e em branco.

Figura 1 - Gráfico ilustrando o desempenho na questão 6



Fonte: Própria autora.

Após o término da aula do dia 24 de agosto combinei com a professora que voltaria no dia seguinte para dar mais um tempinho para terminarem as questões. Finalizei a aula entregando bombons a todos e agradecendo a participação. No dia seguinte fui novamente bem recebida na escola e reparei novamente o empenho da professora em tentar arrecadar dinheiro para a formatura dos alunos. A aula novamente começou após o recreio a professora enfrentou a resistência de alguns alunos em assistir a aula.

Na sala de aula no segundo dia os alunos estavam mais agitados que no dia anterior e muito mais curiosos e dispostos a conversar entre eles. Tentei fazer uma explicação mais rápida do conteúdo e da resolução dos problemas, pois me sentia mais tensa que no dia anterior. Comecei explicando as

respostas da Questão 1 a respeito do saldo bancário e como já havia previsto muitos alunos somaram os valores ignorando os sinais. Na questão 2, teve um aluno que comentou que esse era o preço que ele pagou na entrada do brinquedo e que não imaginava que teria diferença no valor pago. Na Questão 3, expliquei que existem 2 maneiras diferentes de calcular e que alguns alunos haviam pensado em uma terceira forma na qual eu não havia pensado. Na Questão 4, houve um pouco mais de dificuldades de compreensão devido ao fato de que alguns alunos acreditavam que deveriam calcular como $22-19$ e tive que fazer uma reta no quadro para mostrar que existiam 41 graus de diferença. Na Questão 5, boa parte da turma entendeu com facilidade as perguntas das letras a, b e d, porém na letra c eles encontram dificuldades na resolução. Na Questão 6, os alunos não obtiveram dificuldades de compreensão.

O Trabalho de Conclusão de Curso possibilitou muito aprendizado e foi importante para experiência profissional. Se tornou prazeroso por em prática o projeto elaborado, refletindo uma forma de transmitir o conhecimento. Através da experiência, pude perceber que cada aluno é único e que precisamos ter um olhar atento para conseguir construir o conhecimento juntamente com o aluno.

A partir do momento em que o projeto foi colocado em prática, se tornou visível que os estudantes compreenderam o conteúdo com maior facilidade. Toda a aprendizagem é válida e essa foi muito importante para minha formação.

5 Considerações Finais

Há necessidade dos estudantes de conhecer mais sobre o surgimento dos números inteiros e de todos os desafios do seu ensino e aprendizagem em matemática. O estudo desse conteúdo necessita de muito cuidado devido aos fatos de ser de difícil compreensão, de haver muitas barreiras e ainda valores negativos serem desprezados por grandes matemáticos ao longo da história.

De acordo com os livros de história, o surgimento dos números relativos ocorreu devido a necessidade da contagem de objetos com o surgimento da agricultura. Porém os números negativos começaram a aparecer também em cálculos e em equações. Os primeiros registros encontrados estavam presentes nas obras *Arithmetiké* de Diofanto (ft. Século III), o matemático utilizou as regras de sinais, porém desconsiderava a existência dos números negativos. Neste estudo apresentamos algumas das dificuldades encontradas por matemáticos ao longo de séculos e a recusa em aceitar resultados negativos, que acreditavam que se tornavam problemas sem solução quando se tratavam de equações de até quarto grau. Cabe ressaltar que, com o aparecimento dos bancos, surgiram os estudos de déficit devido ao fato de clientes efetuarem a retirada de valores de sua conta bancária maiores do que a reserva que possuíam.

Existe uma necessidade de contextualizar os problemas que envolvam as operações matemáticas com o objetivo de que os alunos compreendam o que está sendo proposto na questão, pois muitas vezes eles ficam preocupados em utilizar as regras de sinais e não compreendem o que está sendo cobrado no exercício. Um dos grandes problemas encontrados na pesquisa foi o fato dos estudantes possuírem bastante dificuldade na leitura e isso impedia a compreensão de problemas. Com alguns alunos foi necessário ler detalhadamente as questões. Outro problema encontrado foi a falta de interesse pela sala de aula e pelo conteúdo aplicado. Os alunos que apresentavam uma maior dificuldade eram simplesmente os que menos prestavam atenção nas explicações e também eram os alunos que tentavam olhar as respostas dos colegas para preencher a folha.

É comum o estudante possuir dificuldades de compreender a multiplicação com números negativos devido ao fato de não ser um processo natural e devemos fazer uma ressalva que, se para estudiosos da ciência foi um assunto complexo, imagina para estudantes do ensino básico. Acredito que com a pesquisa algumas dúvidas referentes ao conteúdo foram solucionadas, porém, a falta de leitura e interpretação de problemas é uma dificuldade que persiste entre muitos alunos.

Esperamos, por meio dessas atividades propostas, ter colaborado com a aprendizagem de discentes do 8^a ano do Ensino Fundamental, para que compreendam as unidades elementares (algarismos) e as representações (regras de sinais) diminuindo assim as dificuldades encontradas quando não há congruência semântica entre a linguagem natural e o registro simbólico, entre a formulação de um exemplo e as operações ou expressões utilizadas na sua solução. Apresentamos, por meio da atividade que está disponível no Apêndice A, uma matemática mais ligada ao cotidiano do aluno utilizando temas acessíveis e despertando assim o seu interesse pelo estudo dos números inteiros relativos.

Referências

- BARCO, Luiz. Por que a multiplicação de dois números negativos dá um positivo? Revista Superinteressante. Atualizado em 25 set 2020, 15h38 - Publicado em 30 set 1999. Disponível em: <<https://super.abril.com.br/ciencia/convencao-matematica-tem-sua-logica/>>. Acesso em 26 mai 2022.
- BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.
- BOYER, Carl B. História da Matemática. 2ª edição. Edgard Blucher, 1996.
- DUVAL, Raymond. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. Tradução: Méricles T. Moretti. Revemat, 7(1), 97–117, 2012.
- DUVAL, Raymond. Semiósio e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo 1). Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
- HANKEL, Hermann, Théorie der complexen Zahlensysteme insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamilstonschen Quaternion nebst ihrer geometrischen Darstellung. Leipzig: Leopold Voss, 1867.
- HILLESHEIM, Selma Felisbino; MORETTI, Méricles Thadeu. A regra dos sinais: alguns elementos importantes do seu contexto histórico. In: BRANDT, CF., and MORETTI, MT., orgs. Ensinar e aprender matemática: possibilidades para a prática educativa [online]. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016, pp. 233-254.
- HILLESHEIM, Selma Felisbino; MORETTI, Méricles Thadeu. Congruência Semântica: implicações didáticas no ensino da regra dos sinais. Intermaths, 1(1). Dez 2020.
- MORETTI, Méricles Thadeu; BRANDT, Celia Finck; ALMOULOUD, Saddo Ag. Congruência semântica: um fenômeno semiótico e cognitivo a ser levado em conta na aprendizagem matemática. Quadrante, 31(1), 92–112. Mai 2022.
- NETO, Fernando Raul. Menos vezes menos dá mais: observações históricas sobre o conceito de número negativo. Em Teia, 2(1), 1-22, 2011.
- OLIVEIRA, C. N. de, FUGIDA F. Geração Alpha matemática ensino fundamental. 2ª edição. São Paulo: SM Educação, 2018.
- SOUZA, J. R. de. Matemática realidade & tecnologia: 7º ano- manual do professor. 1ª edição. São Paulo: FTD, 2018.
- DOMINGUES, Hygino H. Álgebra moderna. 5ª edição. São Paulo: Saraiva, 2108



Apêndice A – Atividade de Extensão – Versão para o aluno

Oficina: Para que são necessárias as regras de sinais?

Responsável: Fabiane Pontes Pereira

Descrição da Atividade Proposta

A atividade consiste em trabalhar a história dos números negativos desde os primeiros registros matemáticos até os modelos atuais e mostrar possibilidades de justificar a veracidade das regras de sinais. No primeiro encontro trabalharemos a história do surgimento dos números negativos e a importância desse estudo na atualidade fazendo o aluno perceber que os números negativos estão presentes em nosso cotidiano. No segundo encontro, serão resolvidos alguns exercícios de aplicação envolvendo os números inteiros.

1. Primeiro Encontro

1.1 Assunto/ Tema: Como surgiram os números negativos?

1.2 Objetivos: utilizar os conhecimentos históricos de como surgiu o conteúdo proposto, revisar as regras de sinais e apresentar alguns exemplos.

Um pouco da história dos números negativos

A partir do renascimento, o conceito de número evoluiu muito. Cada vez mais era sentida a necessidade de um novo número para resolver os problemas do dia a dia. Discutia-se muito sobre esse número. Mas como ele não se enquadrava nos números já conhecidos, os matemáticos o chamavam de número absurdo.

Segundo os chineses da Antiguidade, os números podiam ser entendidos como excessos (que representavam como palitos vermelhos) ou faltas (que representavam como palitos pretos). Os matemáticos da Índia trabalhavam com esses “números estranhos”. O matemático Brahmagupta, nascido em 598, dizia que os números podem ser tratados como pertences ou dívidas.

Veja como os comerciantes do Renascimento faziam para representar a quantidade de feijão que tinham. Supondo que um deles tivesse, em seu armazém, duas sacas de feijão de 10 kg cada. Se esse comerciante vendesse num dia 8 kg de feijão, ele escrevia o número 8 com um tracinho na frente para não esquecer de que no saco faltavam 8 kg de feijão. Se, por algum motivo, ele resolvesse despejar os 2 kg que restaram nessa saca na segunda saca, ele escreveria, na segunda saca, dois tracinhos cruzados na frente do número 2, para que se lembrasse de que naquele saco existiam 2 kg de feijão a mais que a quantidade inicial.

Baseando-se nessa solução prática, os matemáticos encontraram uma notação para expressar um novo tipo de número: o número com sinal, que pode ser positivo ou negativo.

Fonte: Coleção contando a História da Matemática

Oscar Guelli. A invenção dos números. São Paulo: Ática, 1992. p. 55-58

Relembrando as regras de sinal:

Adição

$(+) + (+) = (+)$ somam-se os valores absolutos e permanece o sinal;

$(-) + (-) = (-)$ somam-se os valores absolutos e permanece o sinal;

$(+) + (-) =$ subtraem-se os valores absolutos e prevalece o sinal do número maior em valor absoluto. Observe que a adição é associativa!

Multiplicação

$(+) \times (+) = (+)$

$(-) \times (-) = (+)$

Na multiplicação de números com sinais iguais o sinal do resultado é positivo.

$(+) \times (-) = (-)$

$(-) \times (+) = (-)$

Na multiplicação de números sinais opostos prevalece o sinal negativo.

1.5 Questões/Dinâmica Proposta:

Números inteiros (\mathbb{Z})

O que são números inteiros?

Os números inteiros ou números inteiros relativos são formados pelos números naturais e também pelos números negativos, além do zero, que não possui sinal. Podemos representar esse conjunto numérico da seguinte forma:

$\mathbb{Z} = \{ \dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$

Alguns números inteiros negativos são: -5, -4, -3, -2, -1

Elemento neutro da adição: 0

Alguns números inteiros positivos são: 1, 2, 3, 4, 5

Os números inteiros seguem uma ordem de antecessor e sucessor na qual sem esse conceito não seria possível compará-los entre si e definir qual número é maior ou menor.

Antecessor = o prefixo ante quer dizer anterior, ou seja, o número inteiro que vem antes. É sempre um número menor do que o número dado.

Observe e reflita sobre qual é o antecessor em cada caso.

Número positivo: antecessor do número 5

6
5
3
2
1
0

Número negativo: antecessor do número -2

1
0
-1
-2

Sucessor = aquele que sucede, ou seja, está após o número. É sempre um número maior do que o número dado.

Observe e reflita quem é o sucessor em cada caso.

Número positivo: sucessor do número 2

4
2
1
0

Número negativo: sucessor do número -2

2
1
0
-2
-3

Agora observe a disposição dos colegas em relação a sua posição na sala de aula. Chamando de **direção horizontal** a direção que vai da sua esquerda para a direita e de **direção vertical** àquela que vai de trás para frente, responda:



- Quem é o seu antecessor na horizontal?
- Quem é o seu sucessor na horizontal?
- Quem é o seu antecessor na vertical?
- Quem é o seu sucessor na da vertical?

Agora vamos trabalhar o conceito de oposto. Vamos recordar o que é o oposto na língua portuguesa? Oposto quer dizer inverso, contrário ou antônimo. Vejam alguns exemplos no Quadro 1.

Quadro 1: Exemplos de opostos

		
Fácil		Difícil
		
Menina		Menino
(+) Positivo		(-) Negativo
Esquerda		Direita

Fonte: próprio autor.

O que são números opostos?

Em uma reta numérica, os números opostos estão a uma mesma distância da origem, ou seja, números opostos equidistam da origem. Um número somado com o seu oposto, sempre resulta em zero.

Vamos trabalhar com a reta e o ponto de origem na sala de aula.

Ex: Observe o Quadro 2. Na primeira coluna temos um número, na segunda coluna seu oposto e na terceira coluna uma representação desses números em relação à origem.

Quadro 2: Números Opostos e representação na reta real

Número	Número oposto	Reta
3		
0		
-1		
-2		

Logo, compreendemos que, por exemplo, o oposto de -5 é 5 e o oposto de 7 é -7.

Preste atenção em alguns casos especiais:

$-(-x)$ o sinal de $-$ na frente dos parênteses informa que utilizaremos o sinal oposto do número contido nos parênteses.

Ex: $-(-3) = 3$. Isso quer dizer que o oposto de -3 é 3.

Você sabe explicar o motivo pelo qual a multiplicação de 2 números negativos resulta em um número positivo?

Segundo um artigo da revista super interessante publicado em 30 de setembro de 1999, primeiramente vamos estudar uma propriedade do número zero.

Observe que:

$5 \times 0 = 0$, qualquer número multiplicado por zero é zero.

Agora, substitua o zero pelo número 3 mais seu oposto e observe que a sua resposta também será zero. Podemos aplicar a propriedade distributiva para obter uma expressão equivalente.

$$5 \times (3+(-3)) = 0$$

$$(5 \times 3) + (5 \times (-3)) = 0$$

Assim, $5 \times (-3)$ é o oposto de $5 \times 3=15$, pois a adição de dois números opostos é igual a zero. Por isso temos $5 \times (-3) = -15$.

Agora iremos verificar o motivo pelo qual a multiplicação de dois números negativos a resposta será positiva.

Vamos construir uma operação entre um número qualquer $2y$ e o seu oposto $-2y$.

$$2y+(-2y) = 0$$

Em vez de $2y$, podemos escrever $2 \times y$.

Se substituirmos o y por -5

$$2 \times (-5) = -10$$

Logo, com relação à parcela $(-2) \times (-5)$ teremos que verificar que a resposta será 10 positivo pois

$$2y - 2y = 0.$$

Então

$2 \times (-5) + ((-2) \times (-5)) = 0$ como sabemos que $2 \times (-5) = -10$ o número $(-2) \times (-5)$ é o seu oposto e

só poderá ser o número 10.

Atenção! Pelo que acabamos de ver, temos que $-(-3) = 3$ é equivalente à $(-1) \times (-3) = 3$.

2. Segundo Encontro

2.1 Assunto/ Tema: Trabalhando a matemática financeira com os números negativos.

2.2 Objetivos: reconhecer aplicações do conteúdo de operações com números inteiros no cotidiano.

TEMA: Operações bancárias – adição de números inteiros com sinais contrários

1. Fernanda estava com o saldo R\$ 658,00 negativo em sua conta bancária. Ela recebeu o pagamento de 2 encomendas de R\$ 350,00 cada. Qual será o novo saldo bancário de Fernanda?

TEMA: Comércio – subtração e divisão de números inteiros positivos

2. Pedro ganhou R\$ 50,00 para gastar no parque Tupã. Sabendo que na bilheteria do parque os ingressos são vendidos de 2 formas:

1 ingresso	R\$ 8,00
5 ingressos	R\$ 30,00

a) Qual é a forma em que Pedro poderá aproveitar o máximo possível do dinheiro que ele ganhou? Quanto será o troco que ele irá receber?

b) Caso Pedro optar somente pela compra individual das entradas qual será o número de entradas que ele poderá comprar? E qual será o troco que ele irá receber?

TEMA: Academia – produto de um número inteiro positivo com um inteiro negativo (+) (-)

3. A mãe da Isabela colocou a menina em uma academia de Ballet que possui a seguinte forma de pagamento:

Datas de pagamento	Valor da mensalidade
01 até 10	R\$ 95,00
11 até 30	R\$ 105,00

Assim, mensalmente ela irá pagar menos R\$ 10,00 por mês se efetuar o pagamento antes do dia 10. Qual será o valor que a mãe da Isabela economizará em 1 ano de academia pagando sempre até o dia 10 de cada mês?

TEMA: Temperatura – multiplicação de dois números inteiros negativos (-) (-)

4. Duda conheceu a Serra Gaúcha e visitou o bar gelado.

Os dados abaixo foram retirados de seu site:

UMA EXPERIÊNCIA ÚNICA

O Ice Bar de CANELA possui mais de 30 toneladas de gelo distribuídas entre, cadeiras, poltronas, balcões, sofás, algumas paredes, onde até os copos são feitos de gelo.

FRIO, MUITO FRIO!

Somos o maior e mais gelado da América latina, o único Bar de Gelo que oferece uma temperatura que pode chegar até -25°.

Fonte: [Ice Bar – Mundo Gelado \(icebarmundogelado.com.br\)](http://icebarmundogelado.com.br)

Na data da visita, os termômetros de rua marcavam uma temperatura de 19°C e a temperatura interna do ambiente (Ice Bar) é de -22°C. Qual foi a variação da temperatura sofrida por Duda quando visitou o bar gelado?

TEMA: Esportes - Subtração de números inteiros positivos

5. A Escola Crescer está fazendo um campeonato de esportes entre os alunos do turno da manhã e os dados foram divulgados conforme o quadro a seguir:

Posição	Pontos	jogos	Vitórias	Empates	derrotas	Gols pró	Gols contra	Saldo de gols
6º ano	16	9	4	4	1	15	16	-1
7º ano	20	9	6	2	1	20	13	7
8º ano	11	9	3	2	4	12	16	-4
9º ano	9	9	3	0	6	14	14	0

a) Repare que, ao efetuar os cálculos do quadro, a professora acabou esquecendo de anotarr o cálculo do saldo de gols do campeonato. Complete a coluna “Saldo de gols”.

b) Qual a equipe que possui o melhor saldo de gols? E o pior?

c) Pelas informações na tabela, descubra quantos pontos vale uma vitória e quantos pontos vale um empate

d) Supondo que uma derrota vale -2 pontos, como ficaria a pontuação das equipes?

TEMA: Temperatura – adição de números inteiros com sinais contrários

6. Um termômetro estava marcando a temperatura de 4°C às 3 horas da manhã. Cinco horas depois, a temperatura havia diminuído 4°C . Que temperatura o termômetro estava marcando às 8 horas da manhã?

Atividade de Extensão 2022/01

Apêndice B - Atividade de Extensão – Respostas e comentários para o professor

Oficina: Para que são necessárias as regras de sinais?

Responsável: Fabiane Pontes Pereira

1. Primeiro Encontro

Número positivo: antecessor do número 5

6
5
4
3
2
1
0

Número negativo: antecessor do número -2

1
0
-1
-2
-1

Número positivo: sucessor do número 2

4
3

2
1
0

Número negativo: sucessor do número -2

2
1
0
-1
-2
-3

Quadro 2: Números Opostos e representação na reta real

Número	Número oposto	Reta							
3	-3	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>-3</td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td style="color: red;">0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> </table>	-3	-2	-1	0	1	2	3
-3	-2	-1	0	1	2	3			
0	0	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td></td> <td>ZERO</td> <td></td> </tr> </table> <hr style="border: 0; border-top: 1px solid blue; margin-top: 5px;"/>		ZERO					
	ZERO								
-1	1	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>-1</td> <td style="color: red;">0</td> <td>1</td> </tr> </table> <hr style="border: 0; border-top: 1px solid blue; margin-top: 5px;"/>	-1	0	1				
-1	0	1							
-2	2	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>-2</td> <td>-1</td> <td style="color: red;">0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> </table> <hr style="border: 0; border-top: 1px solid blue; margin-top: 5px;"/>	-2	-1	0	1	2		
-2	-1	0	1	2					

Atenção!

A avaliação será efetuada através da motivação dos alunos em participar da atividade.

Na última verificação poderá existir uma dificuldade de visualização do conteúdo. Porém, futuramente o aluno começará e se familiarizará com a explicação

2. Segundo Encontro

TEMA: Operações bancárias – adição de números inteiros com sinais contrários

1. Fernanda estava com o saldo R\$ 658,00 negativo em sua conta bancária. Ela recebeu o pagamento de 2 encomendas de R\$ 350,00 cada. Qual será o novo saldo bancário de Fernanda?

Resolução:

2 encomendas de R\$ 350,00 cada representam um total positivo de $2 \times (350) = 700$.

Como o saldo de Fernanda era de R\$ -658,00 então:

$$-658 + (2 \times 350) = -658 + 700 = 42$$

O novo saldo bancário de Fernanda é R\$ 42,00 (positivo).

A questão 1 requer um raciocínio um pouco mais apurado do aluno. Esta questão é muito comum se o aluno somar os valores pelo simples fato de desconhecer que uma conta bancária poderá ter um saldo negativo.

TEMA: Comércio – subtração e divisão de números inteiros positivos

2. Pedro ganhou R\$ 50,00 para gastar no parque Tupã. Sabendo que na bilheteria do parque os ingressos são vendidos de 2 formas:

1 ingresso	R\$ 8,00
5 ingressos	R\$ 30,00

a) Qual é a forma em que Pedro poderá aproveitar o máximo possível do dinheiro que ele ganhou? Quanto será o troco que ele irá receber?

A forma de comprar os ingressos que é mais vantajosa para Pedro é a segunda, em que ele compra 5 ingressos pelo valor de R\$ 30,00. Com relação ao troco, como ele tem R\$ 50,00:

$$50 - 30 = 20$$

Pedro receberá R\$ 20,00 de troco.

Como restam R\$ 20,00, ele pode comprar mais 2 ingressos avulsos e restam ainda R\$ 4,00 de troco.

20	8
-16	2
04	

Portanto:

Com R\$ 30,00 ele comprará 5 ingressos.

Com R\$ 20,00 ele comprará 2 ingressos e irá sobrar R\$ 4,00.

Pedro poderá se divertir em 7 brinquedos e irá sobrar R\$ 4,00.

b) Caso Pedro optar somente pela compra individual das entradas qual será o número de entradas que ele poderá comprar? E qual será o troco que ele irá receber?

50	8
-48	6
02	

Pedro poderá se divertir em 6 brinquedos e sobrará R\$ 2,00 de troco.

A questão 2 está mais próxima a realidade dos alunos e o exemplo utilizado irá fazer com que eles reflitam se estão utilizando o dinheiro de forma correta. Pode causar uma certa surpresa ao comparar as duas formas de pagamento.

TEMA: Academia – produto de um número inteiro positivo com um inteiro negativo (+) (-)

3. A mãe da Isabela colocou a menina em uma academia de Ballet que possui a seguinte forma de pagamento:

Datas de pagamento	Valor da mensalidade
01 até 10	R\$ 95,00
11 até 30	R\$ 105,00

Assim, mensalmente ela irá pagar menos R\$ 10,00 por mês se efetuar o pagamento antes do dia 10. Qual será o valor que a mãe da Isabela economizará em 1 ano de academia pagando sempre até o dia 10 de cada mês?

Pagando até o dia 10, a mãe da Isabela pagará R\$ 10,00 a menos, ou seja, -10.

Considerando que um ano tem 12 meses, temos:

$$(-10) \times (12) = -120$$

Devido ao desconto de R\$ 10,00 que ela receberá, a mãe da Isabela terá uma economia de R\$ 120,00, ou seja, ela pagará R\$ 120,00 a menos em 12 meses se fizer o pagamento até o dia 10 de cada mês.

Existe outra possibilidade de efetuar essa mesma conta: R\$ 10,00 ao longo de 12 meses, totalizam R\$ 120,00, pois $(10) \times (12) = 120$. A mãe de Isabela economizará R\$ 120,00.

Através do produto de números positivos encontramos a solução do problema.

TEMA: Temperatura – multiplicação de dois números inteiros negativos (-) (-)

4. Duda conheceu a Serra Gaúcha e visitou o bar gelado.

Os dados abaixo foram retirados de seu site:

UMA EXPERIÊNCIA ÚNICA

O Ice Bar de CANELA possui mais de 30 toneladas de gelo distribuídas entre, cadeiras, poltronas, balcões, sofás, algumas paredes, onde até os copos são feitos de gelo.

FRIO, MUITO FRIO!

Somos o maior e mais gelado da América latina, o único Bar de Gelo que oferece uma temperatura que pode chegar até -25°.

Fonte: [Ice Bar - Mundo Gelado\(icebarmundogelado.com.br\)](http://Ice Bar - Mundo Gelado(icebarmundogelado.com.br))

Na data da visita, os termômetros de rua marcavam uma temperatura de 19°C e a temperatura interna do ambiente (Ice Bar) é de -22°C. Qual foi a variação da temperatura sofrida por Duda quando visitou o bar gelado?

Para explicar o resultado dessa questão, é importante fazer uma representação na reta real para justificar a variação da temperatura que foi obtida.



$$(19) - (-22) = 41$$

A variação de temperatura sofrida foi de 41°C.

A questão 4 irá causar uma certa curiosidade da variação da temperatura. Provavelmente, irão achar engraçado a grande diferença de temperatura.

TEMA: Esportes - Subtração de números inteiros positivos

5. A Escola Crescer está fazendo um campeonato de esportes entre os alunos do turno da manhã e os dados foram divulgados conforme o quadro abaixo:

Posição	Pontos	jogos	Vitórias	Empates	derrotas	Gols pró	Gols contra	Saldo de gols
6º ano	16	9	4	4	1	15	16	-1
7º ano	20	9	6	2	1	20	13	7
8º ano	11	9	3	2	4	12	16	-4
9º ano	9	9	3	0	6	14	14	0

a) Repare que, ao efetuar os cálculos do quadro, a professora acabou esquecendo de anotar o cálculo do saldo de gols do campeonato. Complete a coluna “Saldo de gols”.

Para calcular o saldo é gols devemos calcular uma subtração dos gols pró pelo saldo de gols contra.

$$6^\circ \text{ ano: } (15)-(16) = -1$$

$$7^\circ \text{ ano: } (20)-(13) = 7$$

$$8^\circ \text{ ano: } (12)-(16) = -4$$

$$9^\circ \text{ ano: } (14)-(14) = 0$$

b) Qual a equipe que possui o melhor saldo de gols? E o pior?

A equipe do 7º ano possui um melhor saldo de gols. A equipe com o pior saldo de gols foi a do 8ª ano.

c) Pelas informações na tabela, descubra quantos pontos vale uma vitória e quantos pontos vale um empate

Será pedido para os alunos deduzirem qual valor que melhor encaixe na tabela. Sendo que a vitória vale 3 pontos e o empate vale 1 ponto. Esse resultado pode ser verificado resolvendo um sistema de equações. Sendo x os pontos que valem uma vitória e y os pontos que valem um empate, temos $4x + 4y = 16$ e $6x + 2y = 20$. Assim, uma vitória vale $x = 3$ pontos e um empate vale $y = 1$ ponto.

d) Supondo que uma derrota vale -2 pontos, como ficaria a pontuação das equipes?

$$6^{\circ} \text{ ano } [(4) \times (3)] + [(1) \times (-2)] = 10 \text{ pontos}$$

$$7^{\circ} \text{ ano } [(6) \times (3)] + [(1) \times (-2)] = 16 \text{ pontos}$$

$$8^{\circ} \text{ ano } [(3) \times (3)] + [(4) \times (-2)] = 1 \text{ pontos}$$

$$9^{\circ} \text{ ano } [(3) \times (3)] + [(6) \times (-2)] = -3 \text{ pontos}$$

Observe que mesmo que as derrotas pontuando negativamente, a classificação final não foi alterada.

Na questão 5 os alunos irão estranhar o fato de que o time que mais derrotas possui no campeonato é o que tem um saldo de gols melhor do que os saldo de gols das outras duas turmas que ficaram melhor colocadas no campeonato.

TEMA: Temperatura – adição de números inteiros com sinais contrários

6. Um termômetro estava marcando a temperatura de 4°C às 3 horas da manhã. Cinco horas depois, a temperatura havia diminuído 4°C . Que temperatura o termômetro estava marcando às 8 horas da manhã?

$$(+4) + (-4) = 0$$

Para responder essa questão efetuamos uma adição de números simétricos na qual a resposta sempre será zero. Assim, às 8h da manhã a temperatura será 0°C .



Universidade Federal do Rio Grande – FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física

Curso de Licenciatura em Matemática

Av. Itália km 8 Bairro Carreiros

Rio Grande-RS CEP: 96.203-900 Fone (53)3293.5411

e-mail: imef@furg.br Site: www.imef.furg.br



Ata de Defesa de Monografia

No vigésimo quinto dia do mês de janeiro de 2023, às 17h, na sala 2113 do pavilhão 2, foi realizada a defesa do Trabalho de Conclusão de Curso da acadêmica **Fabiane Pontes Pereira** intitulada **UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA PARA AUXILIAR NO ENSINO E APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS**, sob orientação da Profa. Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti – IMEF/FURG. A banca avaliadora foi composta pela Profa. Dra. Celiane Costa Machado – IMEF/FURG e pelo Prof. Dr. Rodrigo Barbosa Soares – IMEF/FURG. A candidata foi: () aprovada por unanimidade; () aprovada somente após satisfazer as exigências que constam na folha de modificações, no prazo fixado pela banca; () reprovada. Na forma regulamentar, foi lavrada a presente ata, que é abaixo assinada pelos membros da banca na ordem acima relacionada.

Cinthya M. S. Meneghetti

Profa. Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Orientadora

Celiane Costa Machado

Profa. Dra. Celiane Costa Machado

RODRIGO SOARES

Prof. Dr. Rodrigo Barbosa Soares