

Projeto de Trabalho de Conclusão de Curso

**Propriedades interessantes da Função Quadrática e Equação do  
Segundo Grau**

Kanandra Garcia Teixeira  
Rio Grande, Abril de 2021

Kanandra Garcia Teixeira

## **Propriedades interessantes da Função Quadrática e Equação do Segundo Grau**

Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura em Matemática, requisito para conclusão da disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso II junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG  
Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF  
Curso de Licenciatura em Matemática

Orientadora: Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

## **Resumo**

Este trabalho de conclusão do curso de Matemática Licenciatura é constituído de uma pesquisa e proposta de intervenção didática sobre Equação do Segundo Grau e Função Quadrática. A proposta é dividida em cinco horas/aula e inicia com a definição dos conceitos envolvidos, em seguida apresenta um pouco da história da matemática e alguns exemplos de situações cotidianas nas quais precisamos resolver uma Equação do Segundo Grau para solucioná-las. Apresentamos para os alunos como determinar uma raiz positiva utilizando um método geométrico de resolução de Equação do Segundo Grau e, por fim, apresentaremos o Teorema de Etienne.

Palavras-chave: Função Quadrática; Equação do Segundo Grau; História da Matemática; Ensino Básico.

## Sumário

Introdução.....	1
1 Objetivos.....	3
2 Revisão Bibliográfica.....	4
3 Metodologia.....	7
4 Caracterização da proposta.....	9
5 Considerações Finais.....	18
Referências.....	19
Apêndice – Material do Aluno.....	21
Assunto: História da Equação do Segundo Grau e Função Quadrática.....	22
Assunto: Equação do Segundo Grau.....	23
Assunto: Método geométrico para descobrir as raízes de uma Equação do Segundo Grau.....	24
Assunto: Teorema de Etiene.....	25
Assunto: Discutir as atividades que foram realizadas e avaliar a proposta do ponto de vista dos estudantes.....	25

## Introdução

Ao longo do curso de Matemática Licenciatura percebi que, constantemente, sentia dificuldade em reconhecer a diferença entre Equação do Segundo Grau e Função Quadrática. Sendo assim, escolhi este tema para o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) a fim de auxiliar outros estudantes, que também possuem a mesma dificuldade em diferenciar os dois conceitos mencionados e professores que desejam trabalhar esse tema.

Proponho trazer um pouco da história da Equação do Segundo Grau, como seus métodos de resolução foram evoluindo com o passar dos anos e quantas pessoas, de diferentes nacionalidades, se envolveram para pesquisa da mesma, pois penso que é importante os alunos conhecerem um pouco da história daquilo que estão aprendendo. Uma experiência com a história da matemática pode ser consultada em (BISSI, 2014) em que o autor afirma que a mesma pode trazer muitos resultados positivos.

Como parte do trabalho, proponho uma atividade sobre o tema Equação do Segundo Grau e Função Quadrática. Na atividade, são apresentados exemplos nos quais a equação pode ser aplicada em uma situação cotidiana. Assim como gravamos uma imagem boa dos nossos professores e levamos para vida, também lembramos da experiências que não foram tão exitosas. Nesse sentido, para que façamos diferente com nossos alunos, gostaria de proporcionar exemplos positivos, para que os meus futuros alunos tenham experiências boas e, quem sabe, conseguir mudar a visão de alguns deles sobre a resolução da Equação do Segundo Grau e Função Quadrática.

Em toda a minha experiência como estudante na Escola Básica, não recordo se resolvi um exercício de Equação do Segundo Grau no qual meu professor relacionou a equação com um fato da realidade. Eu amava desenvolver os cálculos, por isso não dei tanta importância. Hoje, como professora em formação, penso que seria muito mais prazeroso aprender se eu tivesse um exemplo do sentido que este conteúdo poderia ter na vida. Mesmo sabendo realizar os cálculos, se eu reconhecesse em alguma situação cotidiana uma Equação do Segundo Grau naquela época, eu possivelmente não saberia deduzi-la, pois a forma com a qual eu aprendi foi muito abstrata, sendo apenas dada a equação para que eu resolvesse, sem nunca ter a oportunidade de usá-la na prática.

Sendo assim, pensando nas pessoas que não gostam da Matemática ou que já tem alguma dificuldade com ela, por meio de uma abordagem sem nenhuma relação com o dia

a dia, fica difícil de conseguir novos fãs para a nossa tão querida Matemática. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) nos fala sobre isso:

... por isso, as situações propostas devem ter significados real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades no dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade mais ampla e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p.535.)

O método geométrico de resolução de uma Equação do Segundo Grau (GUELLI, 1995) que encontra uma raiz positiva da equação é relevante para ser apresentado para os alunos, pois eles podem ter uma melhor visualização do processo, inclusive é possível fazer recortes de retângulos e colagem para visualizar mais facilmente a resolução de uma Equação do Segundo Grau. Esse método também poderia ser pensado para pessoas com perda de visão, pois a resolução pode ser feita de modo palpável. Além disso, o método é uma curiosidade de como o muçulmano Al- khowarizmi resolvia tais equações. Com isso, gostaria de promover uma discussão com os estudantes sobre o fato de que a Equação do Segundo Grau foi estudada por muitos anos e por várias pessoas, para chegarmos a mais usada fórmula de Bháskara nos dias de hoje.

Na atividade proposta, é apresentado e discutido o Teorema de Etienne, que traz uma técnica que pode facilitar o esboço um gráfico da Função Quadrática. Esse Teorema foi enunciado em 2018 pela estudante Camille Etienne, aluna do Instituto Federal Fluminense (IFF) em Bom Jesus do Itabapoana (G1, 2018). Além de ajudar a esboçar o gráfico, o Teorema pode motivar os alunos a aprender matemática, uma vez que a autora do Teorema era estudante do Ensino Médio.

Como parte da sequência didática, um diário de aprendizagem será construído. Os alunos deverão, ao final de cada aula, escrever sobre suas experiências e fatos que consideram importante e que tenham sido discutidos durante as atividades.

No Capítulo 1 serão apresentados os objetivos desse trabalho, no Capítulo 2 uma Revisão Bibliográfica sobre o tema, no Capítulo 3 a metodologia proposta para o desenvolvimento das atividades. No Capítulo 4, está descrita a caracterização da proposta. No Capítulo 5, as Considerações Finais. No Apêndice está a versão para impressão das atividades propostas para que possam ser utilizadas pelo professor e disponibilizadas para os alunos.

Com esse trabalho desejamos fazer diferença para um grupo de alunos, uma diferença que tenha o poder de mudar a percepção negativa que alguns alunos tem dos conteúdos de Equação do Segundo Grau e Função Quadrática. Assim, naqueles que tiverem contato com a atividade, quem sabe, desperte um interesse maior para a Matemática.

## 1 Objetivos

O objetivo geral do trabalho é, por meio de definições e curiosidades históricas, descrever a diferença entre Equação do Segundo Grau e Função Quadrática.

Os objetivos específicos são:

- propor problemas que envolvem a Função Quadrática e Equação do Segundo Grau a Nível de Ensino Médio;
- incluir a História da Matemática como possibilidade de metodologia a ser explorada durante as aulas de matemática;
- influenciar outros professores a procurar sempre novidades que possam contribuir para sua aula e aprendizagem dos alunos;
- exemplificar situações da vida real em que a Equação do Segundo Grau é utilizada;
- aprofundar os conhecimentos do tema do trabalho por meio de curiosidades e fatos históricos;
- estudar o método geométrico para determinar as raízes de uma Equação do Segundo Grau;
- conhecer e estudar o Teorema de Etienne.

## 2 Revisão Bibliográfica

A fim de esclarecer a diferença entre equação e função, enunciamos as suas definições. Conforme o Dicionário Aulete (AULETE, 1881) o significado de equação é “sentença matemática de igualdade condicional entre expressões, na qual ao menos uma delas contém no mínimo um termo variável”. Segundo o site Brasil Escola (SILVA, 2020) uma equação “trata-se de uma expressão algébrica munida de uma igualdade: relação que permite encontrar os resultados da equação”.

Em geral, identificamos a variável de uma equação pela letra  $x$ . Na equação do segundo grau, a variável  $x$ , apenas precisa satisfazer a igualdade e o seu maior expoente é 2. Para ilustrar esse fato, veja o Exemplo 1.

Exemplo 1. Na equação  $x^2 + 5 = 0$ , precisamos apenas encontrar o valor de  $x$  que, elevado ao quadrado e somado com a constante 5, terá como resultado o número 0.

É importante enfatizar que as variáveis ou incógnitas são os números fixos da equação e a quantidade de resultados (números reais) que cabem nessa incógnita é menor ou igual ao grau da equação.

Já em uma função, a variável  $x$ , pode assumir qualquer número, desde que ele esteja dentro do domínio da função. O valor que ele pode receber não é fixo como nas equações: esta é uma diferença importante entre equação e função. No Exemplo 2, apresentamos um exemplo de Função Quadrática.

Exemplo 2. A função  $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$  é uma função quadrática cujo domínio e o contradomínio é o conjunto dos Números Reais.

No oitavo ano do Ensino Fundamental é a primeira vez que a Equação do Segundo Grau aparece na BNCC em uma das habilidades a serem trabalhadas com os estudantes. Segundo o documento, a habilidade EF08MA09 requerida é “Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo  $ax^2=b$ ” (BRASIL, 2018, p.313).

Com relação ao conteúdo de Função Quadrática, este aparece somente no Ensino

Médio, conforme Brasil (2018). Sobre esse conteúdo, a habilidade EM13MAT402 que desejamos construir com o estudante é

Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. (BRASIL, 2018, p.53)

Para auxiliar o desenvolvimento dessa habilidade de conversão, utilizaremos o Teorema de Etienne na atividade proposta para os alunos. Mais adiante, veremos como o Teorema auxilia no esboço do gráfico da Função Quadrática.

A história da Equação do Segundo Grau e Função Quadrática é de extrema importância para os alunos. No trabalho de Bissi (2014), na obra “As potencialidades pedagógicas da História da Matemática - Uma abordagem com alunos da 8ª série”, o autor faz uma aposta grande usando a história para cativar os alunos e a conclusão do autor é a defesa do uso da História da matemática de forma sistemática, pois segundo ele os resultados obtidos são muito positivos.

A história da Matemática pode dar significado aos conteúdos matemáticos que hoje podem ser desprezados por alguns alunos.

A utilização da História em sala de aula também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos. É importante, porém, que esse recurso não fique limitado à descrição de fatos ocorridos no passado ou a apresentação de biografias de matemáticos famosos. A recuperação do processo histórico de construção do conhecimento pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos de conhecimento que vão entrar na relação didática. (BRASIL, 2006, p.86)

A história da Matemática é apresentada neste trabalho trazendo detalhes da evolução da resolução da Equação do Segundo Grau com a ajuda de grandes matemáticos ao decorrer de muitos anos, pois acreditamos que os alunos irão gostar de discutir sobre essa evolução e apresentar alguns dos métodos de solução utilizados. Eves (2004) nos fala do papiro de Rhind (1950 a.C), uma vez que são poucos registros de Equações de Segundo Grau na civilização Egípcia, mas neste papiro foi encontrado a primeira resolução de uma Equação de Segundo Grau.

Boyer (2010) nos conta que a Mesopotâmia era desenvolvida na escrita cuneiforme, por isso há mais registros que sobreviveram ao tempo. Os gregos eram adiantados na

Matemática e de lá surgiu “Os Elementos de Geometria, de Euclides”, obra de Euclides que descreve alguns problemas que envolvem Equações do Segundo Grau.

Na Índia nasceu o famoso Bhaskara Akaria (1114-1185), que com a ajuda de outros dois matemáticos conseguiu deduzir uma fórmula geral para resolver uma Equação do Segundo Grau. O Árabe Al-Khowarizmi escreveu uma obra chamada “Tratado sobre Cálculo”, esta obra contém alguns problemas envolvendo Equação do Segundo Grau. Guelli (1995) nos conta que na China eram realizadas aproximações sucessivas para encontrar raízes das Equações do Segundo Grau. Este método é nomeado como método de fan-fan, e apresenta apenas uma raiz positiva. Na Europa, François Viète, foi o primeiro a representar as incógnitas e variáveis por uma vogal e René Descartes aperfeiçoou a representação de símbolos já feita por Viète. Em Pedroso (2010), é possível estudar o método que Viète usava para resolução dessas equações.

Ao apresentar o método para encontrar uma raiz de uma Equação do Segundo Grau de forma geométrica para os alunos, espero motivá-los, pois além de ser uma informação curiosa, também é um método mais palpável de resolução, que inclusive pode ser adaptado para alunos com perda da visão (GUELLI, 1995).

Com relação ao ensino da Função Quadrática, pensando em como motivar os estudantes ao estudo e fazendo a pesquisa sobre os temas abordados nesse trabalho, na Revista do Professor de Matemática (RPM) foi possível encontrar em um desses artigos (MUNIZ, 2019) o Teorema de Etiene. Com o Teorema, temos uma estratégia que pode facilitar o esboço o gráfico da Função Quadrática. Esse Teorema não foi descoberto por um Matemático há muitos anos, mas sim por uma aluna em uma aula normal de Matemática. O artigo é narrado pelo professor do Ensino Básico Leonardo de Oliveira Muniz, que conta exatamente o que aconteceu em sua aula enquanto esboçava junto com os alunos o gráfico da Função Quadrática.

No próximo capítulo, será apresentada a metodologia da proposta de intervenção didática que foi construída ao longo da disciplina de Atividade de Extensão e faz parte do estudo e desenvolvimento desse trabalho de Conclusão.

Ao final das aulas os alunos serão convidados a escrever em um diário de aprendizagem sobre a aula ministrada.

### 3 Metodologia

Para iniciar o desenvolvimento do trabalho, primeiro estudaremos um pouco da História da Equação do Segundo Grau. Para contar um pouco da evolução da Equação do Segundo Grau, serão apresentadas as fases mais importantes da história que relatam descobertas que contribuíram para que chegássemos a tudo o que sabemos hoje sobre esta equação. Como por exemplo, o Papiro de Rhind (EVES, 2004), a matemática da Mesopotâmia (BOYER, 2010), e ainda o trabalho de Euclides (PEDROSO, 2010). Ao final de cada aula os alunos serão convidados a escrever em um diário de aprendizagem e ao final da sequência didática será proposto um *QUIZ* com os alunos sobre fatos históricos.

Antes do término de cada aula, sugerimos que seja feito um diário de aprendizagem, onde os alunos serão convidados a escrever sobre a aula de cada dia, inspirados na ideia de Bissi (2014). Esse diário pode ser utilizado como forma de avaliação durante o desenvolvimento dessa proposta.

Com relação à Função Quadrática, além das principais propriedades usualmente estudadas, apresentaremos o Teorema de Etiene, o qual diz que somando as raízes de uma função quadrática encontramos o ponto simétrico ao eixo de simetria da parábola. Estudaremos aplicações desse Teorema em exercícios aplicados ao Ensino Médio.

Começaremos a atividade contando um pouco a história da Equação do Segundo Grau e definindo com os alunos a diferença entre Equação do Segundo Grau e Função Quadrática. Após, discutiremos situações nas quais os alunos precisariam resolver a Equação do Segundo Grau no dia a dia, pois acreditamos que muitos têm dificuldade em relacionar a equação com situações cotidianas. Alguns exemplos de aplicação podem ser vistos em Feitosa (2014).

Na atividade proposta, também está o método para encontrar uma raiz da equação do Segundo Grau de forma geométrica (GUELLI, 1995). Após, será feito uso da fórmula de Bháskara, encontrando raízes da Função Quadrática. Dando continuidade, é estudado o Teorema de Etiene para a construção do gráfico, fazendo a observância da concavidade da parábola. Em seguida, tendo feito o eixo de simetria e a intersecção da parábola com o eixo das ordenadas, os alunos encontrarão o ponto simétrico da expressão em relação ao eixo de simetria da parábola.

A avaliação é feita ao final de todas as aulas ministradas, são sugeridas perguntas

sobre toda a oficina e também o recolhimento do gráfico esboçado pelos alunos utilizando o Teorema de Etiene.

A aplicação desta atividade poderá ser realizada na volta as aulas, pois seu palnejamento foi pensado para o ensino presencial. Para aplicá-la de forma remota é necessário que o professor faça as adaptações que achar necessárias. O ensino remoto é um grande desafio, como nos falam os autores Basso, Costa e Fioratti (2020),

A disciplina de Matemática fazendo parte de todos os repertórios de avaliação internacionais e nacionais, com suas pontuais finalidades, depara-se com formas tradicionais, quase “sacralizadas” de ensinar, e a necessidade de encaminhar atividades de forma remota, fazendo emergir as teorias críticas e pós modernas de concepção curricular na matemática. (BASSO e COSTA e FIORATTI, 2020, pág. 20).

Sugestões de adaptações fogem aos objetivos desse trabalho, porém a utilização de vídeos e áudios para compreensão de cada etapa é uma alternativa que pode ser utilizada.

A seguir, apresentamos a caracterização da proposta.

## 4 Caracterização da proposta

A atividade proposta está prevista para cinco períodos de quarenta e cinco minutos, cada período contém um objetivo indicado em sua descrição. Os períodos serão apresentados com a indicação de sua ordem e sua realização deve respeitá-la.

### 4.1 Primeiro período.

4.1.1 Tema: História da Equação do Segundo Grau e Função Quadrática.

4.1.2 Objetivo: aprofundar os conhecimentos da Função Quadrática e Equação do Segundo Grau por meio de curiosidades e fatos históricos.

4.1.3 Dicas para o professor e possível dinâmica: este primeiro momento é necessário para contextualizar os conteúdos e despertar nos estudantes a vontade de saber mais sobre a Equação do Segundo Grau e da Função Quadrática. Você pode ler livros como:

- Oscar Guelli (Contando a história da Matemática 3) de 1993, segunda edição. São Paulo, editora: Ática. Encontra-se na livraria Saraiva, livraria Mania de Cultura, entre outras;
- Howard Eves (Introdução à história da Matemática) de 2004. São Paulo, editora da Unicamp. Disponível online no link: <https://www.amazon.com.br/Introdu%C3%A3o-Hist%C3%B3ria-Matem%C3%A1tica-HOWARD-EVES/dp/8526806572>;
- Carl Boyer (História da Matemática) de 2010, terceira edição. São Paulo, editora Edgard Blucher, disponível na Amazon, na Estande Virtual, entre outros;
- Hermes Pedroso (Uma breve história da equação do 2º grau) de 2010. Revista eletrônica da Matemática, volume 2. Pág: 2 e 3. Disponível para Download em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/122614>.

Sugerimos que o professor discuta com os alunos os principais fatos relatados nas bibliografias supracitadas. Além disso, pode ser feita uma dinâmica de conversação sobre a história e perguntas como:

- ✓ Você imaginava que a equação era usada há tantos anos atrás?
- ✓ Você conhece outro jeito para resolver uma Equação do Segundo grau que não seja usando a Fórmula de Bhaskara?

Outras perguntas também são bem vindas durante a discussão. Uma sugestão de texto para iniciar a discussão, está disponível no material do aluno, no apêndice desse trabalho.

Como desafio, é possível propor a resolução de um problema. Uma das principais aparições das Equações do Segundo Grau na civilização babilônica pode ser encontrada no problema a seguir: “Pede-se o lado de um quadrado sabendo que a diferença entre a área desse quadrado e seu lado é o número 870 (BOYER, 2010). Usando as notações atuais, o problema equivale a resolver esta Equação do Segundo Grau  $x^2-x=870$ .

Após a resolução com a notação atual, discutir o procedimento realizado pelos escribas nas tabuletas, que é o seguinte:

Passo 1: Tome a metade de 1 (coeficiente de x).....(1/2)=0,5  
 Passo 2: Multiplique por ela mesma.....(0,5 x 0,5= 0,25)  
 Passo 3: Some o resultado a 870 (termo independente).....870,25  
 Passo 4: Obtém-se um quadrado.....870,25=(29,5)<sup>2</sup>  
 Passo 5: Cujo lado somando a metade de 1 vai dar 30, o lado do quadrado procurado. (PEDROSO, 2010, p.3)

Então será realizado o *QUIZ* online com os alunos. Um link com a sugestão de perguntas pode ser encontrada no Apêndice desse trabalho, porém o ideal é que cada professor elabore o seu próprio questionário para ter acesso às respostas.

Neste momento, os alunos serão convidados a escrever sobre o que acharam da aula em no seu diário de aprendizagem. Essa escrita pode ser utilizada como forma de avaliação dos estudantes.

## 4.2 Segundo período

4.2.1 Tema: investigação de saberes e exemplos envolvendo o cotidiano.

4.2.2 Objetivo: estudar exemplos de aplicação em que a Equação do segundo Grau e Função Quadrática são utilizados.

4.2.3 Dicas para o professor e possível dinâmica

Algumas perguntas para nortear a discussão:

✓ Qual é a diferença entre Equação do Segundo Grau e Função Quadrática?

- ✓ Dê um exemplo de Equação do Segundo Grau.
- ✓ O que significa “x” no exemplo estudado na aula anterior?
- ✓ Como se encontra o valor do “x” em uma Equação do Segundo Grau?

Este momento é importante para que o professor complemente a história que já foi contada, assim dando exemplos mais próximos da realidade dos alunos, onde eles poderão ter que fazer uso deste conhecimento. A seguir, seguem dois exemplos sugeridos.

**Exemplo de Aplicação da Equação do Segundo Grau (FEITOSA, 2014):**

Um fazendeiro tinha um terreno retangular que media 26 m de comprimento e 16 m de largura. Tal fazendeiro fez uma compra que acrescenta uma faixa aos fundos do terreno e em uma de suas laterais como mostra a Figura 1 de mesma largura. Com essa expansão do terreno, a nova área medirá 816 m<sup>2</sup>. Qual será a largura dessas faixas?

Figura 1 – Esboço do terreno



Fonte: Próprio autor.

*Resolução:*

O novo terreno que estamos tentando descobrir o tamanho terá as dimensões:

Comprimento =  $26+x$ ,

Largura =  $16+x$ ,

Área= 816 m<sup>2</sup>.

Multiplicando o comprimento pela largura ele terá a nova área:  $(26+x)(16+x)=816$ .

Então, aplicando a propriedade distributiva, temos:

$26(16+x)+x(16+x)=816$ ,

$$416+26x+16x+x^2=816.$$

Agrupando os termos semelhantes:  $x^2+42x-400=0$ .

Utilizando a fórmula de Bhaskara obtemos  $x'=8$  e  $x''=-50$ , onde  $x''$  é desconsiderado nesse problema, pois o terreno não pode ter medidas negativas.

Depois disso, podemos afirmar que a faixa será de 8 metros, o terreno ficará um retângulo com comprimento 34 m ( $26\text{ m}+8\text{ m}$ ) e largura 24 m ( $16\text{ m}+8\text{ m}$ ).

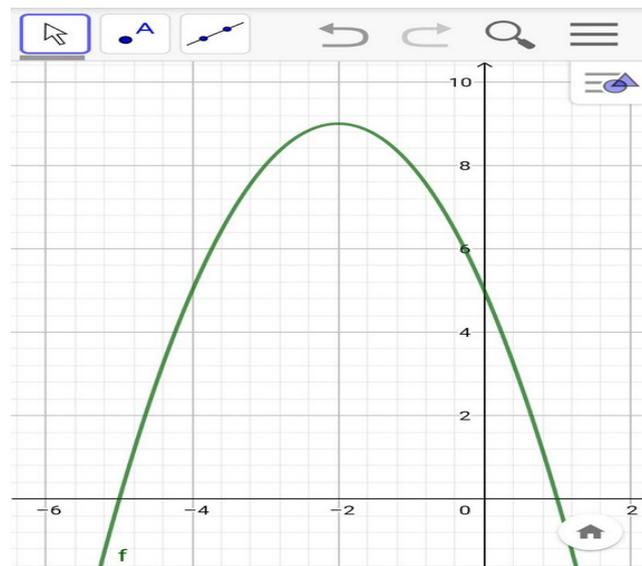
Para conferir a área do terreno basta multiplicar  $34 \times 24 = 816\text{ m}^2$ .

### Exemplo de aplicação de Função Quadrática

Em um jogo de vôlei João tocou a bola por cima da rede para Bruna. Este movimento é descrito pela função a seguir:  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -x^2 - 4x + 5$ .

- Qual o Domínio da função  $f$ ? Por que não definimos o domínio como  $\mathbb{R}$ ?
- Qual o formato do gráfico dessa função, isto é, do movimento que a bola faz ao ser lançada verticalmente para cima? Faça um esboço.
- A bola alcançou quantos metros de altura?

Figura 2 – Movimento da bola



Fonte: Próprio autor.

*Resolução:*

- O domínio da função nesse caso, se refere ao tempo e é todo o conjunto dos números reais positivos. Não definimos o domínio como todo o conjunto dos números reais, porque não faz sentido colocar valores negativos para o tempo.

b) O formato do gráfico é de uma parábola. Veja o gráfico do movimento na Figura 2.

c) Na expressão acima os coeficientes são,  $a=-1$ ,  $b=-4$  e  $c=5$ .

Utilizaremos a lei da função para calcular a coordenada  $y$  do vértice ( $y_v$ ) para obter a altura máxima atingida pelo objeto:

$$y_v = -\Delta \div 4a = (-b^2 - 4ac) \div 4a = -16 - [4(-1)5] \div 4(-1) = -36 \div (-4) = 9 \text{ metros.}$$

O objeto atingiu a altura máxima de 9 metros.

A ideia é que esses exemplos de Equação do Segundo Grau e Função Quadrática estejam próximos ao cotidiano do estudante, mas conforme a realidade da classe que está sendo aplicada essa sequência didática o que o professor precisa levar em conta a possível escolha de outros exemplos. Assim, pretende-se inserir a Equação do Segundo Grau e Função Quadrática nas situações que façam sentido para os estudantes. O professor pode adaptar “terreno” para “quadra de esportes” ou ainda “bola de vôlei” para “bola de futebol”.

Em seguida chega o momento do diário de aprendizagem. Convide os estudantes para escreverem um parágrafo sobre o assunto da aula e o que cada um compreendeu. O exercício da escrita permite que organizem suas ideias e esclareçam a diferença entre equação e função.

### 4.3 Terceiro período

4.3.1 Tema: Método geométrico para descobrir as raízes de uma Equação do Segundo Grau.

4.3.2 Objetivo: Encontrar as raízes da Equação do Segundo Grau pelo método geométrico.

4.3.3 Dicas para o professor e possível dinâmica

Este método de determinar raízes de uma Equação do Segundo Grau é menos abstrato do que o método de Bhaskara, podendo também ser pensado o uso para estudantes cegos ou com baixa visão. Além disso, podem ser feitas adaptações com material concreto.

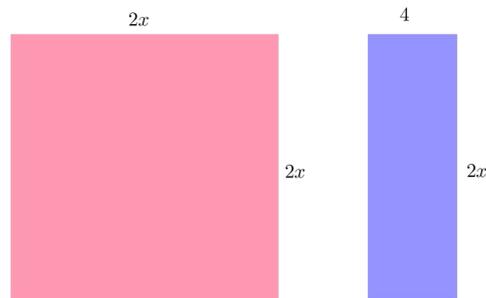
Essa dinâmica pode iniciar com o professor questionando os estudantes, se eles gostariam de encontrar raízes de uma forma diferente, se eles acham que vai ser mais fácil do que o método que conhecem.

Vamos começar resolvendo a equação  $2x^2+8x+2=0$  pelo método geométrico. Recomenda-se resolver junto com os alunos, que devem ir anotando os passos da resolução. Para começar, iremos multiplicar a expressão por 2 transformando em um trinômio quadrado perfeito.

Temos então,  $4x^2+16x+4=0$ .

Extraindo a raiz de  $4x^2$ , temos o termo  $2x$  (desprezando  $-2x$ , pois nesse momento consideramos apenas raízes positivas) que vai ser transformado em um quadrado (veja a Figura 3).

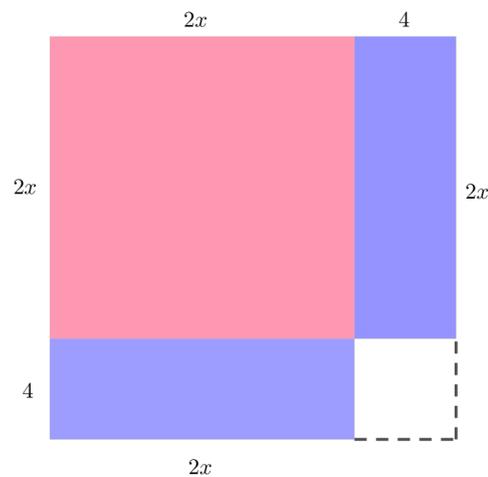
Figura 3 - Quadrado de lado  $2x$  e retângulo de lados  $2x$  e  $4$ .



Fonte: Próprio autor.

O termo  $16x$  é separado em dois retângulos congruentes de lado  $2x$  e  $4$ . Se unirmos o quadrado de lado  $2x$  com os dois retângulos, vemos que para encontrar um quadrado perfeito precisamos de um quadrado menor de lado  $4$  e área  $16$ . Vejamos a Figura 4:

Figura 4 – Quadrado de lado  $2x+4$



Fonte: Próprio autor.

Para descobrir o número que somaremos aos dois membros da equação para gerar um trinômio quadrado perfeito, basta fazer uma subtração entre a área do quadrado menor e o termo independente. Assim,  $16 - 4 = 12$ . Somando 12 aos membros da equação, encontramos um trinômio quadrado perfeito:  $4x^2 + 16x + 16 = 12$ .

Fatoramos o trinômio:  $(2x+4)^2 = 12$

Extraímos a raiz dos membros da equação:  $2x+4 = \pm \sqrt{12}$

Isolamos o elemento  $x$  dividindo ambos os membros por 2:  $x = (-4 \pm 2\sqrt{3}) \div 2$

As raízes da equação são:  $x' = -\sqrt{3}-2$  e  $x'' = \sqrt{3}-2$ .

Após esse exemplo o professor pode pedir que os alunos resolvam a seguinte Equação do Segundo Grau (usando o mesmo método):  $x^2 + 8x - 48 = 0$ .

Nessa hora é importante a interação com os alunos para ver o que eles estão achando, se estão com dificuldade ou não. Após um tempo para eles pensarem e resolverem, seria interessante o professor conduzir a discussão e resolução no quadro chamando alguns alunos que se prontificarem para resolver partes da equação.

O professor pode fazer também uma discussão com os estudantes, sobre se o coeficiente principal da equação for negativo pode-se fazer alguma adaptação ou o método não pode ser aplicado. Depois de um tempo o professor pode concluir que este método não pode ser usado para coeficientes de  $x^2$  e  $x$  negativos. Uma discussão sobre isso pode ser introduzida na turma.

Para finalizar o período, temos momento destinado para os alunos escreverem no diário de aprendizagem.

#### 4.4 Quarto período

4.4.1 Tema: Teorema de Etienne.

4.4.2 Objetivos: estudar o Teorema de Etienne.

Com relação à BNCC, a Habilidade EM13MAT402 “Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano”.

4.4.3 Dicas para o professor e possível dinâmica

O Teorema de Etienne (MUNIZ, 2019) foi criado por uma aluna na sala de aula, o qual diz que somando as raízes  $x'$  e  $x''$  encontradas de uma função quadrática obtemos a primeira coordenada do ponto P, que é o simétrico do ponto de intersecção da parábola com o eixo  $y$

(ponto  $(0,c)$ ), em relação ao eixo de simetria da parábola. Assim, temos um modo mais fácil para a construção do gráfico da função quadrática que pode interessar os estudantes.

Iniciar a aula resolvendo o exercício:

1) Considere a Função Quadrática de domínio  $\mathbb{R}$ , contradomínio  $\mathbb{R}$ , ou seja,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por:  $f(x)=3x^2-3x-6$ .

a) Qual a concavidade da parábola?

*Resolução:* A parábola tem concavidade voltada para cima, pois o coeficiente principal  $a=3$  é positivo.

b) Encontre as raízes dessa função.

*Resolução:* As raízes são  $x'=-1$  e  $x''=-4$ .

c) Encontre as coordenadas do vértice do gráfico de  $f$ .

*Resolução:* As coordenadas são  $(-5/2, -9/4)$

d) Trace o eixo de simetria da parábola.

*Resolução:* O eixo de simetria é a reta  $x=-5/2$ .

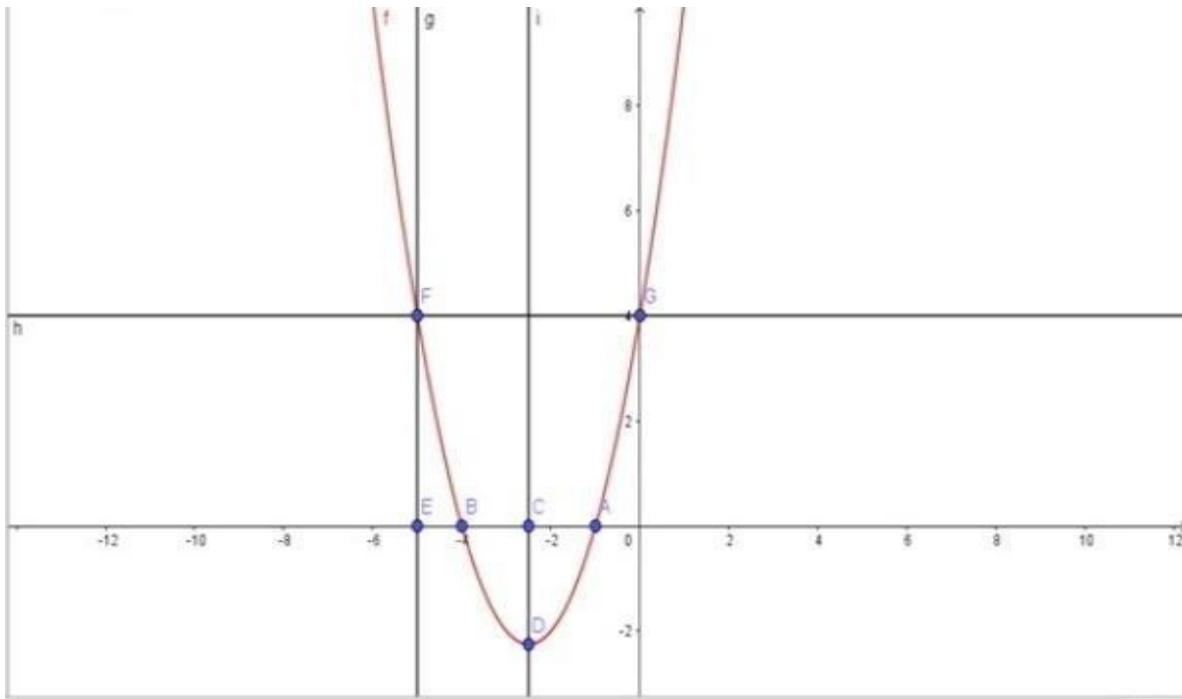
e) Obtenha a intersecção da parábola com o eixo das ordenadas.

*Resolução:* A parábola intercepta o eixo  $y$  no ponto  $(0,4)$ .

f) Esboce o gráfico de  $f$ .

*Resolução:* Veja a Figura 5.

Nesse momento através da Revista do professor de Matemática (RPM), 2º quadrimestre de 2019, paginas 32 e 33 explicar o Teorema de Etienne, começando a contar a história de quem descobriu e onde foi. Contar para os estudantes que foi uma aluna quem descobriu esse método e depois pedir para que encontrem o ponto  $F$ , simétrico ao ponto  $(0,4)$ , fazendo uso do teorema que neste caso fazendo a soma das raízes  $-1+(-4)=-5$ , e assim fica o ponto  $F(-5,4)$ . Assim chegamos ao gráfico da Figura 5.

Figura 5 - Gráfico da  $f(x) = x^2 + 5x + 4$ 

Fonte: Próprio autor.

Após esse momento o professor pode passar um exercício pra que os alunos possam resolver sozinhos fazendo uso do Teorema de Etienne.

Uma sugestão é repetir os passos do exercício anterior para seguinte Função quadrática de domínio:  $\mathbb{R}$ , contradomínio:  $\mathbb{R}$ , ou seja,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$ .

Em seguida, os alunos são convidados a escrever no diário de aprendizagem sobre a aula.

#### 4.5 Quinto período

4.5.1 Tema: debater sobre as atividades que foram realizadas e avaliar a proposta do ponto de vista dos estudantes.

4.5.2 Objetivo: discutir a atividade e receber as opiniões dos estudantes.

4.5.3 Dicas para o professor e possível dinâmica

Este período é destinado para conversar com os alunos sobre o que eles acharam das atividades propostas, o que mais gostaram, o que já sabiam, o que mudou na perspectiva matemática deles, enfim, obter um retorno da atividade.

Algumas sugestões de perguntas que podem ser feitas aos alunos e recolhidas ao final da atividade de discussão.

- Qual a diferença entre Equação do Segundo Grau e Função Quadrática?
- O que você achou da história da Equação do Segundo Grau? Já conhecia? Cite um fato que lhe chamou mais atenção nas discussões feitas em aula.
- Sobre os problemas que foram apresentados que exemplificaram que a Equação do Segundo Grau e a Função Quadrática podem ser usadas no dia a dia: você sabia que poderia aplicá-las em situações cotidianas?
- Na sua opinião, quais as vantagens de utilizar o método geométrico em relação ao que utiliza a fórmula de Bháskara?
- Sobre o Teorema de Etiene, você acha que com ele foi mais fácil o esboço do gráfico da Função Quadrática?

## 5 Considerações Finais

Durante a escrita desse trabalho aprendi muito ao pensar no melhor modo de levar a proposta aos alunos, tive que acrescentar algumas alternativas, pois em meio a escrita surgiu o ensino remoto. Acrescentei outros métodos de encontrar as raízes da Equação do Segundo Grau, sempre pensando em levar métodos de resolução curiosos para os alunos.

Com a atividade proposta, espero motivar e estimular o interesse dos alunos para a Matemática. Por meio da história, despertar sua curiosidade de aprender sobre os conteúdos tratados e que a forma geométrica de resolução da Equação do Segundo Grau possa ser interessante para alguns alunos que tem dificuldade em realizar cálculos mais abstratos, sendo associado ao cálculo da área de um quadrado. Espero que ao final da proposta, todos entendam a diferença da Equação do Segundo Grau e a Função Quadrática, que saibam usar tais conteúdos em situações no dia a dia e que consigam utilizar o Teorema de Etiene, tanto para inspirá- los com a história dela, quanto para que possa facilitar o esboço do Gráfico de uma Função Quadrática.

Com o diário de aprendizagem em que os alunos escreverão suas ideias a partir de cada uma das aulas, os estudantes poderão exercitar também a escrita nas aulas de matemática e com isso registrar o que acharam de mais importante ao longo da atividade. Ao escrever é possível organizar melhor suas ideias e a forma que elas são comunicadas.

Pretendo também através deste trabalho motivar meus colegas a fazerem pesquisas com o intuito de facilitar a aprendizagem dos alunos, pois se na nossa formação somos influenciados a procurar o melhor para levar para sala de aula, através de pesquisas, saberes diferentes, fica bem mais fácil fazer isso na prática depois de professores formados. Além disso, espero inspirar a mudança daquele professor que já está repetindo o mesmo plano de aula há anos, sem nunca fazer novas pesquisas para levar para seus alunos. Assim, através dos resultados que obtivermos com este trabalho podemos influenciar o professor a procurar inovar nas suas aulas, possivelmente alcançar ainda mais educadores que farão a leitura deste trabalho.

## Referências

BISSI, Tiago. As potencialidades pedagógicas da História da Matemática- Uma abordagem com alunos da 8º série. Natal: RHMP, 2014.

BASSO, Silvia e COSTA, Maria e FIORATTI, Netúlio. A matemática diante da possibilidade do ensino remoto: uma discussão curricular. Salvador, 2020. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/343867121\\_A\\_MATEMATICA\\_DIANTE\\_DA\\_POSSIBILIDADE\\_DO\\_ENSINO\\_REMOTO\\_Uma\\_discussao\\_curricular](https://www.researchgate.net/publication/343867121_A_MATEMATICA_DIANTE_DA_POSSIBILIDADE_DO_ENSINO_REMOTO_Uma_discussao_curricular)>. Acesso em: 08 de abril de 2021.

BOYER, Carl. História da Matemática. 3.ed.São Paulo, Edgard Blucher, 2010.

BRASIL. Base Nacional comum curricular. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <[http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf)>. Acesso em: 09 de junho de 2020.

BRASIL. **Orientações curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 2006.

Dicionário Caldas Aulete. Disponível em: <<http://www.aulete.com.br/Equa%C3%A7%C3%A3o>>. Acesso em: 19 de junho de 2020.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** São Paulo, Editora da Unicamp, 2004.

FEITOSA, Fabrício Silva. Uso Prático das Equações do Segundo Grau. SlideShare, Educação, 15 de julho de 2014. Disponível em: <https://pt.slideshare.net/mobile/FabricioFeitosa1/equao-do-2-grau-na-prtica>. Acesso em 09 de junho de 2020.

GUELLI, Oscar. **Contando a História da Matemática 3: história da equação do segundo grau.** 2.ed.São Paulo: Ática, 1993.

MUNIZ, Leonardo; **O Teorema de Etienne.** Revista do professor de Matemática (RPM), São Paulo, p.32 e 33, 2º quadrimestre de 2019.

PEDROSO, H. **Uma breve história da equação do 2º grau.** Revista eletrônica de Matemática, v.2, p.2 e 3, 2010.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. O que é equação? *Brasil Escola*. Disponível em: <<https://brasilecola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-equacao.htm>>. Acesso em: 09 de junho de 2020.

**Teorema matemático é criado por estudante de curso técnico no interior do Rio.** G1, Norte Fluminense e Região, 15 de agosto de 2019. Disponível em: <<https://g1.globo.com/rj/norte-fluminense/noticia/2019/08/15/teorema-matematico->

e-criado-por-estudante-de-curso-tecnico-no-interior-do-rio.shtml>. Acesso em: 09 de junho de 2020.

## **Apêndice – Material do Aluno**

Foi feito um Quiz no Google, onde os alunos podem encontrar algumas dessas questões, em um formato virtual.

Segue o link: [https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSez-6XatFUTiKdYqt\\_F19QsC44929AWmQgCuzpDqrVd7OnCPA/viewform?vc=0&c=0&w=1&flr=](https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSez-6XatFUTiKdYqt_F19QsC44929AWmQgCuzpDqrVd7OnCPA/viewform?vc=0&c=0&w=1&flr=)

## Oficina: Curiosidades sobre a função quadrática e equação do segundo grau.

Responsável: Kanandra Garcia Teixeira.

Material do Aluno

Nome: \_\_\_\_\_.

### Aula 1

**Assunto:** História da Equação do Segundo Grau e Função Quadrática.

Texto inicial sobre História da Equação do Segundo Grau e Função Quadrática.

Uma das principais aparições das equações quadráticas na civilização babilônica pode ser encontrada no problema a seguir: “Pede-se o lado de um quadrado sabendo que a diferença entre a área desse quadrado e seu lado é o número 870” (BOYER, 2010).

Usando as notações atuais, o problema equivale a resolver a equação quadrática cuja solução utilizando a Fórmula de Baskara é:

---



---



---

O procedimento realizado pelos escribas nas tabuletas é o seguinte:

Passo 1: Tome a metade de 1 (coeficiente de x)..... $(1/2)=0,5$

Passo 2: Multiplique por ela mesma..... $(0,5 \times 0,5= 0,25)$

Passo 3: Some o resultado a 870 (termo independente)..... $870,25$

Passo 4: Obtém-se um quadrado..... $870,25=(29,5)^2$

Passo 5: Cujo lado somando a metade de 1 vai dar 30, o lado do quadrado procurado. (PEDROSO, 2010, p.3)

1- Você imaginava que a equação era usada há tantos anos atrás?

---

2- Você conhece outro método para resolver uma Equação do Segundo grau que não seja usando a Fórmula de Bhaskara? Se sim, explique com suas palavras.

.

## Aula 2

**Assunto:** Equação do Segundo Grau.

1- Qual é a diferença entre Equação do Segundo Grau e Função Quadrática?

---



---



---

2- Dê um exemplo de Equação do Segundo Grau.

---



---

3- O que significa “x” no exemplo anterior?

---



---

4- Como se encontra o valor do “x” em uma Equação do Segundo Grau?

---



---

Exemplo de Aplicação da Equação do Segundo Grau (FEITOSA, 2014):

Um fazendeiro tinha um terreno retangular que media 26 m de comprimento e 16 m de largura. Tal fazendeiro fez uma compra que acrescenta uma faixa aos fundos do terreno e em uma de suas laterais (como mostra a figura a seguir) de mesma largura. Com essa expansão do terreno, a nova área medirá 816 m<sup>2</sup>.

Esboço do terreno



Fonte: Próprio autor.

a) Qual será a largura dessas faixas?

---

---

---

**Exemplo de aplicação de Função Quadrática :**

Em um jogo de vôlei João tocou a bola por cima da rede para Bruna. Este movimento é descrito pela função  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -x^2 - 4x + 5$ .

a) Qual o Domínio da função  $f$ ? Por que não definimos o domínio como  $\mathbb{R}$ ?

---

---

b) Qual o formato do gráfico dessa função, isto é, do movimento que a bola faz ao ser lançada verticalmente para cima? Faça um esboço.

---

---

c) A bola alcançou quantos metros de altura?

---

---

**Aula 3**

**Assunto:** Método geométrico para descobrir as raízes de uma Equação do Segundo Grau.

Resolva a equação  $x^2 + 8x - 48 = 0$ , utilizando o método geométrico.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

#### Aula 4

**Assunto:** Teorema de Etienne.

O Teorema de Etienne (MUNIZ, 2019) foi criado por uma aluna na sala de aula e diz que “somando as raízes encontradas de uma Função Quadrática, temos o ponto simétrico ao Eixo de Simetria da Parábola”. Esse Teorema auxilia a construção do gráfico da Função Quadrática.

1- Considere a Função Quadrática de domínio  $\mathbb{R}$ , contradomínio  $\mathbb{R}$ , ou seja,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$ .

- a) Qual a concavidade da parábola?
- b) Encontre as raízes dessa função.
- c) Encontrar as coordenadas do vértice do gráfico de  $f$ .
- d) Trace o eixo de simetria da parábola.
- e) Obtenha a intersecção da parábola com o eixo das ordenadas.
- f) Esboce o gráfico de  $f$ .

#### Aula 5

**Assunto:** Discutir as atividades que foram realizadas e avaliar a proposta do ponto de vista dos estudantes.

1- Qual a diferença entre Equação do Segundo grau e Função Quadrática?

---



---

2- O que você achou da história da Equação do Segundo Grau? Já conhecia? Cite um fato que lhe chamou mais atenção nas discussões feitas em aula.

---



---

3- Sobre os problemas que foram apresentados que exemplificaram que a Equação do Segundo Grau e a Função Quadrática pode ser usada no dia a dia: você sabia que poderia usá-las em situações cotidianas?

---



---

4- Na sua opinião, quais as vantagens de utilizar o método geométrico em relação ao que utiliza a fórmula de Bháskara?

---

---

5- Sobre o Teorema de Etienne. Você acha que com ele foi mais fácil o esboço do gráfico da Função Quadrática?

---

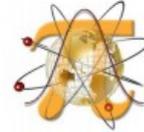
---

---



**Universidade Federal do Rio Grande – FURG**  
**Instituto de Matemática, Estatística e Física**  
**Curso de Licenciatura em Matemática**

Av. Itália km 8 Bairro Carreiros  
 Rio Grande-RS CEP: 96.203-900 Fone (53)3293.5411  
 e-mail: imef@furg.br Site: www.imef.furg.br



**Ata de Defesa de Monografia**

No terceiro dia do mês de maio de 2021 foi realizada a defesa do Trabalho de Conclusão de Curso da acadêmica **Kanandra Garcia Teixeira** intitulada **PROPRIEDADES INTERESSANTES DA FUNÇÃO QUADRÁTICA E EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU**, sob orientação da Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Cinthya Maria Schneider Meneghetti, deste instituto. A banca avaliadora foi composta pela Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Fabíola Sperotto Aiub e pela Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez, ambas do IMEF/FURG. A candidata foi: (  ) aprovada por unanimidade; (  ) aprovada somente após satisfazer as exigências que constam na folha de modificações, no prazo fixado pela banca; (  ) reprovada. Na forma regulamentar, foi lavrada a presente ata, que é abaixo assinada pelos membros da banca na ordem acima relacionada.

*Cinthya M. S. Meneghetti*  
 Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Cinthya Maria Schneider Meneghetti  
 Orientadora

*Fabíola Aiub Sperotto*

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Fabíola Aiub Sperotto

*Bárbara Denicol Rodriguez*  
 Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez