Nataliya Malska

FIGURAS PLANAS E SEU MUNDO ISOPERIMÉTRICO

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Julho, 2018

Nataliya Malska

FIGURAS PLANAS E SEU MUNDO ISOPERIMÉTRICO

Trabalho de Conclusão de Curso submetido por Nataliya Malska como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, pelo Curso de Licenciatura em Matemática junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Licenciatura em Matemática

Orientador: Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti

Coorientador: Dra. Daiane Silva de Freitas

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Julho, 2018

Nataliya Malska

FIGURAS PLANAS E SEU MUNDO ISOPERIMÉTRICO

Trabalho de Conclusão de Curso submetido por Nataliya Malska como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, pelo Curso de Licenciatura em Matemática junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Trabalho aprovado. Rio Grande, 18 de Julho de 2018:

Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti
(Orientadora - FURG)

Dra. Daiane Silva de Freitas
(Coorientadora - FURG)

Dr. Rodrigo Barbosa Soares
(Avaliador - FURG)

Dr. Mário Rocha Retamoso
(Avaliador - FURG)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Julho, 2018

Este trabalho é dedicado àqueles que amo e àqueles que respeito,
pois amo alguns, mas respeito a todos.

Agradecimentos

Agradecimentos a todos que de alguma forma ajudaram o presente trabalho a tornar-se realidade. Agradecimentos especiais as minhas Orientadora (Dra. Cinthya Maria Schneider Meneghetti) e Coorientadora (Dra. Daiane Silva de Freitas) pela paciência, pela persistência, pela imensa ajuda e por acridatar em mim.

A Matemática, quando a compreendemos bem,
possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza.
(Bertrand Russell)

Resumo

Os problemas isoperimétricos na Geometria Plana foram estudados por matemáticos de várias épocas. Neste trabalho, apresentaremos algumas sugestões de problemas elementares sobre o tema e algumas reflexões sobre o quê e como ensinar em Geometria Plana. Além disso, trazemos alguns problemas envolvendo triângulos e quadriláteros. Os problemas apresentados poderiam ser usados nas aulas de Geometria nas escolas para despertar interesse dos estudantes para uma parte da Matemática que tem aplicação direta em nosso cotidiano. Uma atenção especial é dada a um problema clássico sobre o círculo usando noções da geometria plana, junto com a outra solução mais formal usando conceitos de Cálculo. Sobre futuros trabalhos, fazemos uma breve discussão acerca de polígonos e os poliedros.

Palavras-chaves: problemas isoperimétricos; triângulos; círculo; Geometria Plana.

Abstract

The isoperimetric problems in Plain Geometry have been studied by Mathematicians of various epochs. In this paper we will present some suggestions of elementary problems on the subject and some reflection on what and how to teach in Plain Geometry. Besides that, we bring some problems involving triangles and quadrilaterals. The problems presented could be used in Geometry classes in schools to arouse students' interest to a part of Mathematics which has direct application in our daily lives. Special attention is given to a classical problem about the circle using notions of Plain Geometry, along with the other more formal solution using concepts of Calculus. About future works, we make a brief discussion about polygons and polyhedra.

Key-words: isoperimetric problems; triangles; a circle; Plain Geometry.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

Eles compraram tanta terra e deram a ela o nome de Birs,
Quanto conseguiram a cerca-la com a pele de boi.

Virgílio (Eneida)

Neste trabalho preocupamo-nos em explorar diversas abordagens para um problema clássico da matemática – o problema isoperimétrico. A escolha deste tema ocorreu devido ao interesse e afinidade da autora com a Geometria e, além disso, devido ao fato de que problemas que envolvem otimização costumam ser bem recebidos pelos estudantes, principalmente os da educação básica.

Como professores e futuros professores de matemática, queremos tornar a matemática mais próxima dos estudantes por meio de conceitos da Geometria. A busca da solução para um problema de natureza isoperimétrica possibilita ao professor o exercício da formalização do problema em questão, que inclui a organização dos resultados prévios e a justificativa de sua necessidade, possibilitando ao aluno compreender melhor o desenvolvimento da solução do problema e da matemática envolvida.

O interesse em estudar os problemas isoperimétricos deu-se pelo amor pela Matemática, em especial a Geometria e a sua história. Os conhecimentos obtidos durante o curso de Licenciatura em Matemática proporcionaram a possibilidade de busca das soluções destes problemas. Além disso, pela vontade de conhecer mais possibilidades de soluções e possíveis variações deles que já foram estudados por muitos matemáticos até o presente momento.

Ao longo da história da humanidade, a Geometria dedicou-se ao estudo de vários temas, dentre eles a existência de uma relação entre equações algébricas e figuras geométricas. Toda a evolução nos estudos da Geometria foi muito importante para a Matemática e para aplicação no nosso dia a dia, pois esta é usada para determinar o tamanho, a forma, o volume ou ainda a área de objetos do nosso cotidiano.

Para atuar nas áreas da engenharia e da arquitetura, por exemplo, são usados desenhos geométricos nas plantas de construções de edifícios. Além disso, temos a Geometria presente no trabalho dos designers de interiores ou urbanistas. Existem muitas figuras no nosso mundo de formas que nos lembram os quadriláteros: uma placa de trânsito, um semáforo ou uma faixa de pedestres. Também em casa vemos inúmeras formas poligonais nos objetos que nos cercam: nos móveis, nos utensílios de cozinha, nos pisos, nos formatos dos azulejos. E ainda na natureza, como num favo de mel em formato do hexágono e na formação do círculo de um bando de veados protegendo-se dos ataques dos lobos. Gotas de água e bolhas que vemos no ar podem tomar a forma de uma esfera, o formato de uma cidade antiga e moderna em forma de círculo.

Este trabalho está organizado em 7 capítulos. No Capítulo 1, são apresentadas algumas ideias sobre o que e como ensinar nas aulas da geometria tanto nas escolas quanto nas universidades. O objetivo é permitir que os alunos melhorem a apredizagem, desenvolvam o raciocínio, usem a lógica e busquem formas alternativas de solucionar os problemas apresentados em sala de aula. As sugestões das questões a serem trabalhadas são apresentadas no final do capítulo.

No Capítulo 2 são apresentadas algumas referências históricas e a solução de um problema clássico proposto por Jacob Steiner, usando apenas conceitos de matemática em nível de ensino médio. Os argumentos dele eram essencialmente geométricos. Ele solucionou muitos problemas que estimularam o crescimento da Geometria Analítica, especialmente no Cálculo Variacional.

Apresentamos no Capítulo 3, o problema da área que foi desenvolvido por Erhard Schmidt. Por causa do erro cometido por Steiner ao supor a existência de uma solução, muitos matemáticos buscavam uma solução mais formal ao problema isoperimétrico e fizeram a sua contribuição. O matemático alemão Karl Weiesrstrass achou a primeira solução formal, proporcionando um avanço nos estudos do cálculo.

No Capítulo 4 estudamos problemas envolvendo triângulos com a utilização de ferramentas da Geometria Euclidiana. Finalmente, no Capítulo 5, apresentamos ainda uma demonstração usual do problema isoperimétrico, do ponto de vista da Geometria, para quadriláteros. Nos Capítulos 6 e 7, apresentamos algumas generalidades sobre polígonos e as Considerações Finais, respectivamente.

Os Gregos eram muito interessados nos fenômenos da natureza. A epígrafe do capítulo atual é "de Eneida dois versos" de um dos maiores poetas da Roma Antiga, Publius Virgil Maron. Como qualquer criatura imortal "Eneida" narra sobre as paixões do homem, sobre o bem e o mal, sobre o destino e o sofrimento, sobre astúcia e amor, sobre a vida e a morte. As linhas da epígrafe referem-se a um evento ocorrido, segundo a lenda, no século IX A.C.

Segundo a lenda, a princesa fenícia Dido, fugindo da perseguição do seu irmão, foi para o oeste ao longo das margens do Mar Mediterrâneo procurar abrigo. Ela gostou de um lugar na costa do atual Golfo da Tunísia. Negociou com o líder local Yarkom sobre a venda de terras. Ela pediu um pouco da terra - tanto quanto alguém pode "cercar com a pele de um boi". O negócio aconteceu e então Dido cortou a pele de um touro em pequenas tiras (Figura 1), amarrou elas, foram colocadas juntas e cercaram um grande território onde já tinha uma fortaleza. Perto dela se localizava a cidade de Cartago. Lá, esperavam por ela mais adiante, um amor não correspondido e a sua morte sofrida. Este episódio é uma ocasião para refletirmos sobre a questão: quanta terra pode ser cercada

Figura 1 – Imagem de Dido e seu povo cortando o couro de um boi

Fonte: https://estudogeral.sib.uc.pt/bitstream/10316/20971/1/Tese Completa.pdf

pela pele de um boi?

Para responder a esta pergunta, é necessário formular este problema matematicamente. O matemático moderno dirá então: entre todas as curvas fechadas do plano com um determinado comprimento, precisamos encontrar uma curva que cubra a área máxima. Esse problema também é chamado de problema de Dido ou de Problema Isoperimétrico. Dizemos que duas figuras são isoperimétricas se possuem o mesmo perímetro. Muitos historiadores acreditam que este é o primeiro problema de extremos discutido na literatura científica, juntamente com a propriedade isoperimétrica do círculo (ou seja, a propriedade do círculo de cobrir a maior área entre as figuras isoperimétricas).

Os antigos geômetras também estudaram as propriedades isopyfenas. Segundo (TIHOMIROFF, 2006), é a propriedade da esfera de delimitar o maior volume entre todas as figuras que possuem superfície de mesma área. Com esta propriedade de capacidade máxima são relacionados os conceitos sobre um círculo e uma esfera como a encarnação da perfeição geométrica. Uma confirmação destas ideias vem de Pitágoras:

> O corpo mais bonito é uma bola uma figura plana é um círculo. Pitágoras (EVES, 2002).

1 Aprendendo e ensinando Geometria

Os trabalhos sobre ensino de Geometria, em geral, tratam de dois problemas principais: o desempenho fraco dos alunos e um currículo ultrapassado. Se um tópico não é ensinado, ele não pe aprendido. Apesar que os gestores e os professores perceberem que a Geometria é importante o bastante para ocupar o nível de destaque no ensino, não há uma concordância entre o que deve ser ensinado, nem uma uniformidade entre quanto tempo e em que nível podemos começar. Não há concondância tanto nas questões práticas mencionadas, quanto à natureza da Geometria que deveria ser ensinada, desde a escola elementar até a universidade.

1.1 Alguns exemplos das discussões sobre a Geometria

Alguns temas são recorrentes no Ensino de Geometria. Nesta seção vamos citar algumas questões, bem como discussões que decorrem imediatamente delas.

1. O que é a Geometria Euclidiana?

   Hoje em dia, praticamente toda a Geometria estudada nas escolas básicas é Geometria Euclidiana. Ao estudá-la, são necessárias definições elementares de ponto, reta e plano, os postulados e alguns teoremas da geometria e fazer construções com régua e compasso, transformações por meio do uso dos vetores, coordenadas e outros recursos. A geometria de Lobachevski (LINDQUIST; SCHULTE, 1994) e a Geometria equivalente de Bolyai são exemplos de Geometrias não euclidianas clássicas, mas existem outras. Geometrias não euclidianas poderiam ser apresentadas nos textos escolares, bem como abordagens alternativas para o ensino de Geometria Euclidiana.

2. O que são Geometria Formal e Informal ou Intuitiva?

   Quando discutimos a demonstração alternativa do Teorema de Pitágoras, por exemplo, trata-se da Geometria Formal. Um aluno desenhando um quadrado para cortar em duas partes iguais é a Geometria Informal.Porem o mais importante é instigar e incentivar a busca pelas respostas, desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos e desejo de querer aprender mais.

3. O que é uma demonstração e quando ela é válida?

   Muitos professores acham que certos conceitos, a terminologia assosciada aos mesmos, bem como suas demosnstarções, são aceitos ou comprendidos facilmente. Porém, segundo (LINDQUIST; SCHULTE, 1994), as questões não são tão fáceis de responder. Não há unanimidade, na prática, de como responder estas e outras questões, e a discussão delas é um pré-requisito para resolver os dilemas conceituais permanentes da geometria escolar. O autor (LINDQUIST; SCHULTE, 1994) ainda oferece as sugestões para considerar a Geometria em dimensões para sua melhor compreensão:

a) A Geometria como estudo da visualização do desenho e da construção de figuras;

b) A Geometria como estudo do mundo real físico;

c) A Geometria como veículo para representar conceitos matemáticos, ou outros, cuja origem não é visual ou física;

d) A Geometria como exemplo de um sistema matemático.

Historicamente, a Geometria foi a primeira parte da Matemática a ser organizada de modo lógico. De fato, até os séculos mais recentes era o único ramo mais organizado nesse sentido. Dentro de todas as áreas da Matemática, só a Geometria tem como objetivos principais justificar, discutir lógica e dedução e escrever as demonstrações. Durante toda a Matemática escolar, omitem-se teoremas que não podem ser demonstrados por métodos elementares dentro da Geometria Euclidiana. Por exemplo, a Desigualdade Isoperimetrica é quase sempre ignorada: para o comprimento L de uma curva fechada e área A de uma região planar temos $4\pi A \leq L^2$, onde a igualdade ocorre se, e somente se, a curva é um círculo. Este é um resultado importante no mundo real e pode ajudar aos alunos a compreender a diferença entre o perímetro e a área de figuras planas.

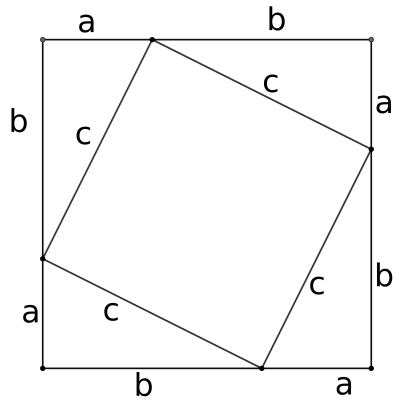
Assim como o ensino de Matemática nunca mais será o mesmo desde que começou a era digital, o ensino de Geometria nunca será o mesmo em virtude da computação gráfica. Desta perspectiva, podemos pensar na Geometria como a matéria especialmente prática devido aos seus conceitos que estão presentes no cotidiano do estudante e são essenciais na computação gráfica. Embora *h*ardware e software sofisticados facilitem a realização de vários projetos de computação gráfica sem muita base Matemática, não podemos cometer o erro de pensar que por isso o estudo da Matemática seja irrelevante.

Ainda, segundo (Z., 1982), podemos citar algumas recomendações para tornar a geometria mais atraente:

1. Ensinar Geometria da mesma maneira como se ensina Àlgebra e Cálculo, sem ênfase no rigor;

2. Chegar aos teoremas centrais de Geometria mais cedo possível. Um exemplo pode ser visto numa simples demonstração bem conhecida do Teorema de Pitágoras, ilustrada na Figura 2.

Figura 2 – Teorema de Pitágoras



Fonte: Próprio autor

A área total do quadrado é $(a+b)^2$. Por outro lado, podemos representar a área do quadrado como $c^2 + 4\frac{1}{2}ab$ somando as partes do interior. Igualando as duas expressões da área total, obtemos $c^2 = a^2 + b^2$. Note que a figura interna é quadrado. É fácil ver que, ao somar os ângulos internos dos triângulos, estes formam 180° e cada ângulo da Figura interna que seria ângulo reto.

Os tópicos centrais como conguência e semelhança também devem ser abordados o mais cedo possível;

3. Usar as técnicas da Álgebra e da Geometria Analítica igual aos métodos euclidianos clássicos;

   A integração do conhecimento é uma questão muito importante e os tópicos diferentes podem ser unidos. A demonstarção do Teorema de Pitágoras supracitada é uma boa ilustração da união da Álgebra elementar e da Geometria;

4. Usar diagramas em todas explicações e em demonstrações;

5. Relacionar a Geometria com as tendências do mundo real;

6. Evitar longas explicações de alguns teoremas, bem como a excessiva elaboração do óbvio;

A seguir, algumas sugestões de problemas para estudar Geometria no Ensino Básico.

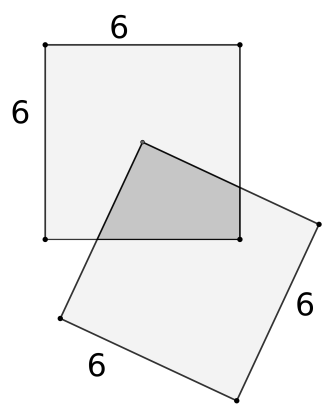
1.2 Alguns Problemas de Geometria

De acordo com (MILAUSKAS, xxxx), o aluno aprende a resolver problemas resolvendo problemas de qualidade. Não significa criar problemas especiais, mas os problemas que são estimuladores de raciocínio e lógica. Problemas reais podem ser motivadores, mas outros não tão comuns, também poderiam ser. Muitas vezes, o mais importante não é o problema em si, mas o raciocínio, a análise das técnicas para a sua resolução. É importante ressaltar o modo como a pergunta é colocada e as soluções alternativas dos alunos devem ser estimuladas.

Alguns problemas são apresentados neste trabalho como sugestão para serem usados nas aulas de Geometria. São sugestões baseadas nas leituras e discussões que ocorreram durante a elaboração desse texto. Tratam-se de problemas que podem ser trabalhados no ensino fundamental e médio. A maior parte deles são básicos porém, precisam de um conhecimento das figuras e suas propriedades. Não precisam ser feitos na ordem certa, é um recorte de como podemos unir algo simples, usando raciocínio e lógica para achar as respostas.

Problema 1. *Dois quadrados congruentes, ambos de lados* 6 *cm sobrepôem-se, conforme mostra a Figura 3. Um vértice de um dos quadrados está no centro do outro quadrado. Qual é a maior valor possível da área hachurada? (O primeiro quadrado é móvel, mantendo-se fixo apenas o vértice que está no centro do outro).*

Figura 3 – Ilustração do Problema 1

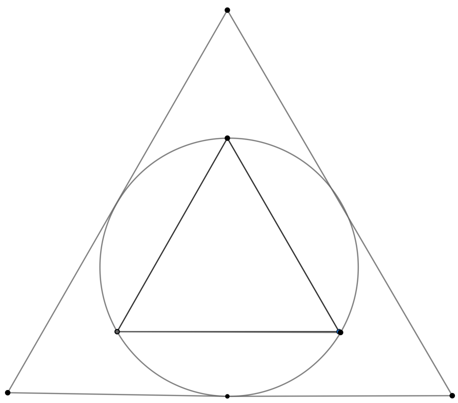


Fonte: Próprio autor

Problema 2. *Se um ponto é selecionado ao acaso no interior de um círculo, ache a probabilidade de que esse ponto esteja mais próximo do centro do que da circunferência do círculo.*

Problema 3. *Um triângulo equilátero está inscrito num círculo e outro triângulo está circunscrito ao mesmo círculo (conforme a Figura 4). Ache a razão entre as áreas dos triângulos.*

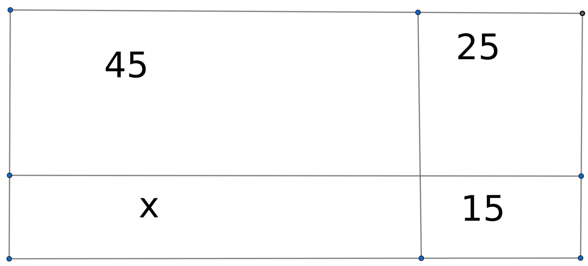
Figura 4 – Ilustração do Problema 3



Fonte: Próprio autor

Problema 4. *Um retângulo é decomposto em quatro retângulos de áreas* $45, 25, 15$ *e* x *(veja a Figura 5). Encontre o valor* x*.*

Figura 5 – Ilustração do Problema 4



Fonte: Próprio autor

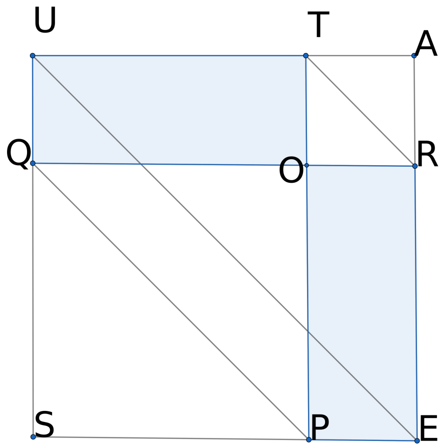
Problema 5. *Dado um quadrado decomposto em dois retângulos menores (sombreados) e dois quadrados (conforme a Figura 6), onde* $\overline{TR} = 7$, *e* $\overline{UE} = 20$. *Ache* $\overline{PQ}$ *e a área sombreada total.*

Problema 6. *O perímetro de um retângulo é* 48*. Crie uma tabela que mostre os possíveis comprimentos e alturas interiores para esse retângulo e a área de cada um.*

a) Quais são os valores possíveis dos comprimentos? E das larguras?

b) Que escala de valores você achou para área? Qual a área máxima?

Figura 6 – Ilustração do Problema 5

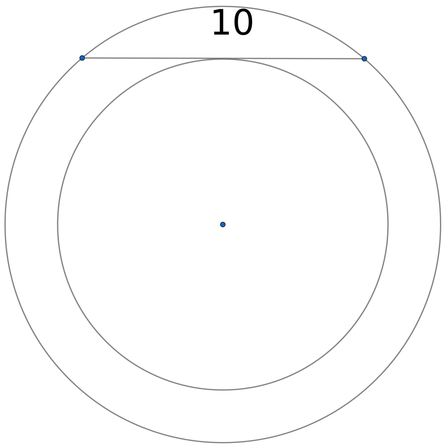


Fonte: Próprio autor

c) *Analise uma tabela desse tipo para um retângulo em que a soma de três lados é* 48 *e determine a escala de valores das áreas. Ache a área máxima.*

Problema 7. *O piso de um farol circular tem um tapete circular no centro (veja a Figura 7). O guarda do farol observou que, se ele colocasse uma vara de* 10 *m de comprimento no piso, de modo que suas extremidades tocassem a parede, então essa vara tangenciaria o tapete. Ache a área do piso não coberto pelo tapete.*

Figura 7 – Ilustração do Problema 7



Fonte: Próprio autor

1.2.1 Pistas e respostas

1. Mova o quadrado cujo vértice está no centro do outro quadrado e observe que: $S = \frac{1}{4}$ do quadrado, de modo que a área hachurada é sempre $9\,cm^2$.

2. Probabilidade $= \dfrac{\text{área do círculo de raio } \frac{r}{2}}{\text{área de círculo inteiro}} = \dfrac{1}{4}$.

3. Fazendo a rotação de 180^o do triângulo interior, podemos observar que temos quatro triângulos visíveis. A área do triângulo menor é $\dfrac{1}{4}$ da área do triângulo maior.

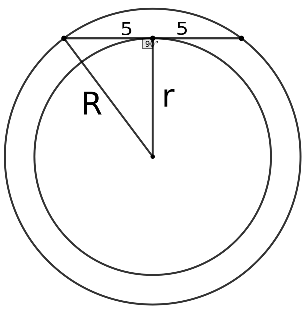
4. Observe na Figura 5 que $u \times v = 45, u \times z = 25$ e $w \times z = 15$. Portanto, $x : v \times w = \dfrac{(v \times u)(\times z \times w)}{(u \times z)} = \dfrac{45 \times 15}{25} = 27$.

5. Ao solucionar este problema usaremos a semelhança de triângulos e Teorema de Pitágoras. Os triângulos USE e TOR são semelhantes e podemos escrever a equação: $\dfrac{7}{20} = \dfrac{y}{x+y}$, onde $x = \overline{SP}$ e $y = \overline{PE}$ e usando teorema de Pitágoras, temos que $(x+y)^2 = 200$. Colocando as duas expressões em um sistema, após solucionar o sistema temos que $\overline{PQ} = 13$ e ainda a Àrea sombreada = Área total - Área dos quadrados = 91.

6. A área máxima para um dado perímetro é a figura mais regular (um quadrado). O mesmo acontece para o perímetro mínimo de uma dada área. Muitos destes problemas podem ser tratados por tabelas.

7.

Figura 8 – Ilustração da resolução do Problema 7



Fonte: Próprio autor

Método 1 de solução:$R^2 = r^2 + 25$, então $R^2 - r^2 = 25$. Método 2 de solução: A resposta independe do tamanho do farol ou do tapete. Admitimos que o tapete tenha raio 0 e que, assim, a vara tenha o comprimento do diâmetro do círculo restante. A área então seria 25π.

Por mais de um século (LINDQUIST; SCHULTE, 1994) os estudantes de Geometria da educação básica devem ter tido a impressão de que a principal utilidade da

Geometria era como veículo para o estudo da lógica e da natureza da demonstração. Primeiro, o método baseado nos Elementos de Euclides, a saber, o método axiomático. Segundo, o desenvolvimento das geometrias não euclidianas, que serviu para fortalecer a ligação entre a geometria e a filosofia de acordo com as ideias do filósofo Immanuel Kant, que argumentava que o espírito humano se estrutura de maneira que nenhuma Geometria a não ser de Euclides, pode se comparar a ele.

Mas Lobachevski e Bolyai demonstraram que sua Geometria pode ser igualmente bem compreendida e desenvolvida pelo espírito humano. Sabem que os profissionais de hoje precisam usar a Geometria nos seus projetos, mas o que precisam saber a respeito dos fundamentos lógicos da Geometria Euclidiana? A resposta seria: pouco. Portanto, quando o professor de Geometria ouve a pergunta "Por que preciso estudar isso?", uma resposta é que a Geometria é necessária para compreensão de cálculo, por exemplo. Porque muitas ideias do cálculo se baseiam em conceitos básicos da Geometria. Uma das mais importantes aplicações do cálculo é na resolução de problemas de otimização: como maximizar ou minimizar certas quantidades. A maioria das pessoas apreciam este uso do Cálculo, pois podemos maximizar os lucros e minimizar os custos de empreendimento para alcançar os objetivos desejados.

Todavia, os alunos acham difíceis as questões de máximo e mínimo devido a dificuldade maior com a Geometria do que próprio cálculo. Para antecipar e preparar oa alunos para estes tipos de problemas, sugerimos alguns dos problemas a serem propostos nas aulas da Geometria.

1. Determinar a área de um retângulo inscrito num semicírculo em função de sua base.
2. Achar a área de um retângulo de perímetro L em função de sua largura.
3. Achar o volume e a área da superfície de um cubo em função do comprimento de sua diagonal.
4. Prove: De todos os paralelogramos com uma dada base e uma dada área, o retângulo é o que tem perímetro mínimo.
5. Prove: De todos os retângulos com a mesma área, o quadrado tem o perímetro mínimo.
6. Prove: De todos os triângulos com uma dada base e uma dada altura, o triângulo isósceles tem o perímetro mínimo.
7. Prove: De todos os triângulos com uma dada base e dado perímetro , o triângulo isósceles tem a área máxima.
8. Prove: De todos os triângulos que podem ser inscritos num dado círculo, o triângulo equilátero tem o menor perímetro e a maior área.

A maioria destas questões são apenas algumas variações dos problemas isoperimétricos, outras são relacionadas e eles. Para tornar as aulas mais ineressantes e proporcionando maior envolvimento de cada aluno, sugere-se usar várias formas de abordagens: usando os conceitos básicos, ferramentas de construção em geometria, fazendo desenhos no papel, construindo as figuras, usando material concreto e ainda fazendo cálculo com calculadora ou apenas usando lápis e uma régua.

2 Problemas Isoperimétricos

Neste capítulo definimos o que chamamos de Problema Isoperimétrico. Na seção 2.1, falaremos do círculo por méio de um resultado demonstrado por Jakob Steiner (1796-1863) que arquitetou várias maneiras engenhosas de provar que o círculo encerra a maior área entre todas as curvas fechadas com um perímetro dado.

2.1 O problema isoperimétrico resolvido por Steiner

Uma prova notável da propriedade isoperimétrica do círculo foi aquela que apresentou Jacob Steiner. Na verdade, sua prova contém um erro: supor que existe uma solução para o problema. No entanto, o erro não era considerado como tal no meio do Século XIX, quando trabalhou Steiner. Ele argumentou que o círculo, entre todas as curvas fechadas com um perímetro dado, encerra a maior área. Esta afirmação é conhecida como *Problema Isoperimétrico* e pode ser enunciada da seguinte forma:

Problema Isoperimétrico: Entre todas as curvas planas fechadas de um dado comprimento L, encontre aquela que delimita a maior área.

A hipótese usada na demonstração proposta por Steiner é a de que existe uma solução, supondo que a curva C é dada com comprimento L e a área máxima A. Vamos mostrar que, nessas condições, C é uma curva convexa.

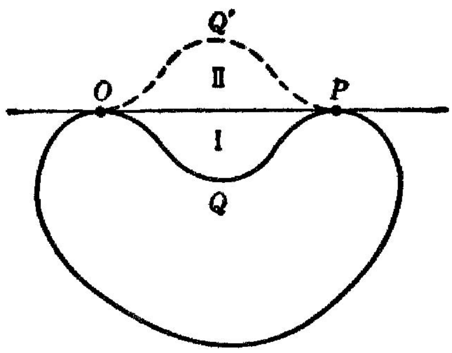
Suponhamos que a curva C não seja convexa e delimita uma área máxima, como na Figura 9. Então podemos traçar um segmento OP entre dois pontos O e P sobre C tal que o segmento OP esteja fora da região delimitada por C, com exceção dos pontos O e P.

O arco $OQ'P$, que é a reflexão de OQP em relação a OP, forma uma curva de comprimento L com área maior do que a curva original, pois inclui as regiões I e II.

Isto contradiz a suposição inicial de que C abrange maior área para uma curva fechada de comprimento L. Portanto, a curva C deve ser convexa.

Fixando um ponto O sobre a curva C, podemos considerar o ponto P de modo que a reta OP divide o perímetro de C em duas partes iguais, assim dividindo a área da superfície delimitada por C em duas partes iguais. Caso contrário, seria suficiente considerar uma figura formada pela parte com maior área e refletí-la em relação à reta OP para obter uma figura com o mesmo perímetro que a original, mas

Figura 9 – Uma curva não convexa C

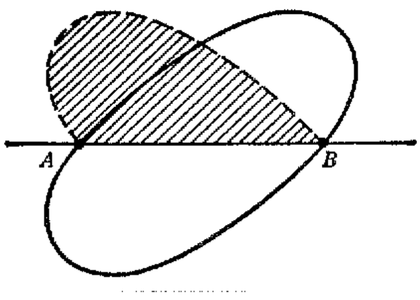


Fonte: https://www.math.upenn.edu/ shiydong/Math501X-5-Isoperimetric.pdf

Sendo assim, podemos afirmar que a figura obtida é simétrica em relação à reta OP.

Vamos considerar outra situação como na Figura 10: o segmento AB também divide a área de superfície de C em duas partes iguais, uma vez que, caso contrário, seria suficiente tomar a figura formada pela parte com maior área e refleti-la em relação ao segemento AB para formar uma figura com o mesmo perímetro que a original, mas com área maior.

Figura 10 – O segmento AB divide o perimetro da curva C em duas partes iguais



Fonte:https://www.math.upenn.edu/ shiydong/Math501X-5-Isoperimetric.pdf

Como as duas partes possuem a mesma área e o mesmo perímetro, podemos considerar a metade da solução, procurando apenas o arco $\frac{L}{2}$ com seus pontos extremos O e P encerrando a área máxima entre a reta OP e este arco. Mostraremos que a solução para este problema é um semicírculo. E, assim, a solução para o problema isoperimétrico seria um círculo.

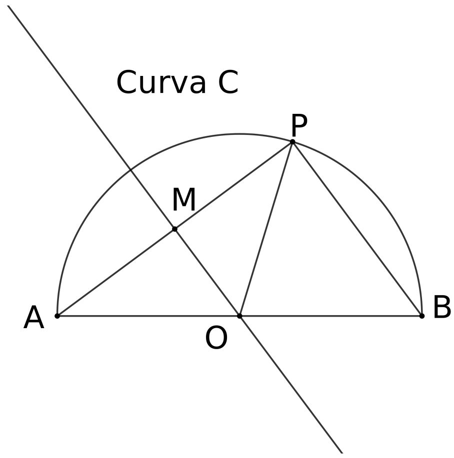
Primeiramente, demonstraremos duas proposições.

Proposição 1. *Considere a região formada por uma curva convexa C e pelo segmento AB. Temos que P é um ponto sobre C tal que $\measuredangle APB = 90^o$ se, e somente se, C é um semicírculo.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Sejam O o ponto médio do segmento AB e P um ponto qualquer sobre C. Precisamos mostrar que $\measuredangle OAP = \measuredangle APO$. Traçamos uma reta paralela ao segmento PB passando por O e esta reta vai cortar segmento AP em M. Assim, pelo teorma de Tales, temos que M é o ponto médio do segmento AP. Pelo Teorema de Tales, temos que $\dfrac{1}{2} = \dfrac{AO}{AB} = \dfrac{AM}{AP} \Rightarrow 2AM = AP \Rightarrow M = \dfrac{AP}{2}$. Portanto M é um ponto médio. Veja a Figura 11.

Figura 11 – Região formada por uma curva convexa C e o segmento AB



Fonte: Próprio autor

Assim, os ângulos $\measuredangle AMO$ e $\measuredangle APB$ são congruentes. Portanto, $\measuredangle AMO = \measuredangle PMO = 90^o$. E pela axioma da congruência de triângulos AMO e PMO são congruentes.

Logo, $\overline{AO} = \overline{PO} = \overline{BO}$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que C é um semicírculo, vamos mostrar que $\measuredangle APB = 90^o$.

De fato, os triângulos AOP e BOP são isósceles. Assim

$$\measuredangle OBP = \measuredangle OPB,$$

os ângulos

$$\measuredangle OAP = \measuredangle OPA$$

, onde a soma dos ângulos $\measuredangle OBP + \measuredangle OPB + \measuredangle OAP + \measuredangle OPA = 180^0$.

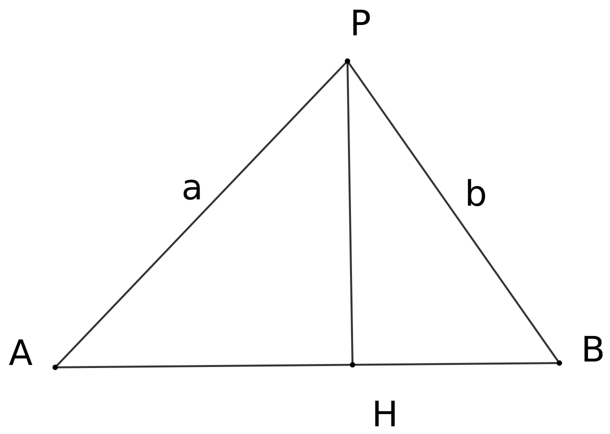
Portanto, $\measuredangle APB = \measuredangle OPB + \measuredangle OPA = 90^0$

Proposição 2. *Entre todos os triângulos com dois lados com medidas fixas, o triângulo retângulo possui a maior área.*

Demonstração:

Seja APB um triângulo qualquer tal que $H \in AB, PH$ é altura de relativa a base AB e ainda $\overline{BP} = b$ e $\overline{AP} = a$ (Figura 12).

Figura 12 – Triângulo de lados com medidas fixas a e b



Fonte: Próprio autor

Se PH é altura do triângulo de base AB, então sabemos que a sua área é $A(APB) = \frac{1}{2}\overline{PH} \times \overline{AB}$. Podemos chamar os ângulos $\measuredangle APH$ como Θ_1 e o$\measuredangle HPB$ como Θ_2 Assim, usando as relações trigonométricas, podemos escrever:

$$\overline{AB} = a \operatorname{sen} \Theta_1 + b \operatorname{sen} \Theta_2$$

$$\overline{PH} = a \cos \Theta_1 + b \cos \Theta_2.$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} A(APB) &= \frac{1}{2}\overline{PH} \times \overline{AB} \\ &= \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \Theta_1 \cos \Theta_2 + ab \operatorname{sen} \Theta_2 \cos \Theta_1 \\ &= \frac{ab}{2} \operatorname{sen}(\Theta_1 + \Theta_2) \\ &= \frac{ab}{2} \operatorname{sen} \Theta. \end{aligned}$$

A Proposição resulta do fato que a área A vai ser máxima quando $\operatorname{sen}\Theta$ for igual a 1 e o ângulo $\Theta = 90^0$. O que conclui a demonstração.

Usando a conclusão das duas proposições, podemos afirmar que a nossa curva C é um semicírculo.

De acordo com (S.P., 2005) e (KAZARINOFF, 1961) a solução de Steiner só é possível pela hipótese de que existe uma solução e analisando-a podemos extrair conclusões que permitam descrever a solução.

Uma delas é a de que é possível escrever a propriedade isoperimétrica do círculo na forma de uma desigualdade.

De fato, se L é um comprimento do círculo cujo raio é r, sabemos que $L = 2\pi r$. Então $r = \frac{L}{2\pi}$ e a sua área é $A = \pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi}$.

Logo, segue a desigualdade isoperimétrica entre a área A e o comprimento L de qualquer figura plana convexa, sendo o sinal de igualdade válido apenas para um círculo,

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

De acordo com (KAZARINOFF, 1961) e (TIHOMIROFF, 2006) o erro está contido na primeira frase da prova, onde consideramos uma figura que, para um determinado comprimento do perímetro, tenha a maior área. Por que tal figura existe? E se não for? Isto parece uma pequena observação que pode ser facilmente contornada. Enquanto a existência de uma solução não for provada, a prova de Steiner não pode ser considerada correta.

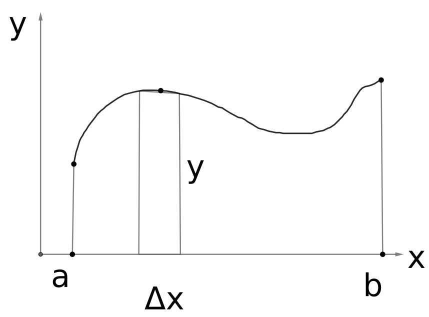
3 Prova do Problema Isoperimétrico por E. Schmidt: visão moderna

O Problema Isoperimétrico finalmente foi resolvido e sua solução deu início a Geometria Elementar. Outro matemático junta seu nome ao problema, Karl Weierstrass (1815-1897). Weierstrass obteve a primeira demonstração rigorosa e completa do Problema Isoperimétrico. Ele fez isso em suas aulas em 1879, mas não a publicou. Foi coletado por seus discípulos e publicado no volume 7 de suas obras completos em 1927. Esta é uma demonstração simples, que usa o cálculo de variações. Posteriormente, houveram outras soluções, como a de Hurwitz (1859-1919) usando em 1902, a série de Fourier; Blaschke (1855-1962) utilizando geometria diferencial em 1930; Schmidt (1876-1959) em 1939, também usando noções de geometria diferencial e Santal (1911-2001) em sua geometria integral (conforme (ARAúJO, 2004), (S.; PARKER, 1977) e (LIMA, 2016)).

Neste Capítulo estudaremos uma solução proposta por Erhard Schmidt, usando conhecimentos fundamentais do cálculo e o Teorema de Green na prova do Problema Isoperimétrico.

Para começar a demonstração, podemos lembrar algumas generalidades sobre área. A definição da área A de um retângulo de lados l e w é $A = l \times w$. A definição da área abaixo da curva $y = f(x) > 0$, delimitada pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo x no plano xy é $A = \int_a^b f(x)dx$ (Figura 13). Em vez de considerar a função f, podemos considerar a curva C (simples e fechada) numa região plana. Neste caso, a área da região delimitada pela curva é $A = \int_C ydx$.

Figura 13 – Gráfico de $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.



Fonte: Próprio autor

Lema 1. *Seja $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva fechada simples, orientada positivamente (sentido anti-horário) e definida por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Então*

$$A = -\int_a^b y(t)x^{'}(t)dt \overset{(1)}{=} \int_a^b x(t)y^{'}(t)dt \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\int_a^b x(t)y^{'}(t)dt - y(t)x^{'}(t)dt, \tag{3.1}$$

onde A é a área da região limitada pela curva α.

Demonstração:

A igualdade (1) acima segue do Teorema Fundamental do Cálculo (FLEMMING; GONçALVES, 2010).

De fato, como $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ e é uma curva fechada e parametrizada por comprimento do arco com $t \in [a,b]$, temos que $\alpha(a) = \alpha(b)$.

Assim,

$$\begin{aligned} \int_a^b y^{'}(t)x(t)dt &= \int_a^b (x(t)y(t))^{'}dt - \int_a^b x^{'}(t)y(t)dt \\ &= [x(b)y(b) - x(a)y(a)] - \int_a^b x^{'}(t)y(t)dt \\ &= -\int_a^b x^{'}(t)y(t)dt. \end{aligned}$$

O Teorema de Green (FLEMMING; GONçALVES, 2010) relaciona a integral da linha ao longo de uma curva fechada no plano com a integral dupla sobre a região limitada por essa curva. Este teorema foi demonstrado pelo matemático britânico George Green em 1828 e é um caso particular do Teorema de Stokes. A utilização do Teorema de Green permite calcular a área delimitada por uma curva parametrizada, simples e fechada α. De fato, pelo Teorema de Green temos:

$$\int_\alpha Pdx + Qdx = \int\int_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} dxdy,$$

onde P e Q são duas funções reais de variável real com derivadas parciais de primeira ordem contínuas numa região contendo R a qual é delimitada por α.

Se considerarmos o campo $(P,Q) = (0,x)$, temos:

$$\int_\alpha xdy = \int\int dxdy = \text{área de } R.$$

Por outro lado, se condiderarmos o campo $(P,Q) = (-y,0)$, temos:

$$\int_\alpha -ydx = \int\int_{\mathbb{R}} dxdy = \text{área de } R.$$

A igualdade (2) é verdadeira pois:

$$\begin{aligned} A = \int_a^b y^{'}(t)x(t)dt &= \frac{1}{2}\int_a^b y^{'}(t)x(t)dt + \frac{1}{2}\int_a^b y^{'}(t)x(t)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b y^{'}(t)x(t)dt - \frac{1}{2}\int_a^b x^{'}(t)y(t)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b (y^{'}(t)x(t) - y(t)x^{'}(t))dt. \end{aligned}$$

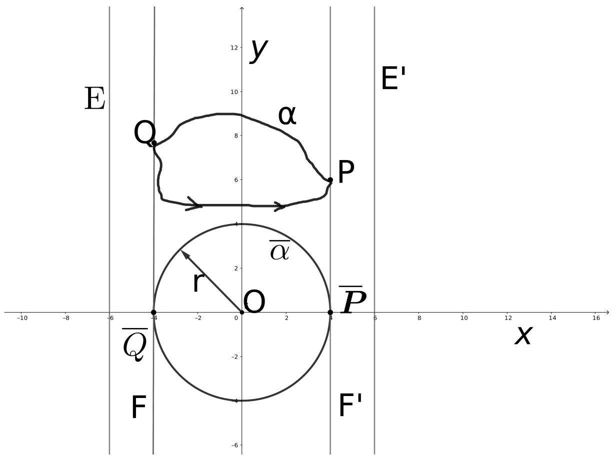
o que conclui a demonstração do Lema.

Teorema 1 (Desigualdade Isoperimétrica)**.** *Dentre todas as curvas regulares, simples: fechadas com comprimento fixo, o círculo delimita a maior área. Em outras palavras: se L é o comprimento de uma curva α simples, fechada e regular e A é a área da região que o traço de α delimita, então*

$$L^2 - 4\pi A \geq 0. \tag{3.2}$$

Além disso, a igualdade ocorre, se e somente se o traço de α é um círculo.

Figura 14 – Retas tangentes às curvas α e $\overline{\alpha}$



Fonte: Próprio autor

Demonstração:

Dadas duas retas paralelas E e E' que não cortam a curva fechada α. Se deslocamos as retas até tangenciarem o traço de α, teremos duas retas F e F' que tangenciam a curva α em pontos Q e P (Figura 14).

Seja $\overline{\alpha}$ uma curva cujo traço descreve um círculo tangente às retas F e F' em pontos $\overline{Q}$ e $\overline{P}$, respectivamente, e que não intercepta o traço de α. Denotamos por r o raio deste círculo e tomemos o centro como a origem do sistema de coordenadas. Podemos supor, que α está parametrizada pelo comprimento de arco, $\alpha(0) = P$ e α está orientada positivamente, $\alpha(s_0) = Q$. Assim, temos:

$\alpha : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, com $\alpha(0) = \alpha(L)$.

Além disso,

$\overline{\alpha} : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\overline{\alpha}(s) = (\overline{x}(s), \overline{y}(s))$, tal que $\overline{x}(s) = x(s)$.

Sabemos que $L = 2\pi r$ é o comprimento do círculo $\overline{\alpha}$ (veja a Figura 14).

Usando o Lema (1) e denotando a área delimitada por $\overline{\alpha}$ por $\overline{A}$, temos:

$$A = \int_0^L x(s)y^{'}(s)ds \quad \text{e} \quad \overline{A} = \pi r^2 = -\int_0^L \overline{y}(s)x^{'}(s)ds.$$

Assim,

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &= \int_0^L (x(s)y^{'}(s) - \overline{y}(s)x^{'}(s))ds \\ &\leq \int_0^L \sqrt{(x(s)y'(s) - x'(s)\overline{y}(s))^2}ds \\ &= \int_0^L \sqrt{x^2(s)(y')^2(s) - 2x(s)y'(s)\overline{y}(s)x'(s) + \overline{y}^2(s)(x')^2(s)}ds. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Somando $\overline{y}^2(s)(y')^2(s) - \overline{y}^2(s)(y')^2(s)$ e $x^2(s)(x')^2(s) - x^2(s)(x')^2(s)$ no integrando e ocultando a dependência de s para não carregar na notação, temos:

$$\sqrt{x^2(y^{'})^2 - 2xy'\overline{y}x' + \overline{y}^2(x^{'})^2} \leq \sqrt{(x^2 + \overline{y}^2)((x^{'})^2 + (y^{'})^2)}. \tag{3.4}$$

Além disso, como $\overline{\alpha}(s) = (x(s), \overline{y}(s))$ é um círculo com $r > 0$, temos que $x^2 + \overline{y}^2 = r^2$ e ainda $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ é parametrizada por comprimento de arco, $|\alpha'(s)| = 1 \Leftrightarrow |(x^{'})^2 + (y^{'})^2| = 1$. Logo

$$\int_0^L \sqrt{(x^2 + \overline{y}^2)((x^{'})^2 + (y^{'})^2)}ds = \int_0^L r ds = rL. \tag{3.5}$$

Sabemos que a média geométrica de dois números positivos é menor ou igual que a sua média aritmética e a igualdade ocorre quando os dois números são iguais. Assim, considerando A e πr^2,

$$\sqrt{A\pi r^2} \leq \frac{1}{2}(A + \pi r^2) \leq \frac{1}{2}Lr, \tag{3.6}$$

que resulta $4\pi A \leq L^2$, o que implica 3.2.

Para que ocorra a igualdade, queremos mostrar que $A = \pi r^2$, ou seja, $L = 2\pi r$.

Supondo que vale a igualdade 3.3, temos

$$(xy^{'} - \overline{y}x)^2 = (x^2 + \overline{y}^2)((x^{'})^2 + (y^{'})^2) \tag{3.7}$$

o que ocorre se $(xx^{'} + y^{'}\overline{y})^2 \geq 0$.

e substituindo por $xx^{'} = -y^{'}\overline{y}$ do lado esquerdo de 3.7, teremos:

$$\begin{aligned} x^2(y^{'})^2 - 2xy^{'}\overline{y}x^{'} + (\overline{y})^2(x^{'})^2 = r^2 \\ x^2(y^{'})^2 + 2x^{'}xx^{'}x + (\overline{y}^{'})^2(x^{'})^2 = r^2. \end{aligned}$$

Fatorando, obtemos

$$x^2((y^{'})^2 + (x^{'})^2) - (x^{'})^2(x^2 + \overline{y}^2) = r^2,$$

de onde vem que

$$x^2 \times 1 + (x^{'})^2 \times r^2 = r^2$$

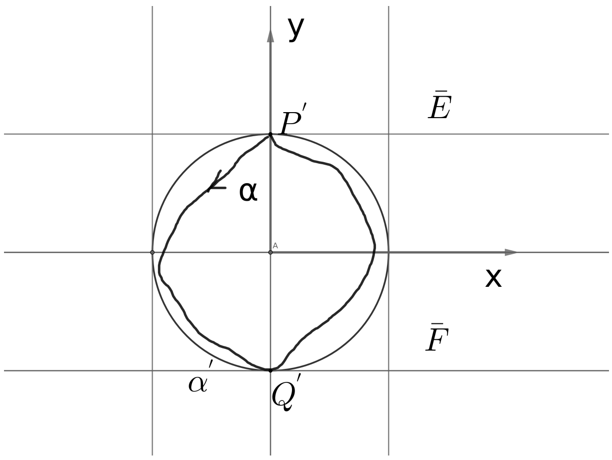
ou seja,

$$x^2 = r^2(1 - (x^{'})^2)$$
$$x = \pm r y^{'}.$$

Para concluir a prova, precisamos mostrar que $y = \pm r x^{'}$. Para isso, voltamos ao começo da prova e construímos um novo desenho.

Sejam os pontos $P^{'}$ e $Q^{'}$ sobre o traço tais que as suas coordenadas y sejam máxima e mínima, respectivamente. Como α é diferenciável nesses pontos, as retas tangentes à curva α em $P^{'}$ e $Q^{'}$ são paralelas ao eixo x. Considere $\overline{E}$ e $\overline{F}$ essas retas tangentes. Pelo que já provamos, a distância entre essas retas é $2r$. Transladando-se o círculo α por um vetor $(0, a)$, de modo que ele fique tangente às retas $\overline{E}$ e $\overline{F}$ (ver Figura 15), podemos repetir o argumento da prova como foi feito aqui, e usando o fato que r independe da direção das retas paralelas, e ainda trocando argumento da prova de 3.7, obtemos

Figura 15 – Retas tangentes $\overline{E}$ e $\overline{F}$



Fonte: Prórprio autor

$\overline{y} = \pm r x^{'}$ e ainda somando $\overline{x}^2$ com $\overline{y}^2$, obtemos:

$$\overline{x}^2 + \overline{y}^2 = r^2((x^{'})^2 + (y^{'})^2) = r^2,$$

o que significa que a nossa curva $\alpha(s)$ é o círculo.

4 Problemas isoperimétricos para triângulos

Neste capítulo, estudaremos o Problema Isoperimétrico em triângulos. Entre todas as figuras planas convexas, os triângulos são as figuras mais elementares entre os polígonos. Por esta razão, iniciamos com o resultado:

Teorema 2. *De todos os triângulos com a mesma base e o mesmo perímetro, o triângulo isósceles tem a maior área.*

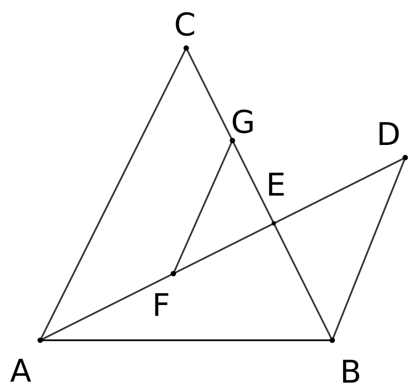
Demonstração:

Considere um triângulo $\triangle ABC$ isósceles com base AB, e que existe um triângulo $\triangle ABD$ com a mesma base e o mesmo perímetro. Isto implica que $\overline{AC}+\overline{BC} = \overline{AD}+\overline{BD}$.

Como ABD tem o mesmo perímetro do $\triangle ABC$ mas não é isóceles, podemos supor, sem perda de generalidade que existe um lado AD tal que $\overline{AD} > \overline{AC}$ e outro lado BD tal que $\overline{BD} < \overline{AC}$.

Neste caso, AD intersepta BC no ponto E, onde $E \neq D$ (Veja Figura 16). Note que D pertence ao exterior de $\triangle ABC$. Caso contrário, existem duas possibilidades.

Figura 16 – Figura dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$



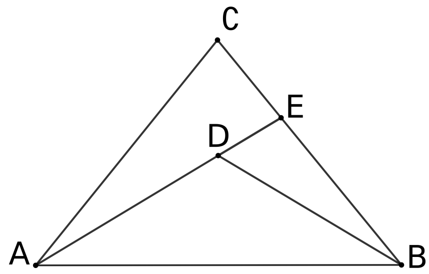
Fonte: Próprio autor

1) Vamos supor que ponto D pertence ao interior do triângulo $\triangle ABC$ e o ponto E é a interseção com lado BC e extenção do AD (Figura 17).

Portanto, podemos afirmar que

$$\overline{AC} + \overline{CE} > \overline{AD} + \overline{DE} \text{ e}$$
$$\overline{DE} + \overline{EB} > \overline{BD}.$$

Figura 17 – Ponto D no interior de $\triangle ABC$



Fonte: Próprio autor

Além disso, pela desigualdade triangular, sabemos que

$$\overline{AC} + \overline{CE} + \overline{EB} + \overline{DE} > \overline{AD} + \overline{DE} + \overline{BD}.$$

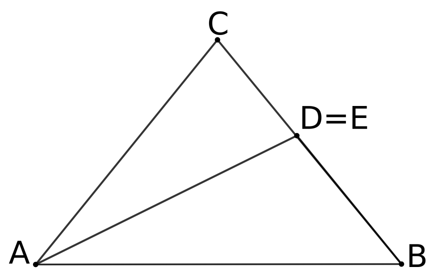
Isto contradiz a hipótese de que

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AD} + \overline{BD}.$$

Portanto, o ponto D não pertence ao interior do $\triangle ABC$.

2) Se o ponto $D = E$, como na Figura 18, temos que $\overline{EB} > \overline{CB}$ e ainda $\overline{AC} + \overline{CB} < \overline{AE} + \overline{EB}$ que contradiz a hipótese original. Portanto, ponto D pertence ao exterior do $\triangle ABC$.

Figura 18 – Ponto $D = E$



Fonte: Próprio autor

Para provar o teorema, vamos observar a Figura 16, onde o ponto F pertence a AE e $\overline{EF} = \overline{EB}$. Esta escolha é possível, desde que $\overline{BE} < \overline{AE}$, o que é garantido pela desigualdade:

$$\measuredangle EAB < \measuredangle CAB = \measuredangle EBA.$$

Construímos $G \in EC$ tal que $\overline{EG} = \overline{ED}$. Vamos provar que o ponto G está entre o ponto C e o ponto E.

Como $\triangle EFG$ é congruente ao $\triangle EBD$ (congruência LAL), sabemos que a área do $\triangle ABC$ é maior que a área do $\triangle ABD$.

Para provar que o ponto G está entre C e E, observamos que $\overline{FG} = \overline{BD}$ (da congruência LAL) e pela hipótese $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AD} + \overline{BD}$.

Note que

$$\begin{aligned} \overline{AC} + \overline{BC} &= \overline{AF} + \overline{FD} + \overline{FG} \\ &= \overline{AF} + \overline{BG} + \overline{FG} \\ &= \overline{AF} + \overline{BC} \pm \overline{CG} + \overline{FG} \end{aligned} \tag{4.1}$$

ou

$$\overline{AC} = \overline{AF} \pm \overline{CG} + \overline{FG}.$$

O sinal $\pm$ mostra se o ponto G está entre os pontos E e C ou acima do ponto C. A alternativa $\overline{AC} = \overline{AF} + \overline{CG} + \overline{FG}$ é impossível, pois o caminho mais curto entre dois pontos é uma linha reta. Portanto, o ponto G está entre E e C.

Denotamos a área do triângulo $\triangle XYZ$ por $A(XYZ)$. Assim,

$$\begin{aligned} Área(ABC) &= Área(ABE) + Área(EFG) + Área(AFG) + Área(ACG) \\ &= Área(ABE) + Área(BDE) + Área(AFG) + Área(ACG) \\ &= Área(ABD) + Área(AFG) + Área(ACG). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Portanto, $Área(ABC) > Área(ABD)$. A área do triângulo isósceles é maior do que a área de qualquer triângulo de mesma base e mesmo perímetro.

4.1 Outra prova para o Teorema 2

Esta prova do Teorema 2 consiste em uso do Teorema de Heron (Teorema 3) para sua demonstração.

Dado um triângulo ABC qualquer com a,b,c as respectivas medidas dos seus lados: $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$. Além disso, suponha que P é o perímetro e T é a área do triângulo dado.

De acordo com Heron, para qualquer triângulo ABC, temos

$$16T^2 = [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2].$$

De outra forma, a fórmula também pode ser escrita como:

$$16T^2 = P(P-2a)(P-2b)(P-2c),$$

onde $P = a + b + c$.

Esta fórmula pode ser escrita como o produto de dois fatores, usando $P = 2p$

$$T = \sqrt{p}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

e ainda se $p = \dfrac{P}{2}$, então

$$T = \sqrt{\frac{P}{2}}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}. \tag{4.3}$$

Teorema 3 (Teorema de Heron)**.** *Para qualquer triângulo ABC,*

$$16T^2 = [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2].$$

De forma equivalente, temos: $16T^2 = P(P-2a)(P-2b)(P-2c)$.

Demonstração:

Denotamos por h o comprimento da altura AD (Figura 19) e chamamos de e comprimento DC. Então

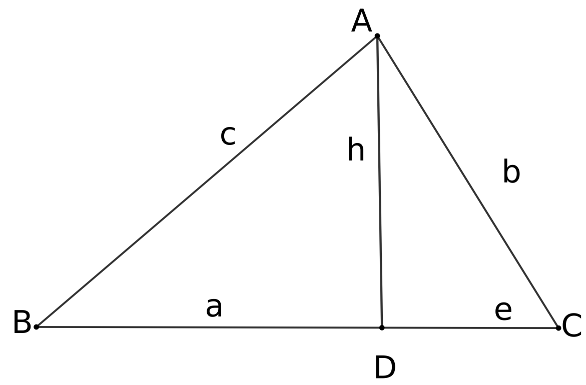
$$c^2 - (a-e)^2 = h^2 = b^2 - e^2.$$

Observamos que $c^2 - a^2 + 2ae = b^2$ e como $a \neq 0$ temos $e = \dfrac{1}{2a}[a^2 + b^2 - c^2]$.

Esta área do triângulo é a metade do produto da altura pela base, isto é, $T = \dfrac{1}{2}ah$. Sabendo que $b^2 - e^2 = h^2$ temos

$$\begin{aligned} 4T^2 &= a^2h^2 \\ &= a^2(b^2 - e^2) \\ &= a^2\left[b^2 - \frac{1}{4a^2}(a^2 + b^2 - c^2)^2\right]. \end{aligned}$$

Figura 19 – Triângulo ABC, de altura $h = \overline{AD}$



Fonte: Próprio autor

De onde vem que:

$$\begin{aligned} 16T^2 &= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 \\ &= [2ab + (a^2 + b^2 - c^2)][2ab - (a^2 + b^2 - c^2)] \\ &= [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Isto prova o Teorema de Heron.

Fatorando (4.4), obtemos:

$$16T^2 = (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$$

e substituindo P pela expressão $P = a + b + c$, segue que

$$16T^2 = P(P-2a)(P-2b)(P-2c).$$

Sabendo que $p = \dfrac{P}{2}$, temos

$$T = \sqrt{p}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Analisando o Teorema 3, poemos observar que $16T^2$ contém 2 fatores. Se fixamos o perímetro P e o lado a, a área máxima, denotamos aqui por M, vai ocorrer quando $(p-b)(p-c)$ seja máximo. $M = (p-b)(p-c)$ tem que ter o valor máximo, Se substituimos $\dfrac{a+b+c}{2}$ por p na igualdade da área máxima, temos:

$$\begin{aligned} M &= (p - (2p - a - c))(p - c) \qquad (4.5) \\ &= (-p + a + c)(p - c) \\ &= -p^2 + ap - pc + cp - ac - c^2 \\ &= -p^2 + p(a + 2c) + (-ac - c^2). \end{aligned}$$

Esta última equação é uma equação quadrática que depende da variável p. O máximo é assumido na vértice da parábola com concavidade para baixo como o termo antes do p^2 é negativo e a função apresenta ponto máximo absoluto. Com discriminante $\triangle = (a+2c)^2 - 4(-1)(-c^2 - ac) = a^2 > 0$, o valor máximo é assumido na vértice com a abscissa: $p = \dfrac{a+2c}{2}$. Sabemos que $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ e igualando as duas últimas equações, temos:

$$a + b + c = a + 2c.$$

Esta igualdade existe, quando $b = c$, ou seja, quando o triângulo é isósceles.

Precisamos considerar também as situações mais gerais em que não se tem nenhum lado de comprimento fixado.

Teorema 4 (Teorema Isoperimétrico dos Triângulos Equiláteros)**.** *Para qualquer triângulo $\triangle ABC$, com o perímetro P fixado, o de maior área é o triângulo equilátero.*

Demonstração:

Tomando um triângulo de lados a, b e c, pelo Teorema de Heron (Teorema 3), temos que:

$T = \sqrt{p}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}$ onde $p = \dfrac{P}{2}$.

Para achar a solução, precisamos usar a desigualdade entre as médias geométrica e aritmética, a saber, $MG \leqslant MA$,

onde $MG = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$ e $MA = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$.

A igualdade $MG = MA$ ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = x_3$.

Para $x_1 = p - a$, $x_2 = p - b$, $x_3 = p - c$, temos

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} &\leqslant \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\\ &\leqslant \frac{3p-(a+b+c)}{3}\\ &\leqslant p - \frac{(a+b+c)}{3}.\end{aligned}$$

Como $p = \dfrac{P}{2}$ e $(a+b+c) = 2p$, substituindo, temos que

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leqslant \frac{P}{2} - \frac{P}{3} = \frac{P}{6},$$

donde segue que

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{P}{6}\right)^3,$$

onde a igualdade ocorre quando $x_1 = x_2 = x_3$, ou seja, quando o triângulo é equilátero, isto é, $p - a = p - b = p - c \Leftrightarrow a = b = c$ e a sua área é igual

$$T = \sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{P}{6}\right)^3} = \frac{\sqrt{3}P^2}{36}.$$

Concluindo o estudo da desigualdade isoperimétrica de um triângulo chegando no resultado que dado um triângulo de perímetro P, a maior área é encontrada quando a medida do lado deste triângulo for igual $\dfrac{P}{3}$.

5 Problema Isoperimétrico para quadriláteros

Também é possível estudar o Problema Isoperimétrico para quadriláteros. Neste capítulo, apresentaremos os resultados:

Teorema 5. *Entre todos os qudriláteros com a área dada, o quadrado tem o menor perímetro.*

Teorema 6. *De todos quadriláteros com o perímetro dado, o quadrado tem a maior área.*

Para demonstrar o Teorema 5, primeiramente vamos provar o Teorema 6.

Lembrando o Teorema de Heron sobre a área T de um triângulo de lados a, b e c em termos do seu semiperímetro p, dado por $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, sabemos que

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

e outra representação seria:

$$16T^2 = P(P-2a)(P-2b)(P-2c).$$

A prova deste resultado já foi feita no presente trabalho, precisamente no Teorema 3. Vamos comparar este resultado na prova da Fórmula de Bretschneider. Carl Anton Bretschneider era um matemático da Alemanha que viveu no período 1808-1878 e trabalhou nas áreas de geometria, integrais logarítmicas, tabelas matemáticas e história da geometria, mas ficou famoso pela descoberta de uma fórmula em 1842 sobre a área de um quadrilátero qualquer.

Suas hipóteses são: dado um quadrilátero $ABCD$ cujos lados medem a, b, c e d, onde

$$a = \overline{AB} \quad b = \overline{BC} \quad c = \overline{CD} \quad d = \overline{DA},$$

e ângulos opostos α e γ conforme a Figura 20. Então, Bretschneider propôs uma fórmula para calcular a área K de um quadrilátero qualquer:

$$K = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}. \tag{5.1}$$

De fato, se traçamos as diagonais AC e DB e analisamos os triângulos $\triangle ADB$ e $\triangle CDB$, cujas áreas são $S_{\triangle ADB}$ e $S_{\triangle CDB}$, temos:

$$S_{\triangle ADB} = \frac{ad \operatorname{sen}\alpha}{2} \quad S_{\triangle CDB} = \frac{bc \operatorname{sen}\gamma}{2}.$$

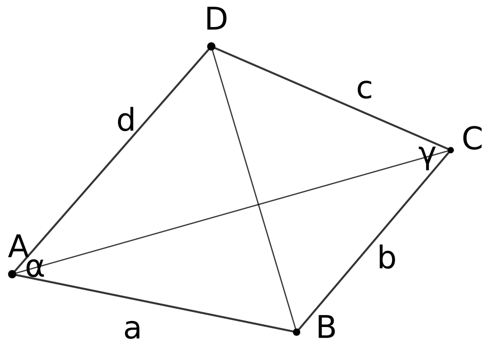


Figura 20 – Quadrilátero $ABCD$

Portanto,

$$K = \frac{ad \operatorname{sen}\alpha}{2} + \frac{bc \operatorname{sen}\gamma}{2}. \tag{5.2}$$

Podemos elevar os dois lados de 5.2 ao quadrado

$$\left(\frac{ad \operatorname{sen}\alpha}{2} + \frac{bc \operatorname{sen}\gamma}{2}\right)^2 = K^2,$$

de onde vem que

$$4K^2 = a^2 d^2 \operatorname{sen}^2\alpha + b^2 c^2 \operatorname{sen}^2\gamma + 2adbc \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\gamma. \tag{5.3}$$

Pela Lei dos cossenos podemos escrever a nossa diagonal $\overline{DB}^2$ como:

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma,$$

ou ainda

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad\cos\alpha - 2bc\cos\gamma. \tag{5.4}$$

Elevando ao quadrado os dois lados de 5.4, temos:

$$\frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{4} = a^2 d^2 \cos^2\alpha + b^2 c^2 \cos^2\gamma - 2adbc\cos\alpha\cos\gamma. \tag{5.5}$$

Agora, somando 5.3 e 5.5, obtemos:

$$\begin{aligned} 4K^2 + \frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{4} &= a^2 d^2 \cos^2\alpha + b^2 c^2 \cos^2\gamma - 2adbc\cos\alpha\cos\gamma \\ &\quad + a^2 d^2 \operatorname{sen}^2\alpha + b^2 c^2 \operatorname{sen}^2\gamma + 2adbc \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\gamma \\ &= -2abcd(\cos\alpha\cos\gamma - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\gamma) + a^2 d^2 + b^2 c^2. \end{aligned} \tag{5.6}$$

E ainda, usando a relação trigonométrica $\cos(\alpha+\gamma) = \cos\alpha\cos\gamma - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma$ obtemos:

$$\begin{aligned}4K^2 + \frac{(-a^2-d^2+b^2+c^2)^2}{4} &= -2abcd\cos(\alpha+\gamma) + (ad)^2 + (bc)^2 \qquad (5.7)\\ &= (ad+bc)^2 - 2abcd - 2abcd\cos(\alpha+\gamma)\\ &= (ad+bc)^2 - 2abcd(\cos(\alpha+\gamma)+1)\\ &= (ad+bc)^2 - 4abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right).\end{aligned}$$

Pela fórmula do cosseno do arco duplo, temos que $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$ ou ainda $\cos(2\theta) + 1 = 2\cos^2(\theta)$.

Seja $2\theta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$.

Substuindo na nossa equação, temos: $\cos(\alpha+\gamma) + 1 = 2\cos^2(\dfrac{\alpha+\gamma}{2})$.

Agora podemos fatorar e simplificar a equação 5.7:

$$16K^2 + 16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = 4(ad+bc)^2 - (-a^2-d^2+b^2+c^2)^2 + 4(ad)^2 + 4(bc)^2 \qquad (5.8)$$

e ainda simplificando o lado direito da equação 5.8:

$$[2(ad+bc) - b^2 - c^2 + a^2 + d^2][2(ad+bc) + b^2 + c^2 - a^2 - d^2]$$

$$\begin{aligned}&=[(b+c)^2 - (a-d)^2][(a+d)^2 - (b-c)^2]\\ &=(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+d+c-b)(c+b+d-a). \qquad (5.9)\end{aligned}$$

Sabendo que o semiperímetro do quadrilátero é $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ e substituindo em 5.9, obtemos

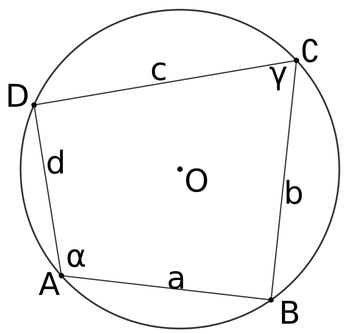
$$16K^2 = 16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - 16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right).$$

Assim, obtemos 5.1. Esta fórmula é válida em particular para quadriláteros inscritíveis.

Lema 2. *Os quadriláteros são inscritíveis, se e somente se, os ângulos opostos são complementares.*

Suponha que um quadrilátero qualquer $ABCD$ é tal que $\measuredangle A + \measuredangle C = \pi$ e $\measuredangle B + \measuredangle D = \pi$. Vamos supor que $ABCD$ não é inscritível. Sabemos que três pontos não colineares A, B e C determinam uma circunferência, que passa por estes pontos e não passa por ponto D. Portanto, D não está sobre a circunferência: ou o ponto D está no interior dela ou fora dela. Denotamos por E um ponto de intercessão de CD com a circunferência. Como $\measuredangle B + \measuredangle E = \pi$, então o ponto $D = E$. De fato, pois em primeiro lugar $\measuredangle E$ é um ângulo do triângulo AED e $\measuredangle E > \measuredangle D$, portanto o quadrilátero é inscritível.

Figura 21 – Esboço de um quadrilátero inscritível



Fonte: Prórpio autor

Por outro lado, se $ABCD$ é inscritível, sabemos que $\measuredangle\alpha$ e $\measuredangle\gamma$, como na Figura 21, são tais que

$$\measuredangle\alpha + \measuredangle\gamma = \frac{arc(BCD)}{2} + \frac{arc(DAB)}{2} = \frac{360^0}{2} = 180^0$$

Portanto, os ângulos opostos são suplementares.

Lema 3. *Entre todos os quadriláteros com os lados dados, aquele com maior área, é inscritível.*

Pela fórmula do Bretschneider 5.1, podemos observar que á área é maior quando $\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$ seria 0. Neste caso, os ângulos $\measuredangle A + \measuredangle C = \pi$.

Podemos concluir, que com a aproximação da soma dos ângulos a π, a área aumenta, ou seja, quando o quadrilátero $ABCD$ é inscritível.

Agora só resta mostrar que entre todos os quadriláteros com perímetro dado, cujos ângulos suplementares em soma são igual a π, o quadrado tem a maior área.

Lembrando o Teorema de Heron 3:

$$16T^2 = P(P-2a)(P-2b)(P-2c).$$

E agora com as condições de $\alpha + \gamma = \pi$ e $\cos(\alpha+\gamma) = -1$, podemos reescrever a equação 5.8:

$$\begin{aligned}
16K^2 &= 4(a^2d^2 + b^2c^2) + 8abcd - (-a^2 - d^2 + b^2 + c^2)^2 \\
&= 4(ab+dc)^2 - (a^2 - d^2 + b^2 + c^2)^2 \\
&= [2(ab+cd) + (a^2 - d^2 + b^2 + c^2)] \times [2(ab+cd) - (a^2 - d^2 + b^2 + c^2)] \\
&= [a+b+c-d][a+b-c+d] \times [c+d+a-b][c+d-a+b],
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$16K^2 = P(P-2a)(P-2b)(P-2c)(P-2d).$$

Podemos reescrever a equação e lembrando da desigualdade entre as médias geométrica e aritmética:

$$[(P-2a)(P-2b)(P-2c)(P-2d)]^{\frac{1}{4}} \leq \frac{P-2a+P-2b+P-2c+P-2d}{4}$$

ou

$$2K^{\frac{1}{4}} \leq \frac{P}{2}$$

E a igualdade só é possível quando: $P-2a = P-2b = P-2c = P-2d$ ou em outras palavras, quando $a = b = c = d$. Portanto quando fixamos o nosso perímetro, ele é o maior, quando o quadrilátero inscrito numa circunferencia é o quadrado que prova o Teorema 6. E a mesma dedução serve para o perímetro, se fixamos a nossa área K e o nosso quadrilátero é o quadrado (provando o Teorema 5).

6 Polígonos: algumas considerações

Depois de conhecer mais e ter provado alguns resultados sobre o Problema Isoperimétrico para triângulos e quadriláteros, é natural pensarmos em provar teoremas análogos para pentágonos, hexágonos ou até polígonos em geral. Sobre esse assunto faremos apenas algumas oservações, a fim de despertar a curiosidade do leitor. Um matemático grego, Zenodorus, que viveu cerca de 200 anos antes de Arquimedes foi conhecido no mundo matemático por seu trabalho sobre as figuras isométricas, onde ele estudou as figuras com o mesmo perímetro e diferentes formas. Parte deste trabalho sobreviveu através das referências dos matemáticos de Alexandria.

Apesar das limitações da época, Zenodorus conseguiu provar muitas afirmações importantes que serviram de impulso para o problema isoperimétrico. As seguintes provas eram mostradas por Zenodorus (HEATH,):

1. De todos os polígonos regulares de perímetro igual, o maior em área é aquele que tem os maiores ângulos.
2. Um círculo possui maior área do que qualquer polígono regular de contorno igual.
3. De todos os polígonos do mesmo número de lados e perímetro igual o polígono equilátero e equiangular é o maior em área.
4. De todas as figuras sólidas cujas superfícies são iguais, a esfera é a maior em conteúdo sólido.

Para relacionar Polígonos com o círculo, propomos o problema:

Problema 8. *Mostre que o círculo tem a área maior que um polígono regular com o mesmo perímetro.*

Podemos supor que o círculo é inscrito num polígono regular.

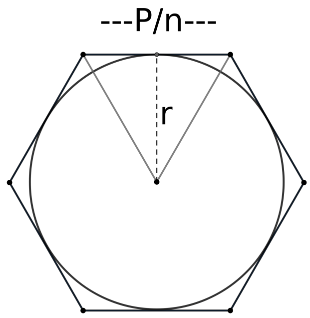
Sabendo que o raio do círculo é r, o perímetro do polígono P e sendo a área do polígono A, podemos observar que a área do polígono pode ser escrita da seguinte maneira:

$$A = n(r\frac{P}{2n}) = \frac{rP}{2}$$

Assim, temos

$$A^2 = \frac{r^2P^2}{4}$$

Figura 22 – Esboço de um quadrilátero inscritível



Fonte: Prórpio autor

e ainda:

$$A = \frac{r^2P^2}{4A}$$

Mas por hipótese $A > \pi r^2$, a área da círculo inscrito. Portanto, apos subtituir A no denominador da última fração por πr^2, temos uma desigualdade

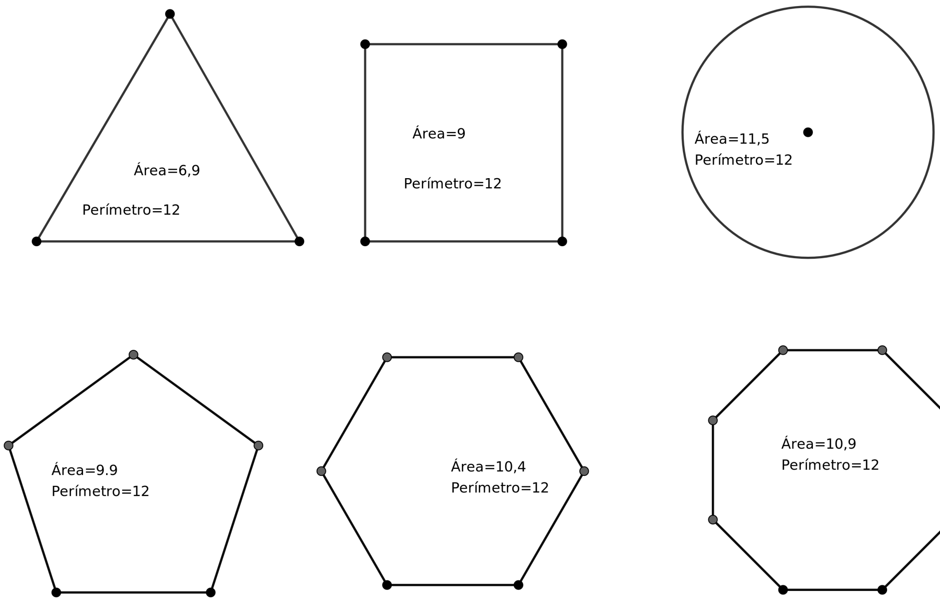
$$A < \frac{r^2P^2}{4\pi r^2} = \frac{P^2}{4\pi}.$$

O raio da circunferência com perímetro P é $\frac{P}{2\pi}$, consequentemente sua área é $\pi(\frac{P}{2\pi})^2$ ou ainda $\frac{P^2}{4\pi}$. Assim, mostramos que a círculo com o perímetro P tem a área maior que um polígono regular com o mesmo perímetro.

A prova do teorema isoperimetrica para polígonos em geral formal não está neste trabalho, mas a intuição pode nos dizer que a figura com maior área e perimetro dado é o circulo. Segue um exemplo com os polígonos regulares com perímetro fixo e a área calculados e construidos pelo autor usando Geogebra, um software educativo no ensino nas aulas de Geometria e Matemática em geral. Esta atividade pode ser feita em sala de aula junto com os alunos. Os alunos podem construir vários polígonos regulares com tantos lados, quantos desejarem para se aproximar à área de um circulo.

Observe que na Figura 23 a área do octógono é a mais próxima da área de um círculo, isto é, quanto maior o número de lados de um polígono regular, mais próximo está o valor da área do polígono com o valor da área do círculo.

Figura 23 – Área dos poligonos regulares com perimetro fixo: $P = 12$



Fonte: Prórpio autor

7 Considerações finais

Este trabalho teve como objetivo principal analisar os Problemas Isoperimétricos na Geometria Plana. Para sua elaboração, foi realizado um estudo dos problemas existentes envolvendo as áreas e os perímetros fixos, as noções básicas da Geometria Euclidiana e algumas noções de cálculo obtidas durante os 4 anos do curso da licenciatura em Matemática.

A partir dos estudos realizados, foi possível perceber que existem vários Problemas Isoperimétricos com suas possíveis variações e as aplicações na ciência e na vida cotidiana das pessoas. Além disso, a existência das várias soluções do problema clássico ao longo da história da matemática.

O desenvolvimento deste trabalho contou com algumas dificuldades, como a escolha do que estudar na geometria e como ensinar, depois o que foi aprendido, a seleção das questões relevantes, a vasta variedade das soluções existentes na literatura (sendo que algumas delas usam cálculos avançados), suas aplicações entre outras.

A maior contribuição deste trabalho está no fato de mostrar que, tanto geometria quanto cálculo, podem ser vistos como forma de solucionar os problemas de nosso cotidiano e da compreensão da natureza por méio das ferramentas da Matemática simples e clara.

Por fim, não foi o bjetivo deste trabalho usar Cálculo Variacional ou Geometria Diferencial, mas mostrar as simples soluções que podem ser aliadas ao ensino da Matemática nas escolas básicas e no ensino superior. No entanto, como continuidade em trabalhos futuros, poderiam ser áreas exploradas.

Referências

ARAúJO, P. V. *Geometria Diferencial*. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. Citado na página 27.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: UNICAMP, 2002. 394 p. Citado na página 12.

FLEMMING, D. M.; GONçALVES, M. B. *Cálculo A: funções, limites, derivação,integração*. São Paulo: PEARSON, 2010. Citado na página 28.

HEATH, T. L. *A History of Greek Mathematics*. [S.l.]: Dover. 207 - 2013 p. Citado na página 44.

KAZARINOFF, N. D. *Geometric Inequalities*. Yale University: The Mathematical Association of America, 1961. Citado na página 26.

LIMA, R. F. de. *Introdução à Geometria Diferencial*. Rio de Janeiro: SBM, 2016. Citado na página 27.

LINDQUIST, M. M.; SCHULTE, A. P. *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo: ATUAL EDITORA, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 13, 14 e 19.

MILAUSKAS, G. [S.l.: s.n.], xxxx. Citado na página 15.

S., M. R.; PARKER, G. D. *Elements of Differential Geometry*. New Jersey: PRENTICE-HALL, 1977. 49-66 p. Citado na página 27.

S.P., A. *Zadachi na Maximum i Minimum*. Peterburg: BXV-SPB, 2005. Citado na página 26.

TIHOMIROFF, V. *Raskazi o Maximumumah i Minimumah*. Moskva: MSMNO, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 26.

Z., U. *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*. University of Chicago: University of Chicago, 1982. Citado na página 14.