Universidade Federal do Rio Grande – FURG
Instituto de Matemática, Estatística e Física – IMEF
Licenciatura em Matemática

Joel Quevedo de Matos

OS SÓLIDOS PLATÔNICOS E SUAS APLICAÇÕES NO ENSINO BÁSICO, DESENVOLVIMENTO/DIFUSÃO DE MATERIAL.

RIO GRANDE – RS
2018

Joel Quevedo de Matos

OS SÓLIDOS PLATÔNICOS E SUAS APLICAÇÕES NO ENSINO BÁSICO, DESENVOLVIMENTO/DIFUSÃO DE MATERIAL.

Artigo apresentado ao Curso de Matemática Licenciatura, da Universidade Federal do Rio Grande – FURG, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática, sob orientação do professor Mario Rocha Retamoso.

RIO GRANDE – RS

2018

AGRADECIMENTOS:

Agradeço a toda minha família, especialmente a minha mãe, meu pai e meu irmão, foram vocês que me apoiaram durante todo o processo de graduação.

Agradeço aos meus amigos, que me salvaram nos momentos difíceis.

Agradeço aos professores e demais funcionários da universidade, que são parte indispensável do processo de ensino aprendizagem.

E agradeço especialmente ao meu orientador e a minha banca, espero sinceramente que vocês não sejam os únicos a ler esse trabalho.

A matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também, para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.

Descartes, in Malba Tahan

Resumo:

Este trabalho busca compreender os sólidos platônicos e propor atividades no ensino de geometria, bem como relatar a forma que esses conteúdos são trabalhados no contexto das escolas públicas brasileiras e espera-se que contribua para o ensino desses conteúdos disponibilizando material relevante aos docentes e/ou licenciandos em matemática da região.

O trabalho não se limita às atividades no ensino médio, abordando também algumas potencialidades dos poliedros no ensino fundamental por meio das figuras planas utilizadas na sua construção das suas faces e de atividades de trabalho manual que podem ser realizadas em qualquer etapa.

São discutidas algumas formas de se construir os poliedros e quais as suas vantagens pedagógicas, sendo que nem todas as formas de construção possíveis foram abordadas.

Abstract:

This work aims to understand platonic solids and suggest practices to teach geometry as well as describe the way these contents are being taught in Brazilian public schools. It´s hope that it will contribute to teach these contents providing relevant material to local teachers and graduated in mathematics.

The work isn't only limited to high school activities, but also addresses the polyhedra potentials in elementary school through plane figures used in its faces construction and handwork that can be perfomed. Some Ways to build these polyhedra and their pedagogical benefits are also discussed.

Sumário:

Introdução:

A geometria é a base da matemática, o alicerce sobre o qual a ciência dos cálculos tem apoiado todo o seu saber. Antes dos sábios gregos formularem os axiomas básicos para a criação da álgebra, os seres humanos já demarcavam territórios e calculavam a produção com base na área de plantio, efetivamente medindo a terra.

> "Há dúvidas quanto a origem da geometria, mas sabe-se que esta tem raízes muito antigas. Indícios históricos apontam para o nascimento da Geometria como forma de satisfazer as necessidades humanas e solucionar problemas práticos. De acordo com o Dicionário Enciclopédico

> (2008), desde 2000 anos ª C os babilônios já utilizavam a Geometria como forma de demarcar territórios. Aproximadamente 1300 anos a. C os egípcios também empregavam a Geometria para medir terrenos e em suas edificações. Na Grécia estava ligada a medir terra, o que explica a origem da palavra criada pelos gregos; Geo significa terra e metria significa medida." SANTOS, Cristiane, 2009.

Segundo CLEMENTE, João Carlos e CIA o ensino de geometria ficou um longo período em segundo plano no currículo das escolas brasileiras, os motivos para isso são variados, mas incluem o fato de diversos livros didáticos reservarem ao ensino de geometria seus capítulos finais e, baseando-se em Lorenzato (1995), afirmar que os cursos de capacitação de professores não formam profissionais preparados para ensinar esse conteúdo.

Essa visão vem mudando recentemente, onde a geometria entra em foco nas propostas escolares e é fonte de novos trabalhos a cada ano. Entretanto, deve-se notar que a mudança de um paradigma educacional é um processo lento e mesmo trinta anos de divulgação e pesquisa pode não ser suficiente para uma mudança descer por toda a cadeia educacional.

RODRIGUES, Margarida & BERNARDO, Marisa, autoras portuguesas, ressaltam que ocorreu durante a década de 60 uma tentativa de algebrização da geometria que, segundo elas, seria uma tendência global. LOBO, Joice & BAYER, Arno acreditam que a geometria foi posta de lado nessa época graças à influência do Movimento da Matemática Moderna, iniciado nos Estados Unidos da América (EUA), que criou em seu currículo cadeiras isoladas para o ensino de geometria, causando uma separação entre o ensino de geometria e o ensino de outras áreas da matemática.

Essas mudanças da década de 60 permearam diversos países, incluindo o Brasil. Não faz sentido supor que elas tenham se instalado nas salas de aula de forma imediata, e sim que passaram anos percorrendo as universidades e centros de ensino, no qual conseguiram se disseminar até chegarem nas escolas através de novos professores formados num currículo com a geometria algebrizada.

Não é estranho perceber que o ensino em outros países exerce influência sobre o ensino brasileiro, afinal, vivemos em uma sociedade aberta à comunicação e objetos culturais transitam abertamente. Além disso, como vemos no estudo de LOBO, Joice & BAYER, Arno, o Brasil vêm importando modelos de educação através dos séculos:

> "Até finais dos anos de 1920, a Matemática escolar brasileira era dependente dos livros de matemática franceses, a estruturação do ensino de Matemática no Brasil era dada por traduções,

> compilações e adaptações de manuais franceses." LOBO, Joice & BAYER, Arno, 2004, página 20.

Ainda segundo LOBO, Joice & BAYER, Arno, o Brasil demonstra em sua história diversas tentativas de se libertar dos modelos estrangeiros, mas essas tentativas nem sempre resultaram em melhorias na educação, embora algumas tenham apresentado resultados tão bons que acabaram sendo levadas para fora de nossas fronteiras.

Entretanto, devemos notar que a algebrização da geometria já havia sido tentada no Brasil em meados da década de 1930 com a Reforma Francisco Campos, resultando em insatisfação por parte dos professores.

A chamada "confusão de assuntos" foi corrigida com a Reforma Gustavo Capanema em 1942 (um intervalo de 12 anos). Entretanto, conforme já dito, a geometria seria colocada de lado com o Movimento da Matemática Moderna, que favorecia uma matemática voltada para a computação, visando desenvolvimento tecnológico.

A geometria voltou aos currículos em 1998, quando o Ministério da Educação (MEC) criou os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e incluiu a geometria da 5° a 8° séries, favorecendo construções com régua e compasso (Geometria Euclidiana), numa retomada às origens. Esse mesmo PCN conferia ao ensino médio o ensino da geometria espacial, conteúdo onde se incluem os sólidos platônicos.

Essa volta, entretanto, não aconteceu de forma simples.

Estando deficiente durante vários anos, a geometria, quando observada de um âmbito nacional, não contava com muitos professores capacitados, nem livros didáticos ou acesso a materiais específicos. Ficava a cargo dos professores buscar ferramentas e métodos de ensino por conta própria.

> "O ensino da Geometria, se comparado com o ensino de outras partes da Matemática, tem sido o mais desvairador; alunos, professores, autores de livros didáticos, educadores e pesquisadores, de tempos em tempos, têm se deparado com modismos fortemente radicalizantes, desde o formalismo impregnado de demonstrações apoiadas no raciocínio lógico-dedutivo, passando pela algebrização e indo até o empirismo

> inoperante. No Brasil, já fomos mais além: a Geometria está ausente ou quase ausente da sala de aula." LORENZATO, Sergio, página 3, 1995.
>
> "Soluções esporádicas ou pontuais não serão suficientes para resolver a questão da omissão geométrica. É preciso um amplo e contínuo esforço de diferentes áreas educacionais para que mudanças se efetivem no atual quadro do ensino da Geometria escolar." LORENZATO, Sergio, página 4, 1995.

Atualmente, CLEMENTE, João Carlos et alii mostram que a retomada da geometria nas escolas é progressiva. Os trabalhos de Lorenzato e outros autores abriram caminho para novos geômetras, de forma que o ensino de geometria tem conquistado espaço nas escolas brasileiras.

Trabalhos como o de PELLEGRIN, Patrícia & FIOREZE, Leandra tem sido desenvolvidos com o intuito de reabilitar o ensino de geometria. Elas acreditam que o ensino de geometria teria um melhor aproveitamento se fossem usadas tanto ferramentas digitais quanto não digitais. As autoras tratam questões atuais, apresentando, inclusive, o trabalho com origami como uma forma eficiente de utilizar objetos concretos no ensino de matemática.

> "As contribuições dos trabalhos feitos a partir do Origami na geometria colaboram na compreensão e no aperfeiçoamento dos processos cognitivos da Matemática. O simples manuseio do papel torna possível o estudo de espaços e formas que fazem parte das ações de ensino e aprendizagem." PELLEGRIN, Patrícia & FIOREZE, página 4.

Outros autores, como MANOEL, Wagner, falam sobre os benefícios que o ensino de geometria plana traz para a prática docente, ressaltando que o trabalho com a representação gráfica de figuras auxilia a compreensão do aluno em mais do que apenas conceitos geométricos como espaço e distância, mas também na compreensão de outros conteúdos matemáticos (como soma vetorial, por exemplo). Assim de disponibilizar uma nova ferramenta avaliativa para o professor.

Segundo MANOEL, Wagner, um aluno que, ao desenhar um círculo, não termina a circunferência no mesmo ponto que ela começou provavelmente ainda não dominou o conceito de continuidade corretamente, enquanto aquele que mesmo dispondo de uma régua ainda cria segmentos de linha tortos não domina bem os instrumentos.

Nesse sentido, não seria um erro considerar que o trabalho com dobradura apresentado por PELLEGRIN, Patrícia & FIOREZE, Leandra é uma junção entre a geometria plana e a geometria espacial que permitiria aos alunos do ensino médio uma melhor compreensão do espaço e da matemática do espaço.

Como já foi mencionado, esse tipo de trabalho está se tornando cada vez mais frequente, embora não exista nenhum movimento organizado em função do resgate da geometria e nenhuma politica pública visando o seu retorno.

Autores como LORENZATO não acreditam que trabalhos pontuais possam realmente fazer a diferença no ensino de um país, entretanto, acreditamos como FAZENDA, Ivani que um movimento educacional começa apenas quando os professores se interessam por um determinado assunto e buscam formas de propagar esse conhecimento.

> “Sempre presente na história da humanidade, na construção dos simples aos mais complexos objetos, na formulação de teoremas e na facilitação dos processos de ensino e de aprendizagem, a geometria não pode ser ignorada ou pensada como uma atividade qualquer. Dessa forma, entende-se como essencial o estudo do conteúdo de geometria no ambiente escolar, tanto na relação para entender as formas ao seu redor quanto na ajuda para posterior adaptação que o mundo nos impõe, pois possuem grande aplicabilidade na vida cotidiana.” PELLEGRIN, Patrícia & FIOREZE, Leandra, página 8.

Dessa forma, buscamos nos integrar com os autores que atualmente usam os conceitos de construção e montagem para tornar o ensino de geometria mais dinâmico e atraente ao aluno. Nesse caso, o trabalho de PELLEGRIN, Patrícia & FIOREZE, Leandra, como um precursor do trabalho que pretendemos apresentar, visto que trabalhamos com o uso opcional do software Geogebra (embora as oficinas possam ser desenvolvidas com régua e compasso se o professor considerar mais apropriado) e utilizamos a dobra e encaixe como uma ferramenta de ensino da geometria espacial.

Assim como as autoras, acreditamos que a inserção dos conteúdos na era digital seja positivo para o ensino de matemática nas escolas públicas. Segundo HAISASHIDA, Keila a manipulação dos objetos é um auxiliar poderoso na tarefa de compreender os conceitos da geometria, sendo que tanto a manipulação do objeto concreto quanto a manipulação de um Objeto Virtual de Aprendizagem (OVA) servem bem a esse propósito.

Permitindo ao aluno interagir com o conteúdo sem um controle explícito do professor, isso é, mantendo o professor como um auxiliar do processo de aprendizagem, estamos estimulando os alunos a construírem seu próprio conhecimento de uma forma dinâmica. Esse método parece ter sido bem-sucedido em diversos países ao redor do mundo, tanto que consta como uma das recomendações do PISA para tornar a aula de matemática mais interessante e eficiente.

Os sólidos platônicos ocupam dois nichos do ensino pouco desenvolvido nos níveis fundamental e médio, sendo ao mesmo tempo um conteúdo de geometria e um tipo de objeto concreto. Nota-se que a importância do objeto concreto na fase inicial da aprendizagem é um consenso entre os autores citados, mas seu uso no ensino médio é pouco valorizado.

> "Lorenzato (2006) enfatiza que a criança realiza suas primeiras experiências de vida quando vê, ouve e manuseia com a ajuda da linguagem, mas principalmente com o auxílio da percepção espacial iniciando suas descobertas. É importante ressaltar que a criança deve ser incentivada a explorar o espaço em que vive, porque a efetiva aprendizagem acontece "pelas ações mentais que a criança realiza quando compara, distingue, separa e monta" (LORENZATO, 2006, p. 44). São essas habilidades que podem estimular sua percepção visual e permitir que ela se localize no espaço à sua volta." em: CLEMENTE, João Carlos e CIA, ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA: UM ESTUDO A PARTIR DOS PERIÓDICOS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA , pagina 3.

O que nos motiva, em decorrência desse panorama, é apresentar um material atual sobre o assunto, auxiliando professores da rede pública a adequar esse conteúdo às suas aulas.

Capítulo 1: Conhecendo os objetos:

Os sólidos platônicos atendem às seguintes condições:

1. são poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares e concruentes entre si;
2. de cada vértice partem o mesmo número de arestas.

Isso significa que o ângulo entre duas faces adjacentes deve ser menor que 180° e a somatória dos ângulos em um mesmo vértice deve ser menor que 360°.

Dessa forma, podemos avaliar quais figuras planas regulares podem formar um poliedro platônico, pois como não existem figuras planas com apenas um ou apenas dois lados elas não podem formar um poliedro.

Um triângulo equilátero possui ângulo interno de 60°, por isso é possível criar um poliedro platônico juntando em um mesmo vértice três, quatro e cinco triângulos (vértice com somatória 180°, 240° e 300° respectivamente). Vértices com três triângulos formam um tetraedro, vértices com quatro triângulos formam um octaedro e vértices com cinco triângulos formam um icosaedro.

Três quadrados (vértice com somatória de 270°) formam o cubo.

Três pentágonos (vértice com somatória de 324°) formam o dodecaedro.

Outras combinações apresentam vértice com somatória igual ou superior a 360°, violando a segunda regra.

Posteriormente, Arquimedes criou uma série de poliedros convexos que admitiam diversas figuras planas em um mesmo objeto. Esses poliedros Arquimedianos foram feitos por um processo conhecido como truncamento, no qual se atravessa um plano pelas arestas de um vértice, removendo-o do objeto.

Para realizar o processo de truncamento é preciso primeiro escolher o vértice a ser removido, então selecionar o ponto médio de todas as arestas que partem desse vértice (ou outro ponto das arestas que fiquem a uma mesma distância do vértice), encontrar o plano que contém todos esses pontos, a parte do plano que está contida no poliedro se tornará então uma nova face para o objeto (isso sempre ocorre nos sólidos platônicos, pois as arestas são de igual medida e suas extremidades se encontram todas em um mesmo plano).

Note que para obter os resultados apresentados abaixo é necessário truncar os vértices originais da figura usando o ponto médio dos vértices originais.

Uma curiosidade sobre os sólidos platônicos é que, se aplicarmos o truncamento em todos os vértices originais de qualquer um deles obteremos um sólido platônico: truncando os vértices de um icosaedro teremos um dodecaedro; truncando os vértices de um dodecaedro teremos um icosaedro; truncando os vértices de um octaedro teremos um cubo e truncando os vértices de um cubo teremos um octaedro.

Truncando os vértices de um tetraedro teremos um tetraedro.

Os sólidos platônicos foram por muitos anos considerados figuras “perfeitas”, pois Platão acreditava que os conteúdos abstratos da matemática, por estarem distantes do “mundo dos sentidos” eram mais refinados que a matéria bruta do mundo material.

> “Neste sentido, atribuímos à concepção platônica a criação de um misticismo em torno do seu ensino. Platão considerava que os conhecimentos matemáticos mais abstratos, por estarem longe do mundo dos sentidos, teriam o poder de levar a alma até "o mundo perfeito".” ALVEZ, Adriada, “INTERDISCIPLINARIDADE E MATEMÁTICA”, in FAZENDA, Ivani, O QUE É INTERDISCIPLINARIDADE? Página 102.

Dessa forma, os sólidos platônicos eram considerados figuras superiores, sendo inclusive criada uma relação entre eles e os elementos do universo conforme acreditavam os elementistas, um movimento filosófico que tentava entender do que as coisas eram feitas e acreditava que o universo era composto apenas por quatro elementos (mesmo que não houvesse consenso sobre isso). Eles atribuíram uma relação entre os sólidos platônicos e os elementos de que o universo era constituído, nesse sistema, os sólidos representavam:

Cubo: a Terra.

Icosaedro: a Água.

Octaedro: o Ar.

Tetraedro: o Fogo.

Dodecaedro: o Universo.

Esse entendimento mítico da matemática não persistiria ao longo do tempo, sendo abafado na idade média, redescoberto durante a renascença e abandonado novamente quando o pragmatismo científico o decretou como irrelevante.

Atualmente, essa analogia é utilizada apenas por alguns misticos interessados no tratamento com cristais e algumas religiões orientais que influenciaram o pensamento dos elementistas. O movimento dos elementistas foi desmontado ainda na Grécia antiga por Demócrates, embora ainda existam muitas referências as suas ideias em diversos setores da sociedade, principalmente na cultura do entretenimento.

Perspectivas pedagógicas:

Quando for referida a estabilidade ou a instabilidade de um sólido platônico, estará sendo feita referência à facilidade com que o sólido, sendo rotacionado de sua posição de repouso sobre uma superfície, retorne à posição de equilíbrio. Nesse sentido, quanto maior for o ângulo que um sólido precisa ser rotacionado em relação à superfície sobre a qual repousa uma de suas faces, para que não retorne à sua posição de equilíbrio, mais estável será o poliedro.

O tetraedro:

Um dos mais estáveis sólidos platônicos, é necessário incliná-lo mais de 54° para fazer com que um tetraedro role pelo chão. Por ser uma forma de pirâmide, ele apresenta praticamente as mesmas aplicações que a pirâmide de base quadrada.

Cálculo da estabilidade: Um sólido platônico apoiado sobre um plano pode ser rolado sobre uma aresta, de forma que para realizar o cálculo da estabilidade é necessário calcular o ângulo entre duas faces do poliedro. Este cálculo considera os poliedros possuindo densidade homogênea, de forma que é possível dividir o sólido ao meio com um plano que passa pela aresta sobre a qual ele vai ser rotacionado e ambas as metades possuem a mesma massa.

Se cortarmos o tetraedro com um plano cujo vetor diretor seja uma das arestas da base e que contenha o ponto médio dessa mesma aresta, estaremos então dividindo o tetraedro ao meio.

Note que a reta que vai do ponto médio de uma aresta até qualquer um dos vértices que não esta contido nessa aresta é ortogonal com a própria aresta, pertencendo então ao plano que criamos. Isso implica que a aresta que liga esses dois vértices também está contida no plano de corte.

A projeção (sombra) do poliedro no plano de corte (ortogonal a base) será um triângulo isósceles cujos lados são formados por uma aresta do tetraedro e duas alturas do triângulo equilátero que forma o sólido.

Dessa forma temos um triângulo cujos lados medem: L, sqrt(3/4)L e sqrt(3/4)L.

Buscamos encontrar o ângulo formado pelos lados sqrt(3/4)L e sqrt(3/4)L de agora em diante denominado ângulo θ

Como o triângulo que estamos examinando é isósceles, sabemos que a mediana, a mediatriz e a bissetriz relativas ao ângulo θ são todas iguais, portanto a bissetriz de θ divide esse triângulo original em dois triângulos retângulos congruentes cuja hipotenusa é sqrt(3/4)L e o cateto oposto a θ/2 mede L/2.

Portanto, sen(θ/2) = (L/2)/(sqrt(3/4)L) → θ/2 = 32,26° → θ = 70,53°

Para garantir que o poliedro possa rolar é preciso rotacioná-lo sobre o vértice até que o ângulo entre a outra face seja menor ou igual que o ângulo entre a atual base do objeto e a superfície na qual ele está apoiado.

Dessa forma, sabemos que 180° = α + 70,53° +β , e queremos o valor de β quando β=α .

180° = 2 α + 70,53°

109,47° = 2 α

α = 54,73°

O cubo:

Quase tão estável quanto o tetraedro, é necessário inclina-lo 45° para que ele role sobre a superfície. O cubo talvez seja o mais utilizado dos sólidos platônicos, ele encontra aplicações na construção civil e no planejamento urbano, também é extremamente presente em jogos desde a antiguidade, sendo o formato mais comum para a produção de jogos de dados. Atualmente, o cubo foi utilizado no jogo Minecraft (minerar e construir) como unidade padrão de medida para todos os materiais.

O ângulo entre as faces do cubo é de 90°, portanto é preciso incliná-lo 45° ou mais para que ele perca sua estabilidade. O cálculo é semelhante aquele apresentado no tetraedro.

O Octaedro:

Um sólido instável, basta incliná-lo pouco mais de 35,26° para que ele não volte a sua posição original, o octaedro já foi utilizado na computação gráfica como aproximação do formato de uma gota, ele aparece em muitos jogos antigos, principalmente na plataforma super-nintendo.

Usando o mesmo processo que foi utilizado para o tetraedro é possível criar um plano que divide o octaedro em dois pedaços, a sombra do octaedro sobre esse plano é um quadrilátero ABCD tal que todos os lados são iguais a sqrt(3/4)L e o segmento AC é igual à aresta original do octaedro (L).

Dessa forma, temos dois triângulos (ABC e BCD) semelhantes aquele criado no cálculo do tetraedro, compartilhando o lado L.

Assim sendo, sabemos que o ângulo entre as faces que se encontram no vértice é 70,53°. Logo, o ângulo entre as faces que se encontram na aresta é dada pelo cálculo:

$2 \times 70{,}53° + 2\alpha = 360°$

$2\alpha = 218.94°$

$\alpha = 109{,}47°$

O ângulo que precisamos incliná-lo é:

$(180° - 109{,}47°)/2 = 35{,}27°$

O dodecaedro:

Precisando ser inclinado apenas pouco mais de 24°, o dodecaedro é o segundo sólido platônico mais instável.

O cálculo da estabilidade desse poliedro é um pouco diferente dos outros, primeiro deve-se criar um plano contendo os cinco vértices ligados a base, isso é possível pois todas as arestas possuem o mesmo comprimento e a mesma inclinação em relação a base (esse é um poliedro regular).

Os cinco vértices (ABCDE) formam um pentágono sobre esse novo plano, as arestas desse pentágono pertencem a triângulos de lados M, M e P (sendo P a aresta sobre o plano) se observarmos a face de onde elas saíram. Assim sendo, o ângulo entre os lados M e M é o ângulo interno de um pentágono (108°).

Com cálculos simples é possível ver que P = 1,62M

Dessa forma, podemos criar um triângulo ABC, sendo esse triângulo isósceles de lados P, P e L. Como ABCDE é um pentágono, o ângulo entre P e P é 108°. Novamente, é fácil calcular que L vale 1,62P, ou seja, 2,62M.

Usando o vértice que passa em B e leva até a base como vetor diretor de um plano perpendicular as faces que contêm as retas AB e BC, podemos criar esse plano passando pelo ponto médio do vértice citado (PM), de forma que ele vai conter também os pontos A e C (as linhas que vão de PM até os pontos A e c são ortogonais com o vértice).

Como o plano contém os pontos A e C também contêm o segmento AC que é igual a L, ou seja, 2,62A.

Os segmentos que vão de PM até A e de PM até C são iguais e valem 1,76A (Cálculos triviais), o ângulo entre as faces é igual ao ângulo entre PM-A e PM-C, ou seja, 131,9°.

(180° - 131,9°)/2 = 24,05°.

O icosaedro:

O mais instável dos sólidos platônicos, é necessário inclinar um icosaedro apenas 21° para que ele não retorne a sua posição inicial.

O icosaedro já foi utilizado como uma aproximação aceitável para a esfera e tentava-se transformar uma esfera em um icosaedro da mesma forma que se tentava fazer a quadratura do círculo. Os motivos para isso incluem o fato dele ser o sólido platônico com o maior número de lados e de ser difícil trabalhar com números irracionais sem o auxílio de calculadoras.

Para calcular a estabilidade do icosaedro é necessário calcular o ângulo entre as faces. Começamos esse processo selecionando um vértice que denominamos VB, todos os vértices ligados a VB por uma aresta pertencem a um mesmo plano (P1) e formam um pentágono ABCDE.

O triângulo ABC tem como ângulo ABC o ângulo interno de um pentágono. Sendo os segmentos AB e BC arestas (A) do icosaedro, podemos calcular o segmento AC como sendo 1,62A.

O ponto médio da aresta que vai de VB até B será chamado de PM, e à distância de PM até A é a mesma de PM até B, ou seja, sqrt(3/4)A. Podemos criar um plano (P2) usando a aresta VB-B como vetor diretor de tal forma que PM pertença a P2, assim como vimos no tetraedro, os pontos A e C pertencem a P2 e o ângulo entre os segmentos PM-A e PM-C é o mesmo ângulo entre as faces.

Temos assim o triângulo PM-A-C, de lados sqrt(3/4)A, sqrt(3/4)A e 1,62A. Sendo esse um triângulo isósceles é fácil calcular o ângulo entre os lados de igual medida, que é aproximadamente 138,56°.

(180° - 138,56°)/2 = 20,72°.

Os sólidos de Arquimedes:

Os sólidos de Arquimedes apresentam uma variedade maior do que os sólidos de Platão por permitirem que diferentes figuras planas regulares fossem faces de um mesmo objeto, muitos deles são obtidos truncando sólidos platônicos usando pontos diferentes daqueles citados anteriormente. Arquimedes também trabalhou truncando seus próprios sólidos.

Os sólidos de Arquimedes são os seguintes:

Tetraedro truncado.

Octaedro truncado.

Cubo truncado.

Dodecaedro truncado.

Icosaedro truncado.

Cuboctaedro.

Cuboctaedro truncado.

Icosidodaedro.

Icosidodaedro truncado.

Truncamento: Além do truncamento proposto por Arquimedes, existe uma segunda (e mais antiga) forma de truncar os sólidos Platônicos, ela consiste em usar como ponto de truncamento o centro da figura (entendido aqui como o centro do círculo cuja circunferência contêm todos os vértices da figura) em vez de usar o ponto médio do vértice.

Quando truncados dessa forma, os sólidos platônicos dão como resultado outro sólido platônico. O tetraedro resulta em si mesmo, o cubo resulta no octaedro, o icosaedro resulta no dodecaedro, o octaedro resulta no cubo e o dodecaedro resulta no icosaedro.

Capítulo 2: Alguns tipos de confecção:

Por recorte e colagem:

Método: Talvez o método de construção mais utilizado na atualidade, o recorte e colagem é simples e direto, as faces do poliedro são desenhadas ou impressas numa folha de papel junto com abas que servem para colar uma face na outra. A casca do poliedro e as abas devem ser recortadas como um todo e então as abas são coladas sobre as faces para que a figura seja construída.

Esse método será dividido em duas partes para uma análise mais precisa:

(1) Desenhando as figuras no papel:

Quando os estudantes desenham as figuras no papel com régua e compasso o trabalho se concentra na construção de figuras planas, no planejamento das abas de encaixe e na capacidade do docente de criar uma projeção tridimensional do objeto antes de realizar o trabalho de recorte.

Essa forma desenvolve as capacidades mentais do estudante tanto quanto sua destreza manual, exige que ele trabalhe com diversos instrumentos (réguas, compassos…) e lide com erros de medida.

Sua maior desvantagem é o tempo necessário para a realização de todas essas atividades, é preciso considerar que os alunos cometerão erros e podem obter ao final uma figura que não encaixa da forma que deveria

(2) Usando um molde impresso:

O que se ganha em tempo e se reduz em frustração também é perdido em potencialidade didática. Enquanto no método anterior mesmo as figuras mais simples desempenhavam um trabalho enorme no desenvolvimento dos educandos nessa, mesmo as figuras mais complexas são reduzidas a simples trabalho manual.

Isso não é, necessariamente, algo ruim.

Um molde impresso economiza tempo e permite ao conteúdo ser trabalhado em anos anteriores, ele não exige do aluno a capacidade de construir figuras planas com régua e compasso nem possibilita erros na hora de colocar as abas de colagem. Mesmo assim, ainda desenvolve a capacidade de pensamento tridimensional e auxilia na destreza manual do educando.

Ambas as formas de construção resultam em uma figura frágil cuja durabilidade pode ser discutida.

Por dobradura e encaixe:

Método: Dobradura e encaixe (ou origami) é um método pouco utilizado na educação brasileira, poucos dos professores que trabalham com origami utilizam-nos para a produção de sólidos platônicos. Mesmo assim, é possível encontrar diversas versões dessa forma de construção na internet, algumas delas são traduções de projetos estrangeiros.

Esse método consiste em produzir quadrados (ou retângulos) de papel, então dobrá-los e encaixá-los uns nos outros até formar uma figura, essas construções variam muito dependendo da fonte, sendo que diferentes tipos de dobradura resultam em pontos fortes e pontos fracos diferentes.

Produzir retângulos de papel é uma forma interessante de trabalhar conceitos de área e perímetro em um projeto prático, assim como desenvolver a capacidade de organização de espaço e mesmo gestão de pessoal (uma vez que o trabalho, por seu caráter repetitivo, pode ser desenvolvido em grupos para economia de tempo).

A dobra e o encaixe exigem atenção e disciplina, além de muitas das capacidades, que concernem ao trabalho com espaço, mencionadas no método de recorte e colagem.

As desvantagens desse método se dão em formas distintas para cada estilo de dobradura, alguns apresentam faces vazias e arestas bem definidas, outras possuem faces fracionadas ou arestas difíceis de identificar. Nota-se que esses problemas muitas vezes são o resultado da forma mais artística desse tipo de trabalho e que podem ser ou não aceitáveis dependendo dos objetivos do professor.

Por canudos:

Método: O método de construção por canudos envolve criar os poliedros usando algum tipo de material fino que possa ser encaixado ou colado de forma a criar os sólidos a partir de suas arestas, as faces podem ou não ser preenchidas. Esses materiais podem ser canudos de plástico, palitos de madeira ou qualquer outro material que seja reto e firme o bastante para dar suporte a estrutura do poliedro.

O método é simples e rápido, para ser feito de forma eficaz é necessário que os alunos trabalhem com o transferidor, a régua e algum material de colagem (como cola quente), dessa forma contribuindo para a instrumentalização do aluno.

Muito do que foi dito sobre os processos anteriores se aplica a este, ele trabalha destreza e noções de espaço, entretanto não exige que o aluno planeje seus próximos passos com tanto afinco, pois a parte de planejamento é muito pequena e a maior parte dos erros acontece e ou é corrigida durante o processo de montagem.

A construção por canudos geralmente resulta em figuras levemente distorcidas, algumas por erros de medida e outras pela natureza da cola que foi utilizada para prender os vértices. Esses problemas variam dependendo dos materiais utilizados e muitas vezes podem ser contornados, uma solução comum é construir vértices firmes com encaixes onde prender as arestas.

Digital:

Método: A construção de poliedros digitais é uma das mais pesquisadas atualmente, visto que a informatização do ensino é uma proposta que permeia as universidades do país (a própria FURG já possui cursos a distância).

O processo consiste em utilizar um software como ferramenta para criar versões digitais dos poliedros, tornando esse programa um Objeto Virtual de Aprendizagem (OVA). Note que existem muitos programas capazes de fazer essa construção, alguns exemplos seriam o AutoCad (usado principalmente na engenharia civil) o Winplot (que é um tanto antigo) e o Geogebra.

Quando projetamos as oficinas, escolhemos o Geogebra por uma série de vantagens que esse software oferece, além de seu uso ser gratuito, ele possui uma interface amigável ao usuário leigo e possui versões traduzidas para o português.

A construção por meio de um software apresenta diversas vantagens, pois permite que o discente explore a relação entre as equações e as figuras que elas representam e as medidas são mais precisas que aquelas obtidas com a maioria dos instrumentos físicos (o Geogebra tem uma precisão de mais de dez dez casas, enquanto uma régua comum mal consegue medir milímetros).

Muitos softwares permitem observar as figuras de diversos ângulos, permitindo que os alunos construam mentalmente a ideia de uma figura tridimensional (embora estejam olhando para uma sequência de imagens bidimensionais).

As únicas desvantagens apresentadas na construção digital dos poliedros é que ela não possibilita ao discente tocar o objeto, ele é interativo apenas através de uma interface digital, dando a experiência uma leitura mais abstrata do que os outros exemplos citados.

Outros métodos:

Existem outros métodos possíveis de construção dos sólidos platônicos, exemplos incluem o entalhe em madeira ou pedra e a moldagem em argila ou gesso, eles não foram selecionados para esse trabalho pelas dificuldades que apresentam para serem executados na escola. Entalhe em madeira envolve o manuseio de ferramentas afiadas, poliedros em argila apresentam vértices tortos… Isso não significa que não são aplicáveis, mas fogem a proposta do trabalho.

Capítulo 3: Proposta das oficinas:

Objetivo: Levar a pesquisa e o trabalho realizado para professores da rede pública de ensino que estejam trabalhando nas escolas, ou seja, em contato com os educandos. Dessa forma oferecendo formação continuada para os professores e permitindo que eles avaliem o trabalho e façam contribuições para a formação docente.

Esse processo busca construir uma relação entre os conhecimentos produzidos dentro da universidade e a experiência dos professores no mercado de trabalho, garantindo que os saberes desses dois grupos se comuniquem e se agreguem, gerando uma experiência para os licenciandos.

Metodologia: As oficinas se dão de uma forma simples, onde primeiro são apresentados os métodos escolhidos de construção dos poliedros, os professores experimentam o método e então é discutido em grupo quais as vantagens e desvantagens dessa forma de construção. Por fim, cada professor é livre para fazer uma avaliação (oral ou por escrito) sobre o tipo de construção e expor suas reflexões sobre a aplicabilidade de cada uma dessas formas.

Material: Cada oficina exige um tipo diferente de material dependendo da forma de construção, as oficinas principais são relativas ao método de construção digital, por isso um computador equipado com o software geogebra ou acesso a internet é necessário.

Para a oficina sobre construção digital, foi desenvolvido material próprio exclusivo que está presente nos anexos 1 e 2, ele consiste na construção das figuras planas usando o geogebra (anexo 1) e na construção dos sólidos tridimensionais (anexo 2). Esse material foi desenvolvido como uma ferramenta de auxílio ao professor, oferecendo uma forma relativamente simples de construir os objetos virtuais.

Para as outras oficinas (sobre os métodos de dobra e encaixe e desenho) foi utilizado um material já existente cuja fonte pode ser encontrada nas referências.

O objetivo final dessas oficinas é que o material produzido e coletado seja disponibilizado para os professores da rede pública, incentivando o trabalho dos conteúdos de geometria no ensino básico e oferecendo alternativas aos métodos tradicionais de ensino-aprendizagem.

Capítulo 4: Dados coletados:

Após cada oficina os professores participantes foram ouvidos, também foi pedido que eles escrevessem um e-mail contando aquilo que haviam pensado sobre as potencialidades da oficina. Sendo que poucos professores conseguiram participar do evento (uma média de dois professores por encontro) suas avaliações serão reproduzidas na íntegra.

Professor 1, oficina 1:

O curso muito bom pois relembrei o meu tempo de universitária. Atividades muito significativas para o estudo de geometria, algumas possíveis de realizar com alunos do ensino fundamental mas algumas muito elaboradas não sendo possível sua aplicação..A criação do tetraedro e pentágono exigi muita paciência dificultando sua prática na sala de aula mas o triângulo e o quadrado bem possível de realizar.

Professor 2, oficina 1:

A primeira oficina foi bastante interessante, como forma de aprimorar o uso do Geogebra na construção de figuras e poliedros. O que dificulta é a dificuldade de manuseio pela falta de prática e conhecimento do programa. Mas tua parte Joel, está bem-feita.!!!!

Professor 1, oficina 2:

Nesta segunda oficina construímos alguns sólidos, através de origami.

Gostei muito de ter participado desta oficina!

É uma atividade que pode ser perfeitamente aplicada em sala de aula, porém considero que, para os Anos Finais do Ensino Fundamental, a construção do dodecaedro, só daria certo se j

á levássemos prontas algumas faces dele para que os estudantes montassem em sala de aula. Mas penso que além de ser visualmente atrativo , o material concreto favorece o entendimento da geometria.
Adoro trabalhar com origami!
Um abraço,

Professor 2, oficina2:
A oficina foi muito interessante poi através dela construímos o dodecaedro e o octaedro.
A atividade é muito significativa pois através das figuras é possível ver as faces.
O octaedro é possível de ser aplicado em uma turma do ensino fundamental já o dodecaedro exige muita paciência.

Professor 3, oficina 2:
Bom dia!!
Muito bom o encontro. O fato do manuseio com material concreto para fazer a construção do poliedro torna a atividade bastante interessante.
O encontro é bastante curto, porém penso que, como foi para professores atuantes têm que ser assim mesmo.

Não houve participantes na terceira oficina, os motivos foram expostos no final da segunda oficina, mas não tem relação as atividades propostas aqui, sendo de cunho pessoal aos professores.

Capítulo 5: Reflexões posteriores:

Acredito que o trabalho cumpriu com aquilo que se propôs, o material produzido se mostrou relevante para os professores e as avaliações foram todas positivas.

Apesar de uma parte do trabalho ser considerada difícil demais para os alunos (como relatou uma das professoras que participavam da oficina) vale lembrar que o conteúdo elaborado visava atingir todo o ensino básico e o grupo de teste continha apenas professores do ensino fundamental.

Dessa forma, o material foi produzido a contento, sua divulgação ainda está sendo elaborada, conversas com a secretaria de educação da cidade sugerem que ele possa ser colocado a disposição dos professores por meio da SMED, embora o mais provável é que sejam distribuídos gratuitamente no formato PDF em um blog criado especificamente para isso.

Bibliografia:

CLEMENTE, João Carlos e CIA, ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA: UM ESTUDO A PARTIR DOS PERIÓDICOS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, arquivo digital pesquisado pela última vez em 26/07/2018.

RODRIGUES, Margarida & BERNARDO, Marisa, ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA, Atas do XXII SIEM, arquivo digital pesquisado pela última vez em 30/07/2018.

PELLEGRIN, Patrícia & FIOREZE, Leandra, O ENSINO DE GEOMETRIA POR MEIO DA ARTE E DA TECNOLOGIA, arquivo digital pesquisado pela última vez em 30/07/2018.

LINDQUIST, Mary & SHULTE, Albert, APRENDENDO E ENSINANDO GEOMETRIA, São Paulo, Atual Editora, 1994.

LOBO, Joice & BAYER, Arno, ENSINO DE GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL, ACTA SCIENTIAE – v.6 – n.1 – jan./jun. 2004.

MANOEL, wagner, POR QUE ENSINAR GEOMETRIA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL?, GD1 – Educação Matemática nos Anos Iniciais, artigo online, 22/11/2018.

LORENZATO, Sergio, POR QUE NAO ENSINAR GEOMETRIA?, A Educação Matemática em revista – SBEM – Nº 4 – 1° Semestre de 95.

FAZENDA, Ivani, O QUE É INTERDISCIPLINARIDADE?, São Paulo, Cortez, 2008.

PANDIM, Thiago (tradução), DEZ QUESTÕES PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA… E COMO O PISA PODE AJUDAR A RESPONDÊ-LAS, IMPA e SBM, Janeiro de 2018.

TAHAN, Malba, ou SOUZA, Júlio César de Mello e, MATEMÁTICA DIVERTIDA E CURIOSA, 15° edição, Rio de Janeiro, Record, 2001

SANTOS, Cristiane de Oliveira, A IMPORTÂNCIA DA VISUALIZAÇÃO NO ENSINO

DA GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL, Universidade Estadual de Goias, 2009.

HAISASHIDA, Keila Andrade, O USO DO MATERIAL CONCRETO NO ENSINO DA MATEMÁTICA, artigo online, 20/11/2018.

Links para os vídeos, revisados em 10/11/2018:

https://www.youtube.com/watch?v=H7qE_Tc8e4g&list=PLTFFsG-TsfJ8LHzmEK12w_d07jnNQ9kIi

https://www.youtube.com/watch?v=XzRutCmNjBs

https://www.youtube.com/watch?v=y2nz_Rw5yw0

https://www.youtube.com/watch?v=8mpbil36gAU

https://www.youtube.com/watch?v=hOWovRx7s3Q

Construção do pentágono:

https://www.youtube.com/watch?v=vd75FC1lznA

Geogebra:

https://www.geogebra.org/?lang=pt

Anexo 1

Introdução: Ferramentas do Geogebra.

O software Geogebra foi utilizado na oficina por ser gratuito e simples de usar, ele não é estritamente necessário para a construção das figuras planas, esse processo pode ser feito com perfeição em outros aplicativos ou mesmo a mão com régua e compasso.

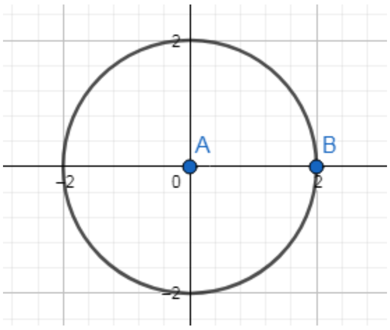
Mesmo assim, sendo a ferramenta que decidimos utilizar para acreditamos que uma breve introdução ao funcionamento do mesmo deve ser colocada.

Entre suas muitas funcionalidades, o Geogebra apresenta duas formas de se colocar formas em um plano, uma delas é a janela de entrada algébrica e a outra é a janela de entrada geométrica. Na janela algébrica pode-se inserir equações, geralmente na forma $y = f(x)$, enquanto na janela geométrica existem opções que permitem construir figuras usando o mouse.

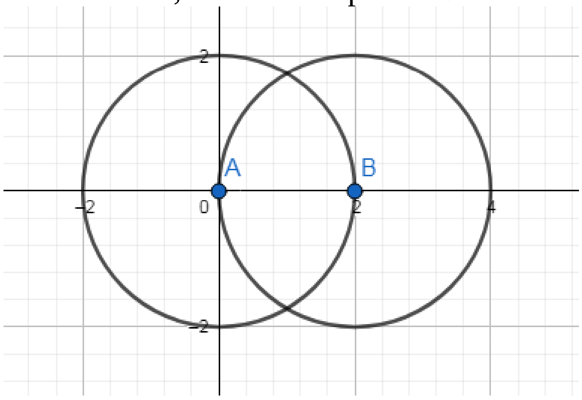
Parte das atividades da oficina consistem em explorar o funcionamento do software, isso implica que nós não diremos exatamente como fazer as coisas pois elas podem ser feitas de formas diferentes, se dissermos para criar um círculo, isso pode ser feito usando as ferramentas geométricas (clicando sobre o ícone de círculos e escolhendo uma das formas de criação) ou algébricas (digitando a equação de um círculo na caixa de comandos). Além disso, o Geogebra possui várias versões diferentes (para computador, celular ou acesso online), elas possuem diferenças entre si e são atualizadas com relativa frequência, o que tornaria um guia de ação restritivo desatualizado e parcial.

1° Parte: Construção de triângulos equiláteros.

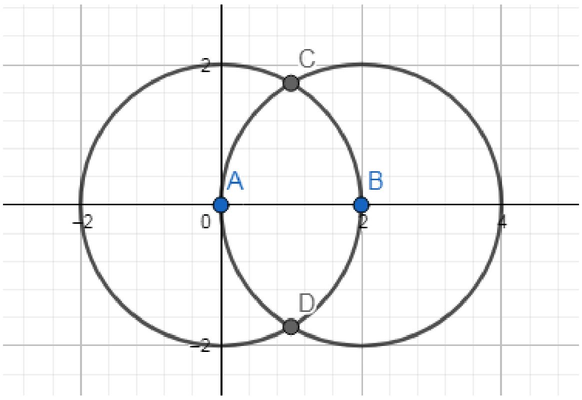
Construa um círculo de raio r (diferente de zero) centrado no ponto A, marcando B como um ponto qualquer pertencente a circunferência:



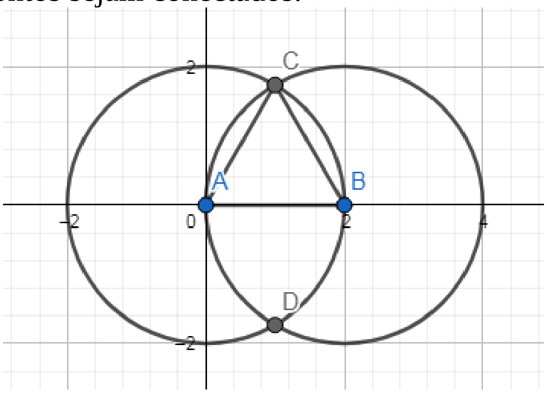
Crie um segundo círculo de raio r, centrado no ponto b:



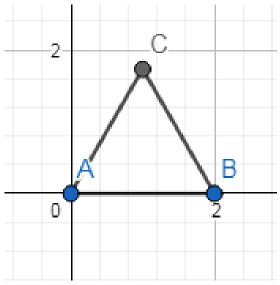
Marque a intersecção dos círculos:



Escolha um dos pontos de intersecção e crie segmentos entre ele e os centros dos círculos, de forma que todos os três pontos sejam conectados.



Esconda os círculos e o ponto não utilizado.



NOTA: Esconder não é apagar, se você apagar os círculos vai perder seu trabalho e ter que começar tudo de novo.

Prova de que é um triângulo equilátero:

A distância entre A e B é o raio do primeiro círculo.

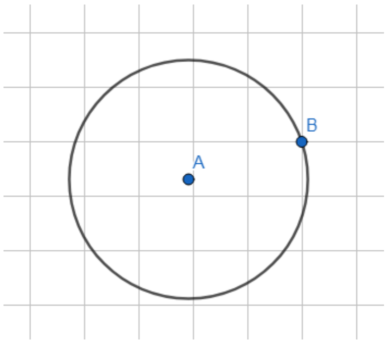
C pertence a primeira circunferencia, portanto sua distancia até A também é o raio do primeiro círculo.

A distancia entre B e C é o raio do segundo círculo, que é igual ao raio do primeiro círculo por definição.

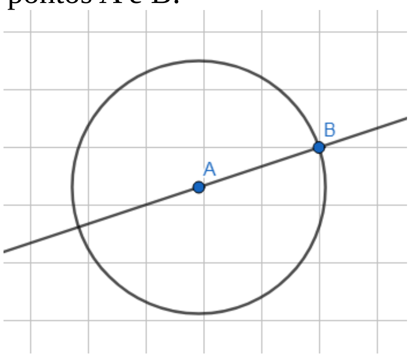
Lago: AB = BC = CA.

4° Parte: Construção de quadrados com o Geogebra

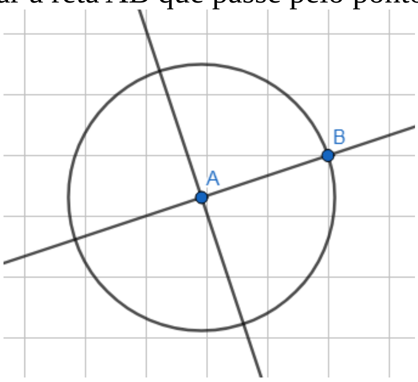
Construa um círculo de raio r (diferente de zero) centrado no ponto A, marcando B como um ponto qualquer pertencente a circunferência:



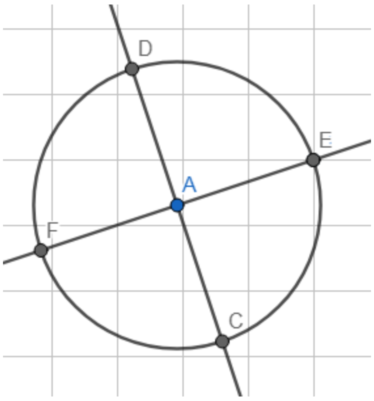
Crie a reta que passe pelos pontos A e B:



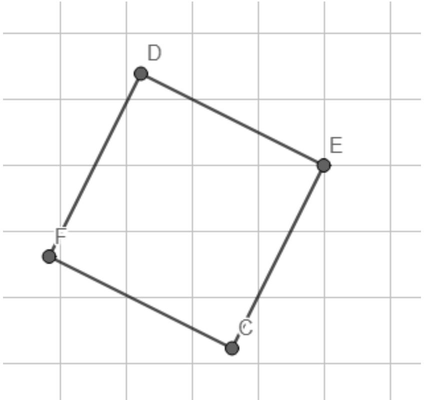
Crie uma reta perpendicular a reta AB que passe pelo ponto A:



Marque as intersecções entre as retas e o círculo:



Crie segmentos entre os pontos que não pertencem a mesma reta e depois esconda as retas e o círculo:



Provando que é um quadrado:

A distancia entre A e as quatro intersecções é igual a r.

O ângulo entre as retas é 90°, pois as retas são perpendiculares.

Logo o triângulo ACE é congruente aos triângulos AED, ADF e AFC pelo teorema 'Lado, Ângulo, Lado'.

O triângulo ACE é isóceles de base CE, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, o ângulo C e o ângulo E são congruentes iguais a 45°.

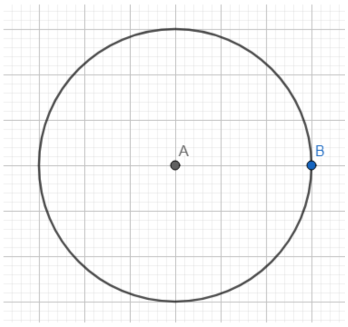
Como ACE, AED, ADF e AFC são congruentes, os ângulos do quadrilátero CDEF são:

C = D = E = F = 45° + 45° = 90°

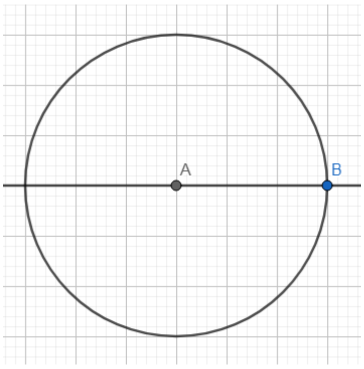
Portanto, CDEF tem quatro lados iguais e quatro ângulos de 90°, sendo um quadrado.

5° Parte: Construção de pentágonos com o Geogebra

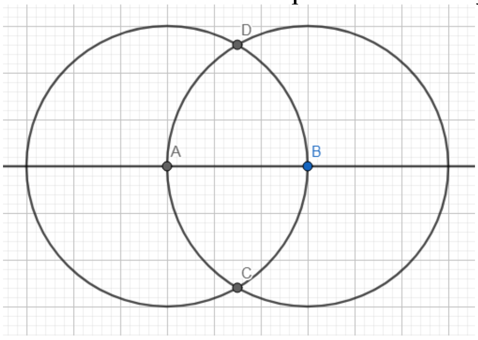
Crie um círculo C1 centrado no ponto A, com raio r diferente de zero, e selecione um ponto B pertencente a circunferência:



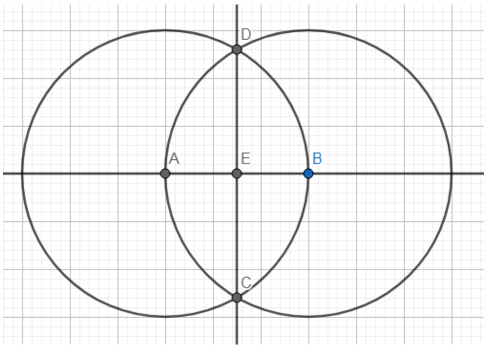
Crie a reta AB:



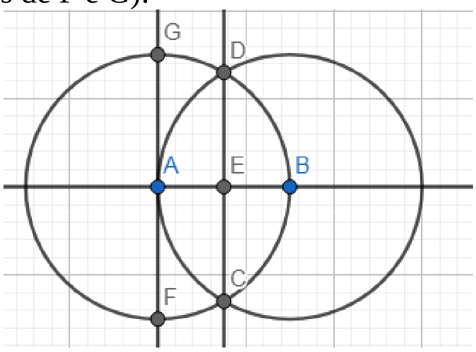
Crie um círculo de raio r centrado em B e marque as intersecções entre esse círculo e C1:



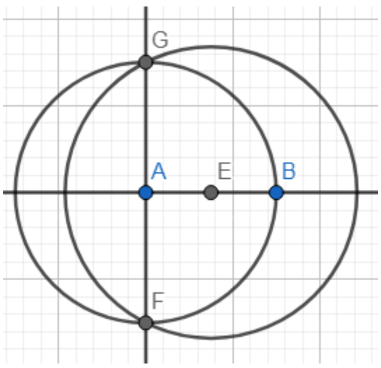
Crie a reta que passa pelas intersecções (chamada de reta CD) e marque o ponto onde ela intersepta AB:



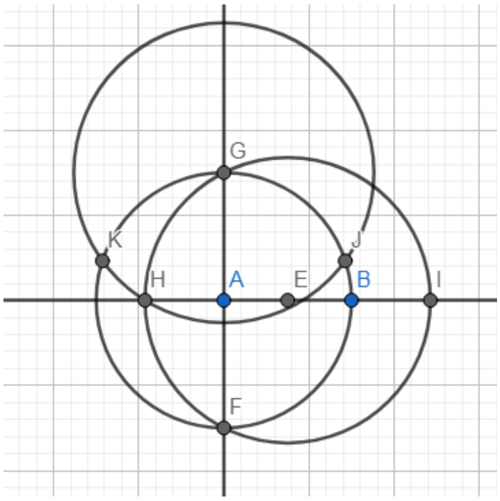
Crie uma reta perpendicular a AB passando pelo ponto a e marque a intersecção entre essa reta e C1 (dois pontos chamados de F e G):



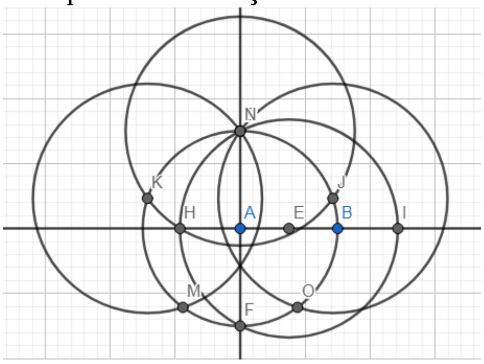
Crie um círculo centrado no encontro de AB com a reta CD cuja circunferência passe pelos pontos F e G. Agora pode esconder o círculo de centro em B:



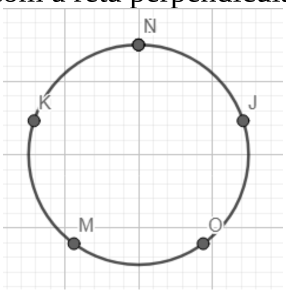
Marque a intersecção do último círculo criado com a reta AB, nomeando a intersecção interna a C1 como H. Depois, crie um círculo (chamado CG) centrado em G que passe por H e marque suas intersecções com C1:



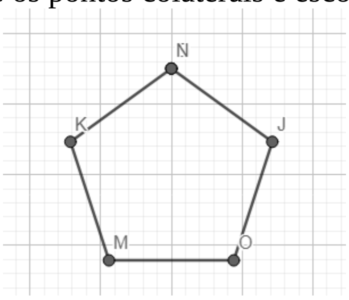
Crie círculos centrados nas intersecções de CG com C1, tais que suas circunferências contenham o ponto G. Então marque as intersecções desses círculos com C1:



Esconda todos os círculos diferentes de C1 e todos os pontos que não pertencem a circunferência de C1. Então esconda o ponto B e qualquer outro ponto sobreposto a ele. Por fim, esconda o ponto F (intersecção de C1 com a reta perpendicular que não foi utilizado).



Agora crie seguimentos entre os pontos colaterais e esconda C1:



Provando que é um pentágono:

A figura MOJNK é composta por cinco pontos pertencentes a uma mesma circunferência, então a distância do centro da circunferência (ponto A) até cada um dos vértices é a mesma. Isso implica que possuímos cinco triângulos isósceles: AMK, AKN, ANJ, AJO, AOM.

Os segmentos MK, KN, NJ, JO e OM são todos de mesmo comprimento, por construção.

Implicando que os triângulos AMK, AKN, ANJ, AJO e AOM são congruentes (possuem três lados iguais), isso significa que o ângulo A em todos eles é igual, ou seja, 360°/5 = 72°.

Dessa forma, os ângulos M, K, N, J e O são todos iguais a 180° menos o ângulo A, isso é, 180° - 72° = 108°.

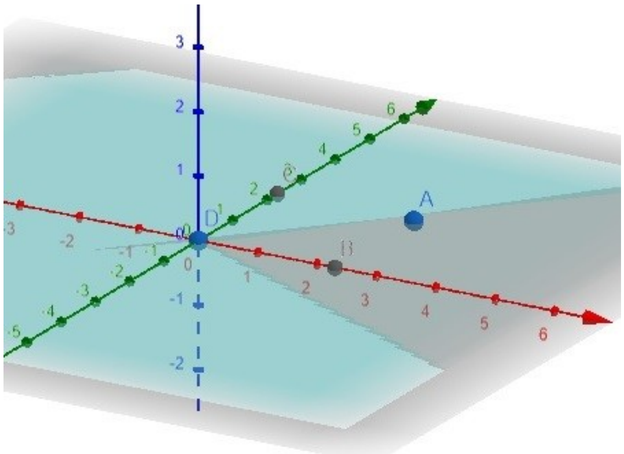
Como a figura é convexa, possuindo cinco lados de mesma medida e cinco ângulos congruentes, então essa figura é um pentágono.

Anexo 2

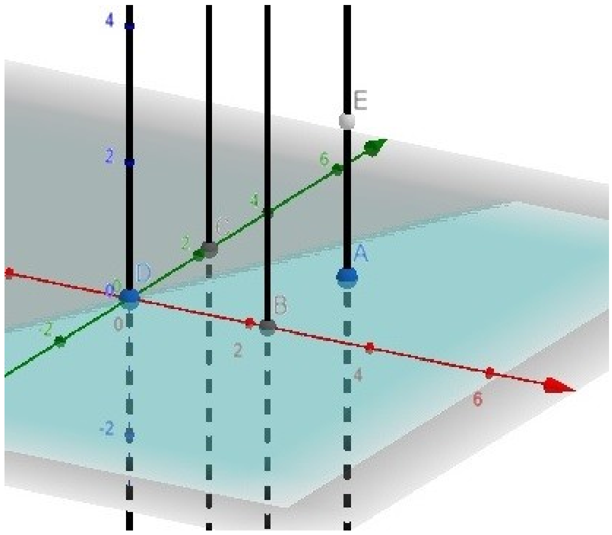
Criando figuras tridimensionais com o geogebra:

O cubo:

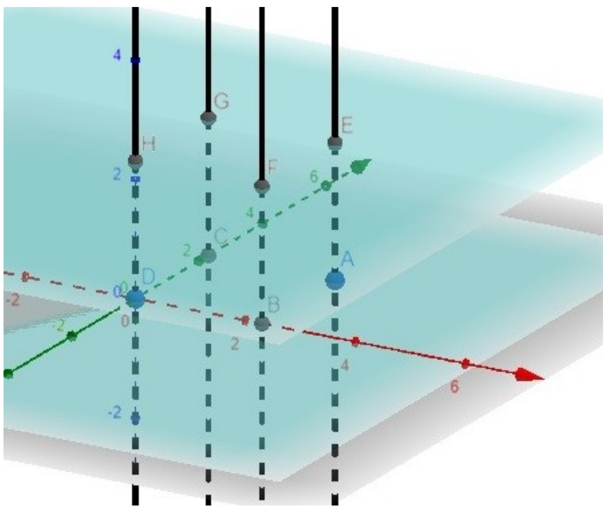
O primeiro passo é criar um controle deslizante (nomeado de L), então cria-se os pontos A = (0,0,0), B = (L,0,0), C = (0,L,0) e D = (L,L,0), formando um quadrado de lado L no plano x-y. Crie então um plano que contenha três pontos desse quadrado.



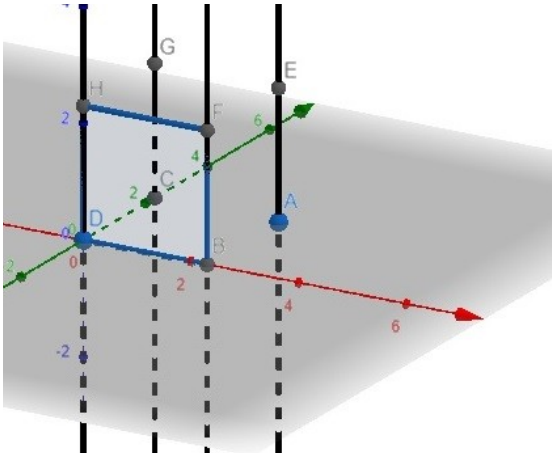
Crie o ponto E = (L,L,L) e retas perpendiculares ao plano que passem por A,B,C e D.

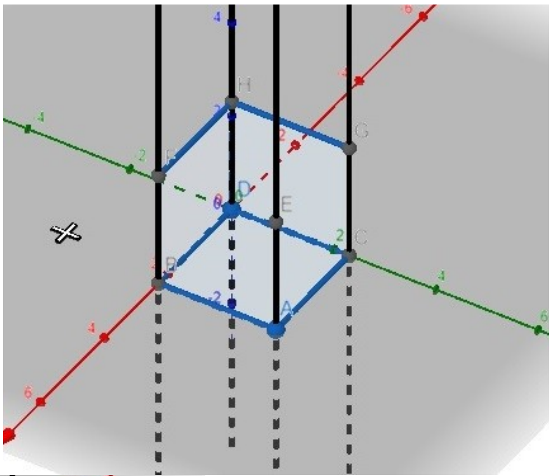


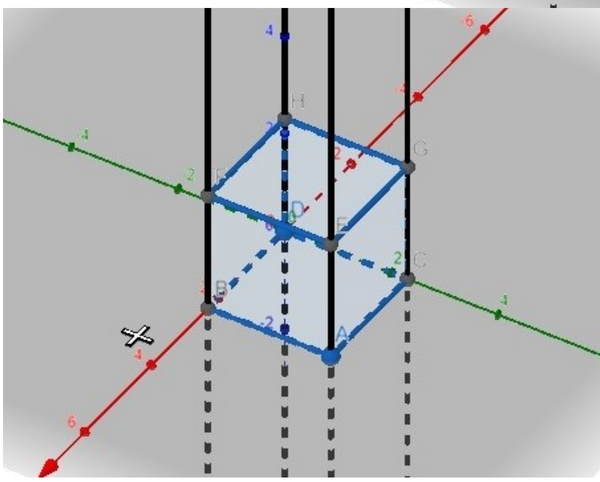
Faça um plano paralelo ao plano x-y que passe pelo ponto E e marque a intersecção das retas com esse novo plano.



Agora nós já possuimos todos os vértices do quadrado e falta apenas criar as faces do cubo, note que as arestas serão marcadas durante o processo. Crie poligonos que contenham quatro vértices de forma que esses poliginos estejam em planos paralelos ou sobrepostos a um desses três planos: x-y, x-z, y-z.

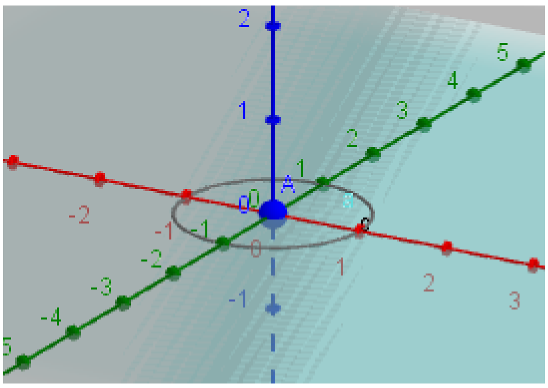


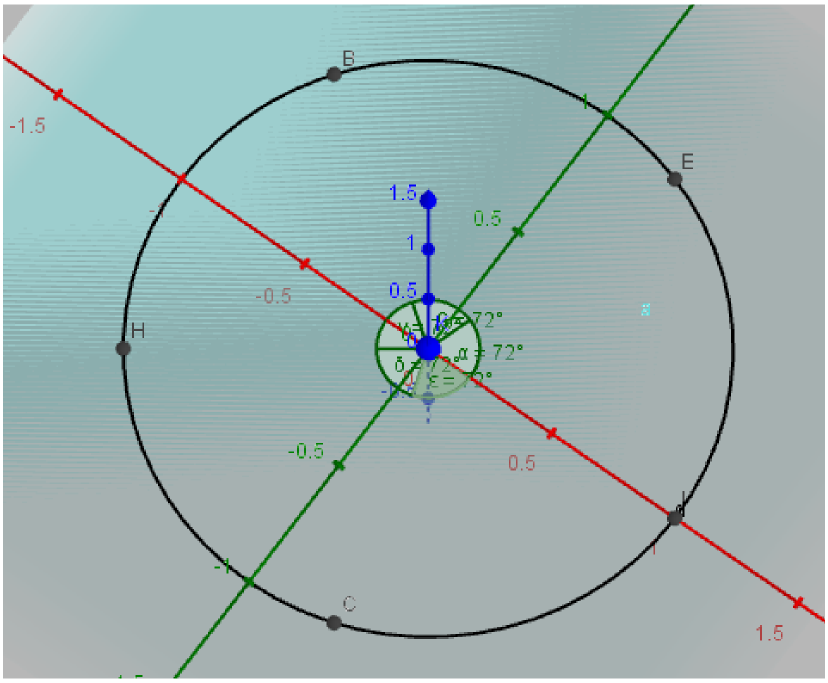


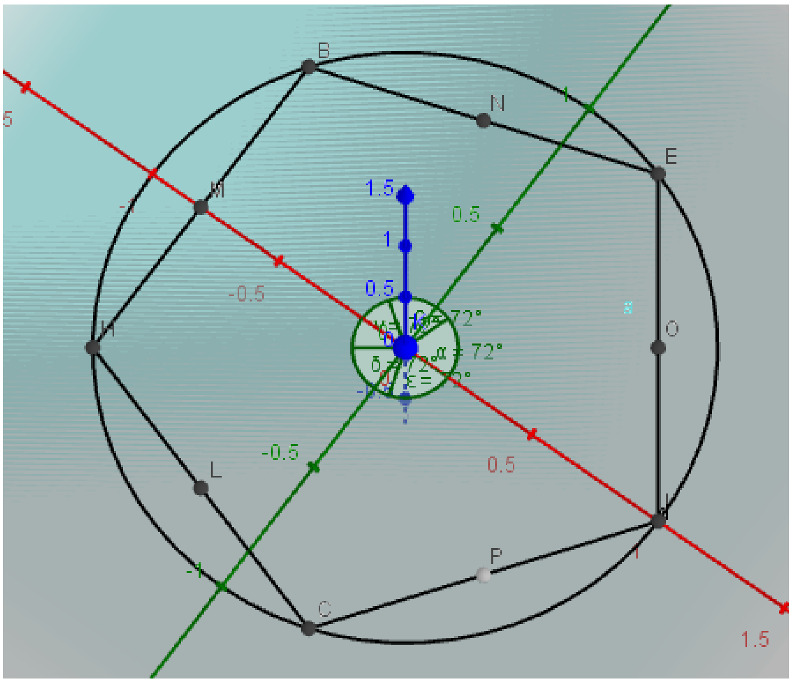


O dodecaedro:

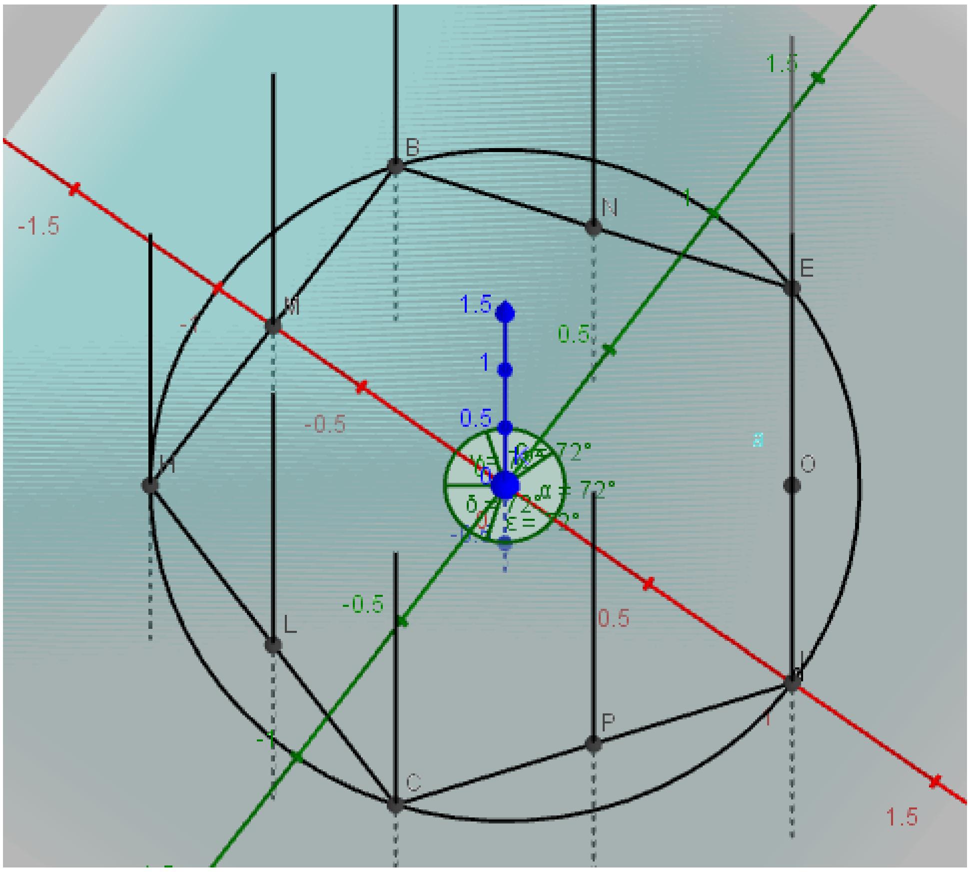
Crie um plano, um círculo inscrito nesse plano e um pentágono inscrito nesse círculo, lembre que existe um método para criar pentágonos na oficina 1, mas que esse não é o único meio.



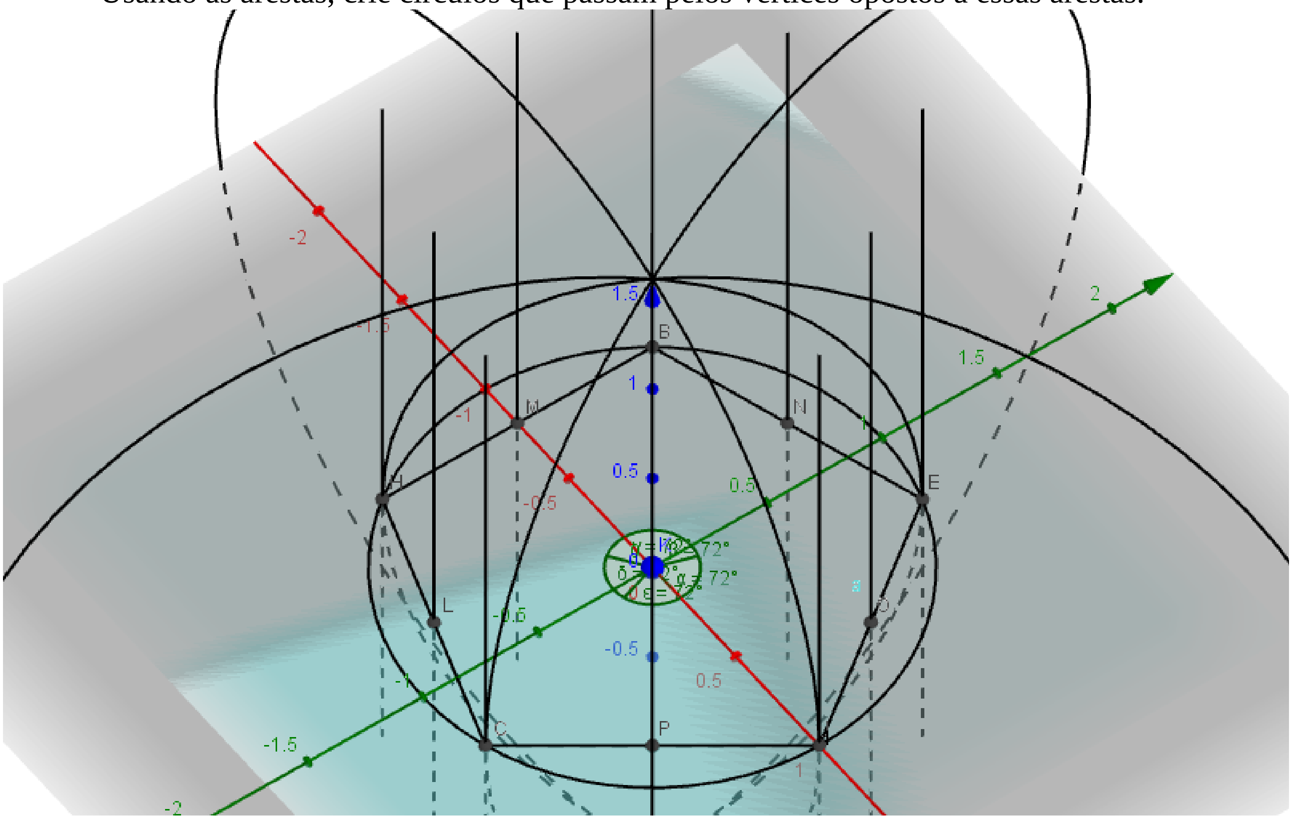




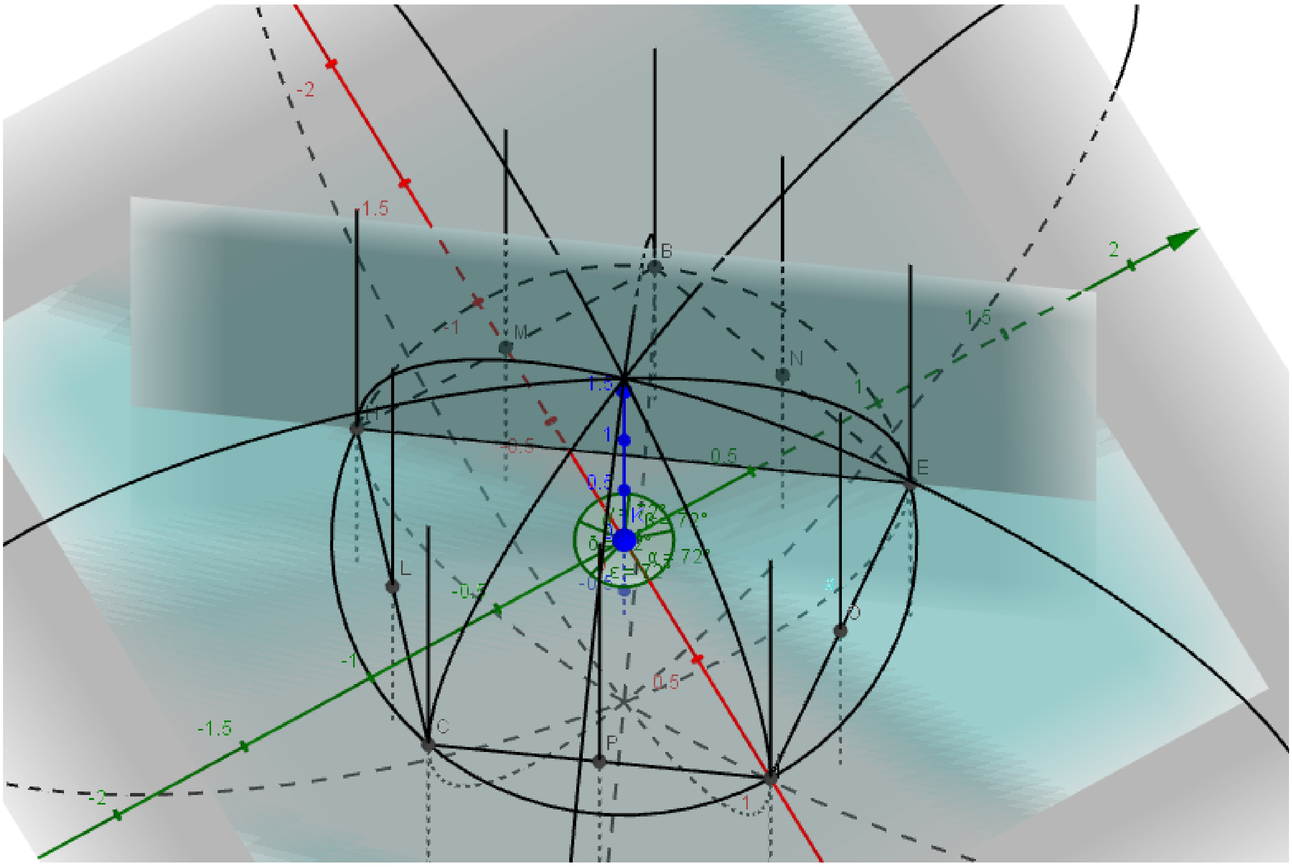
A partir dos vértices e dos pontos médios das arestas desse pentágono crie retas perpendiculares ao plano:

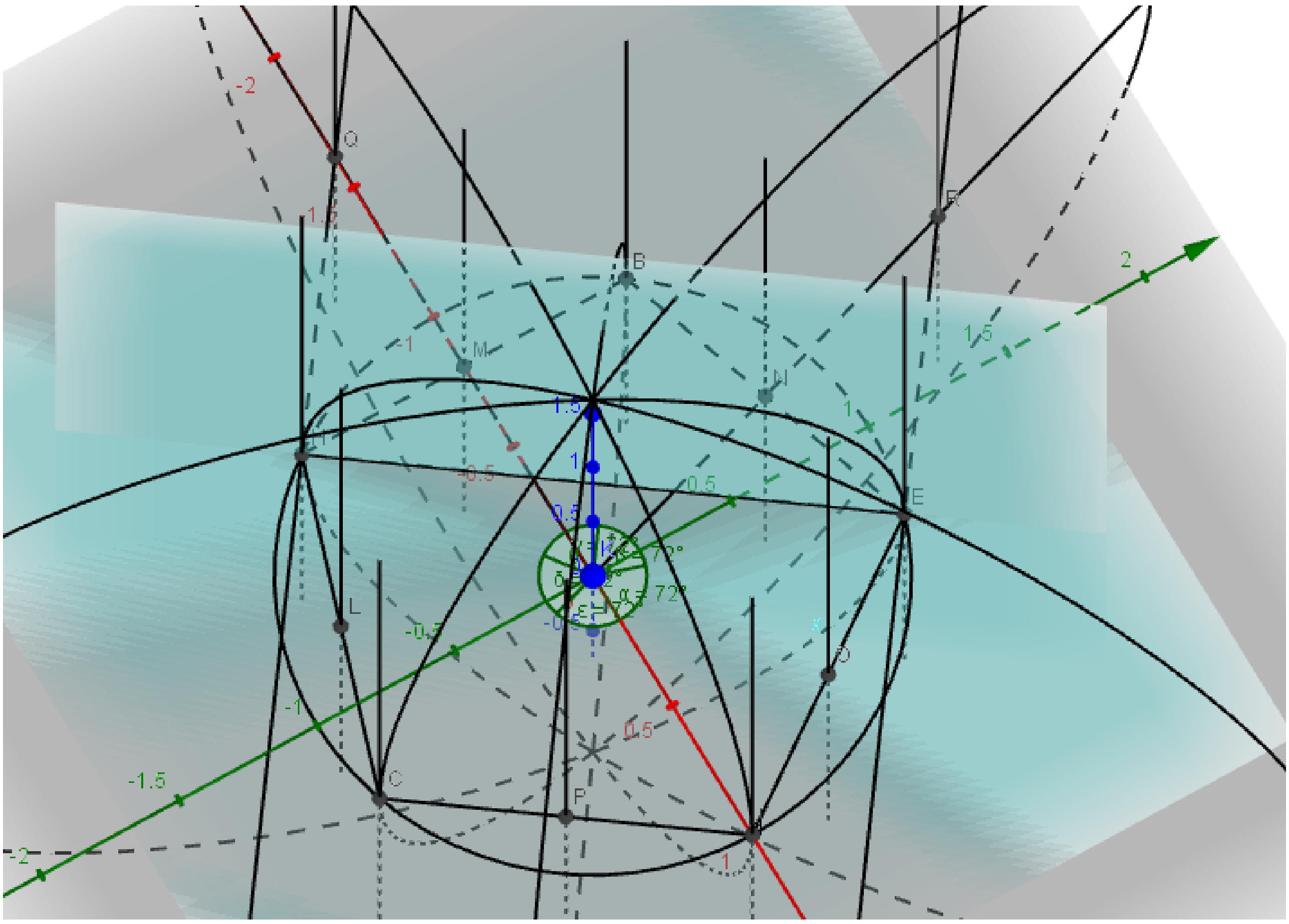


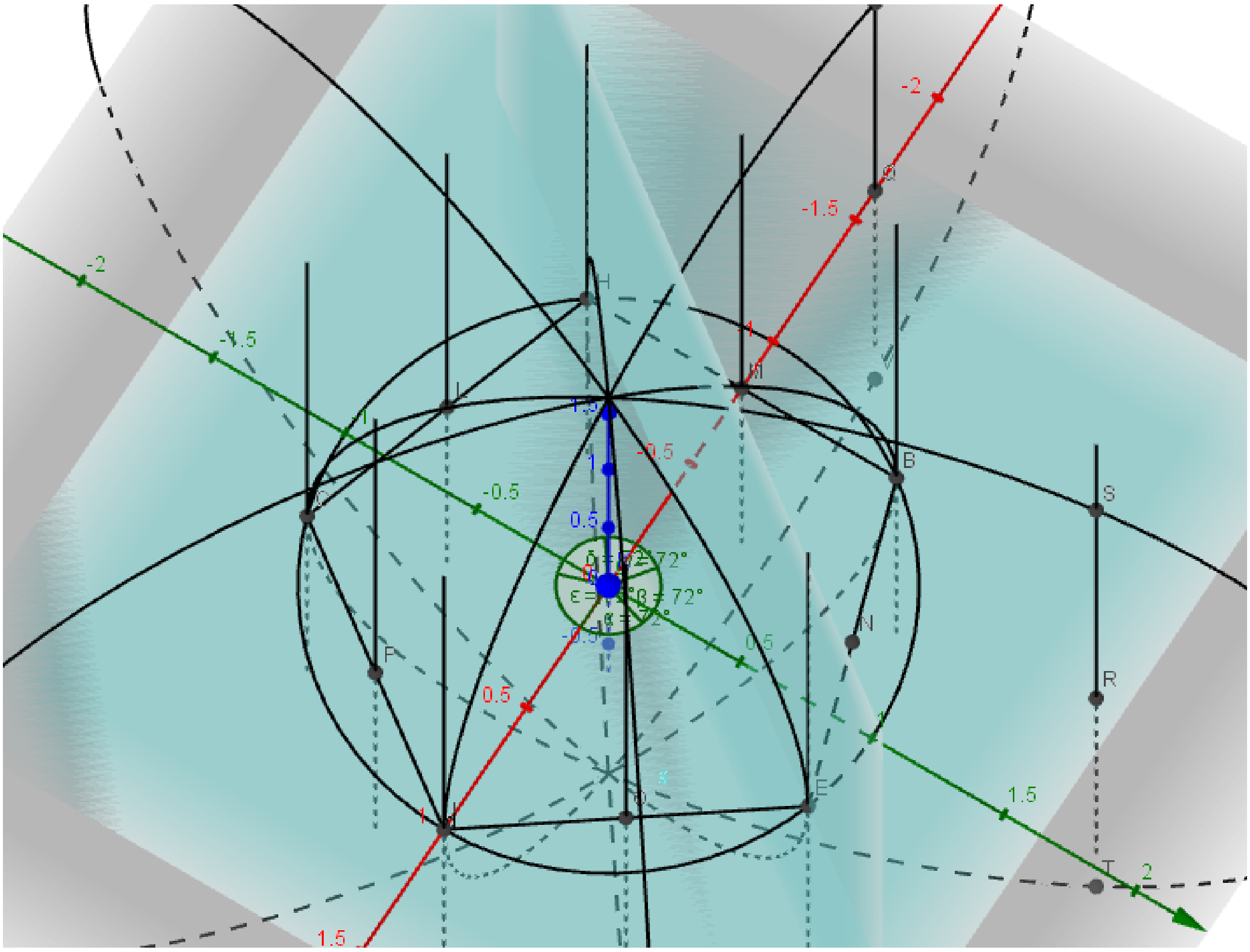
Usando as arestas, crie círculos que passam pelos vértices opostos a essas arestas.



A partir disso, procure pelo ponto onde esses círculos estão a uma distância equivalente a distância entre dois vértices não consecutivos. O processo é um tanto complicado e envolve usar a projeção dos círculos sobre o plano.


B
M
N
E
L
C
P
D


Q
R
B
M
N
E
L
C
P
D



Em resumo, crie um segmento que passe por dois vértices não consecutivos, crie um plano perpendicular ao plano base que passe por esse segmento (as retas perpendiculares podem ser usadas para isso).

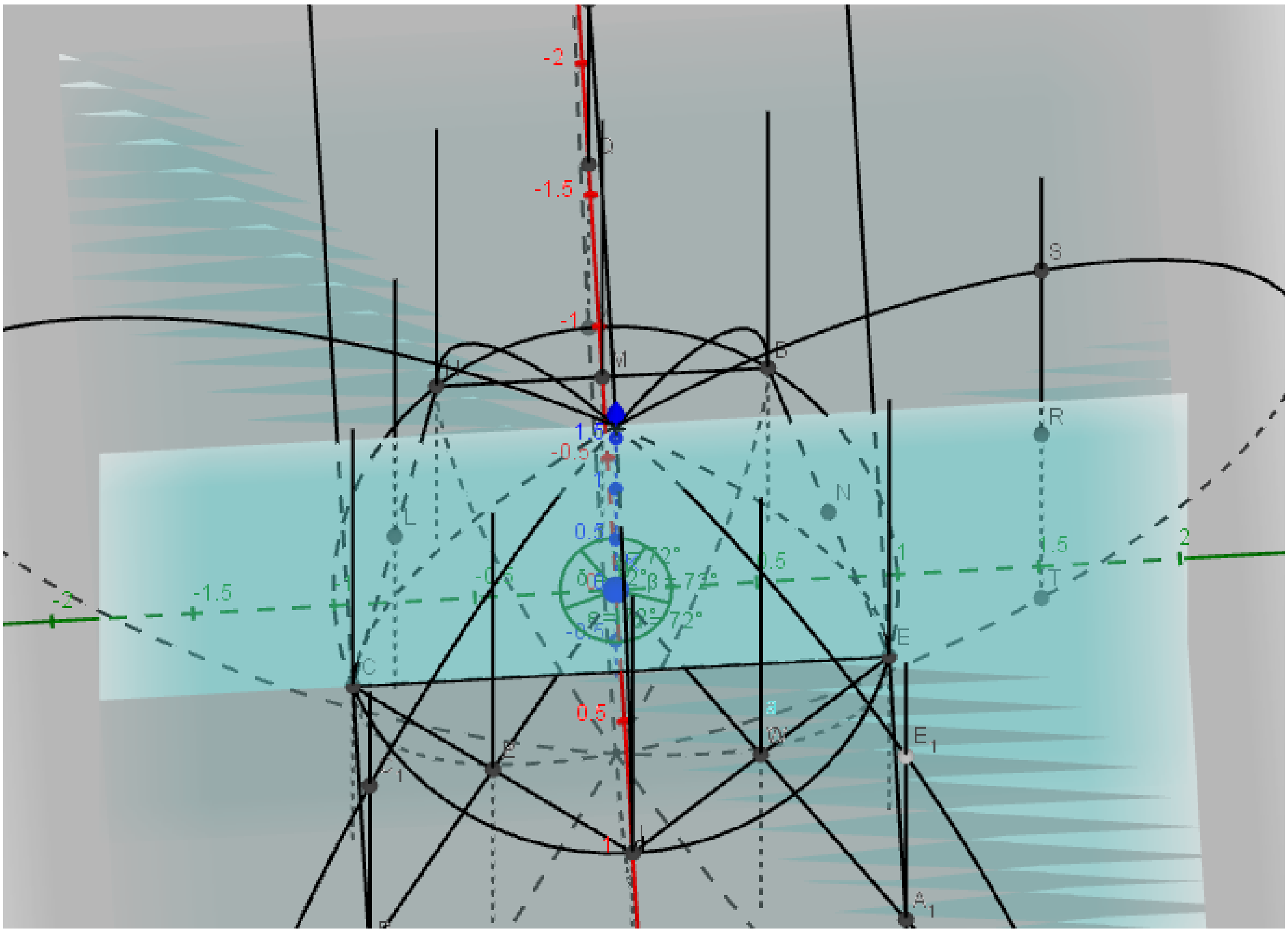
Construa a pprojeção dps círculos spbre o plano base.

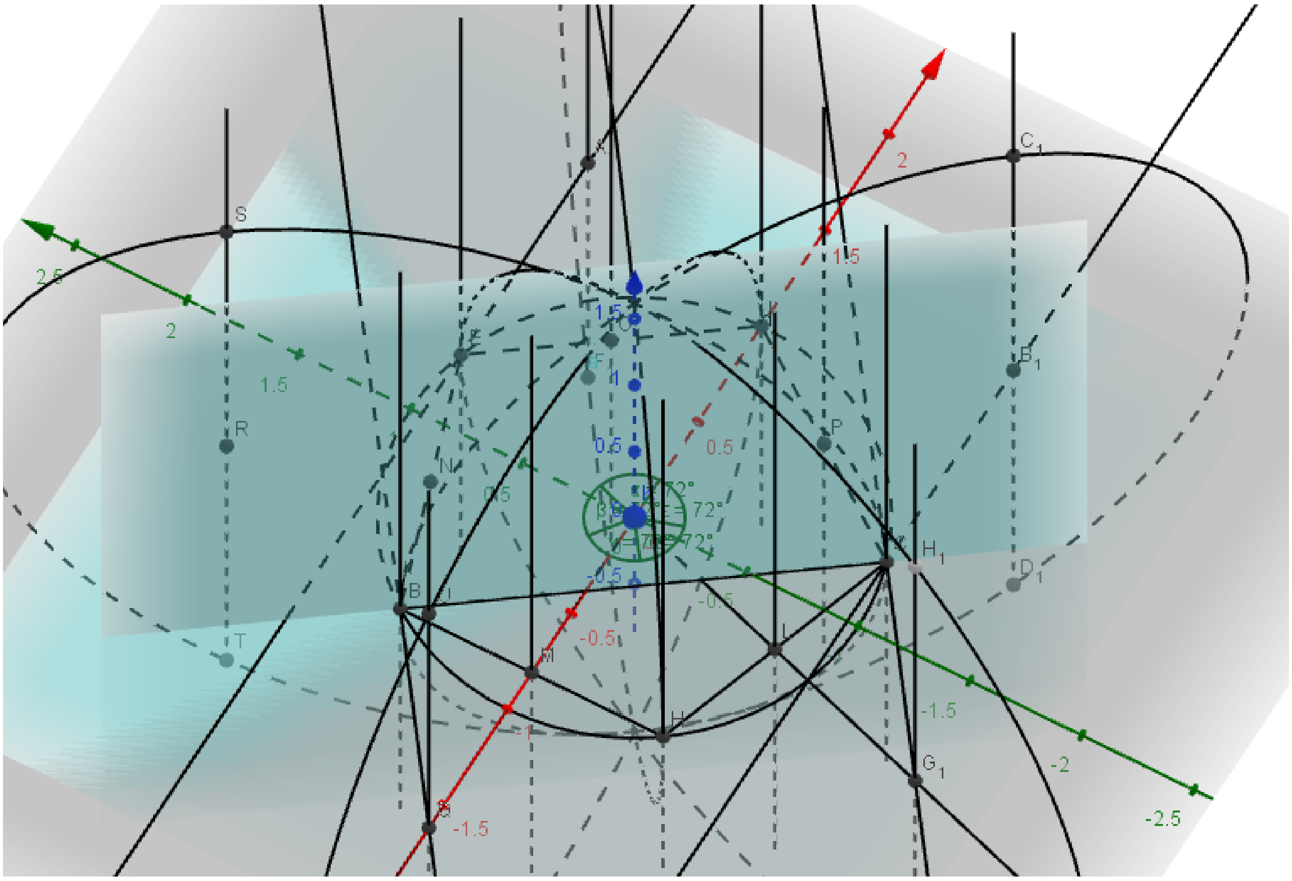
Então crie retas perpendiculares a esse segundo plano que passem pelos vértices do pentágono e marque os pontos onde essas retas se encontram com as projeções dos círculos.

Crie retas perpendiculares ao plano base a partir dessas intersecções.

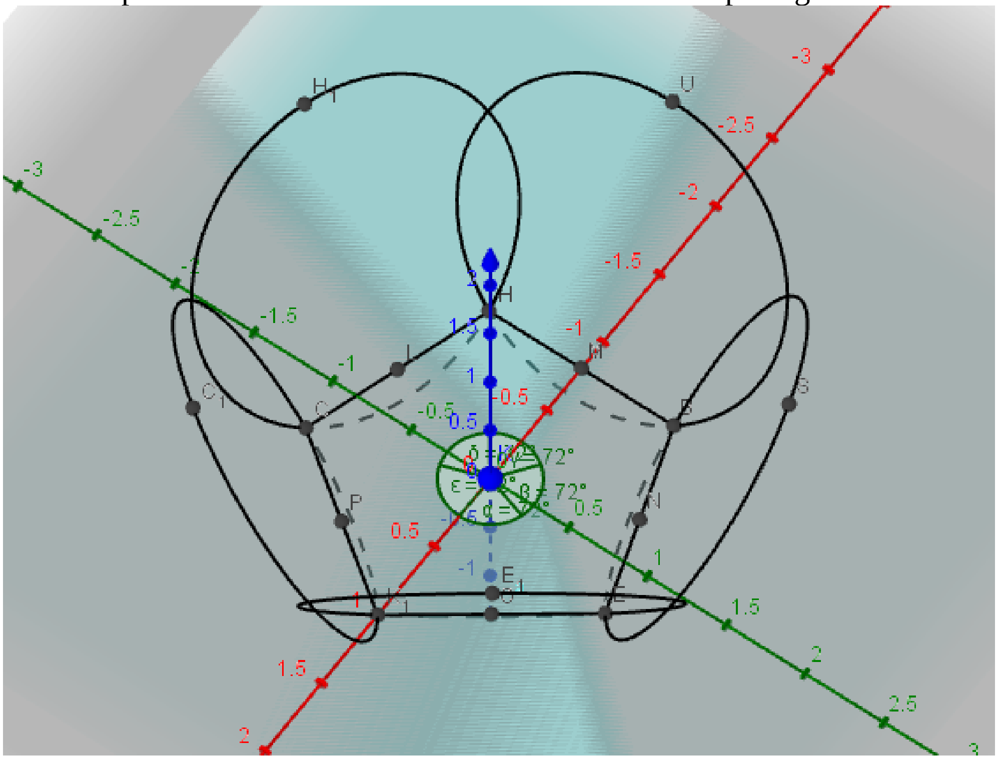
Marque o ponto onde essas retas se encontram com os círculos.

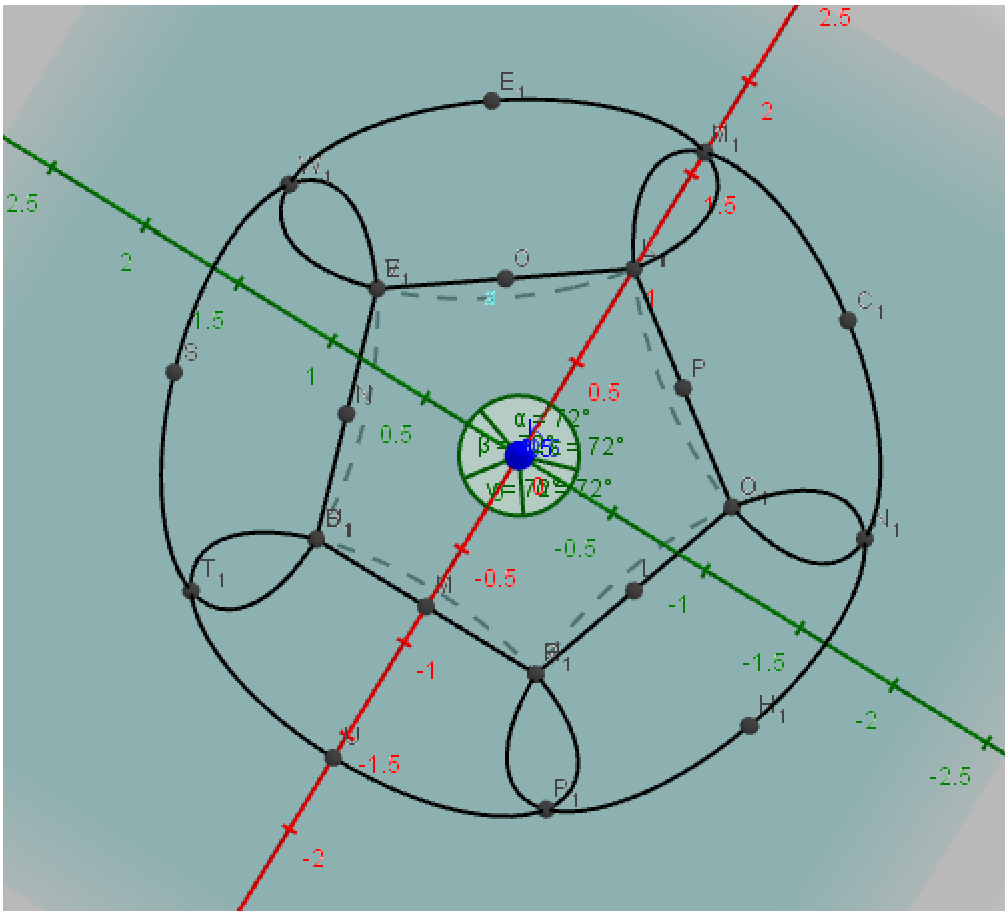
Repita o processo até que todos os círculos tenham sido marcados.

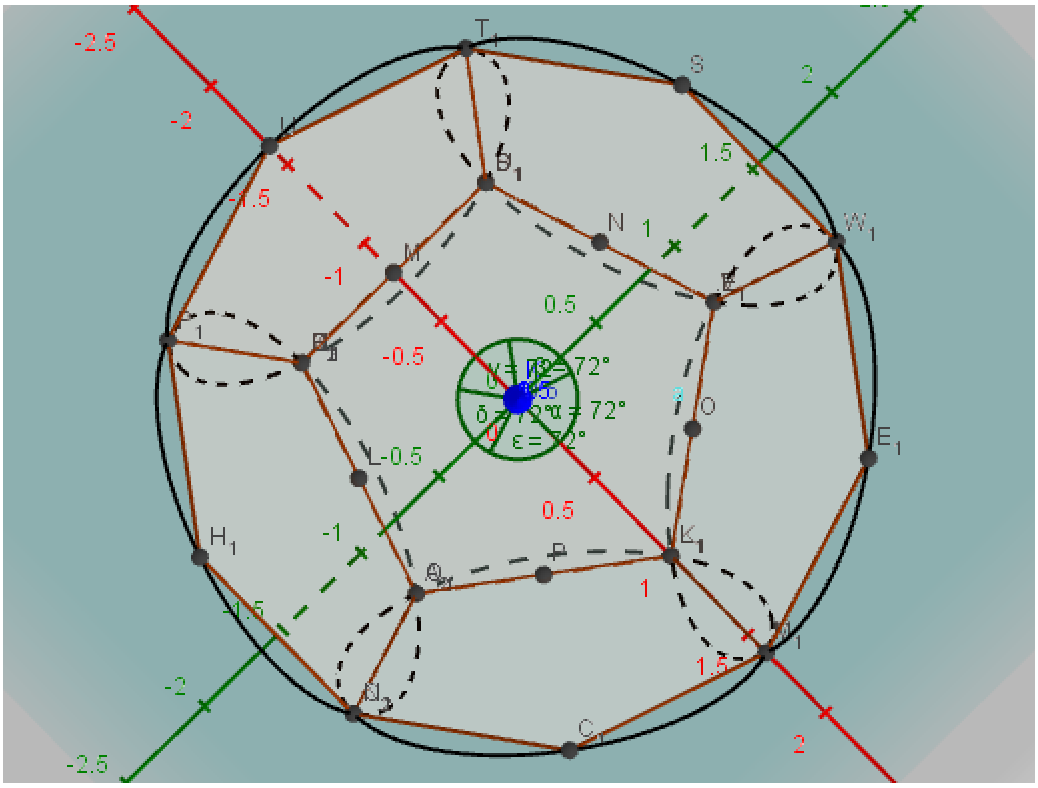

O
M
D
S
R
N
L
T
C
E
E1
A1
72°
-2
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2

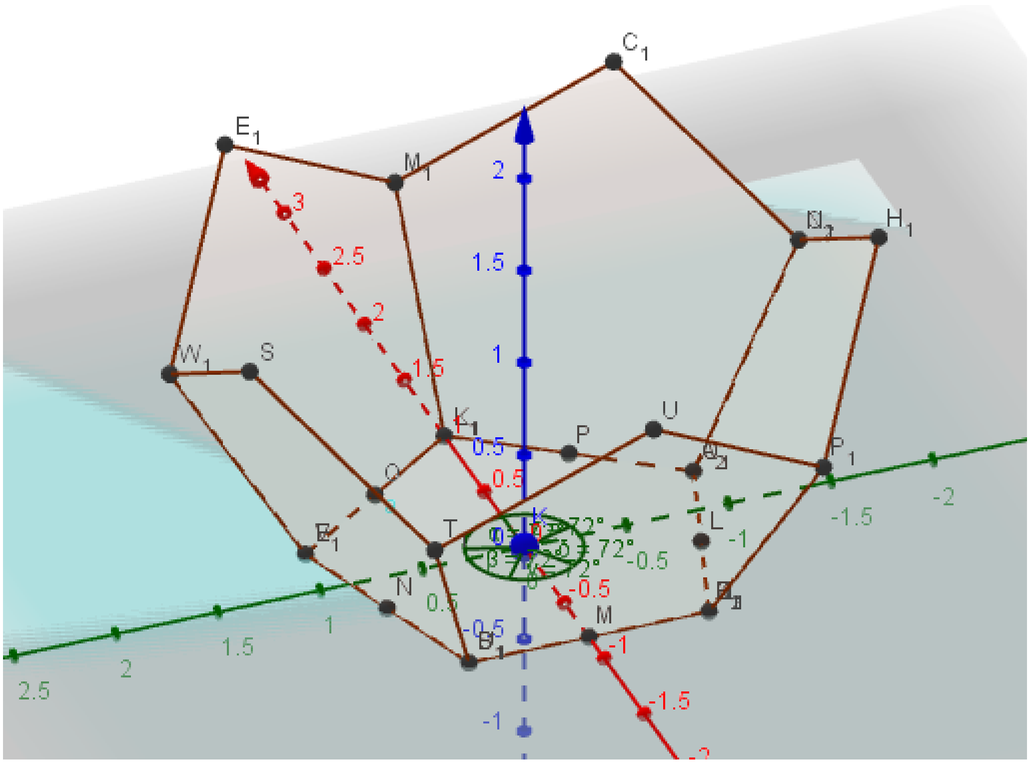

S
R
T
C1
B1
D1
H1
G1
N
P
B
M
H
72°
2.5
2
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5

Esconda os círculos, voce vai notar que existe uma aresta correspondente a cada um dos pontos externos ao plano base, crie círculos usando esse ponto e os dois vértices relaticos a essa aresta. Marcando os pontos onde os círculos se encontram obtemos pentágonos naturalmente.

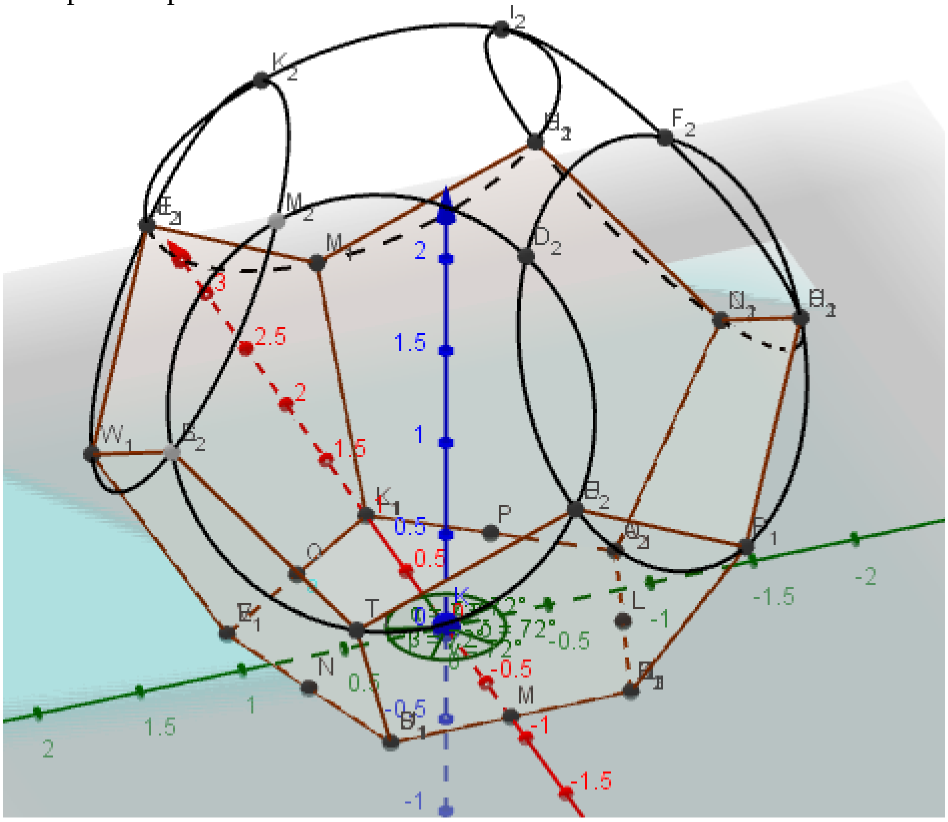


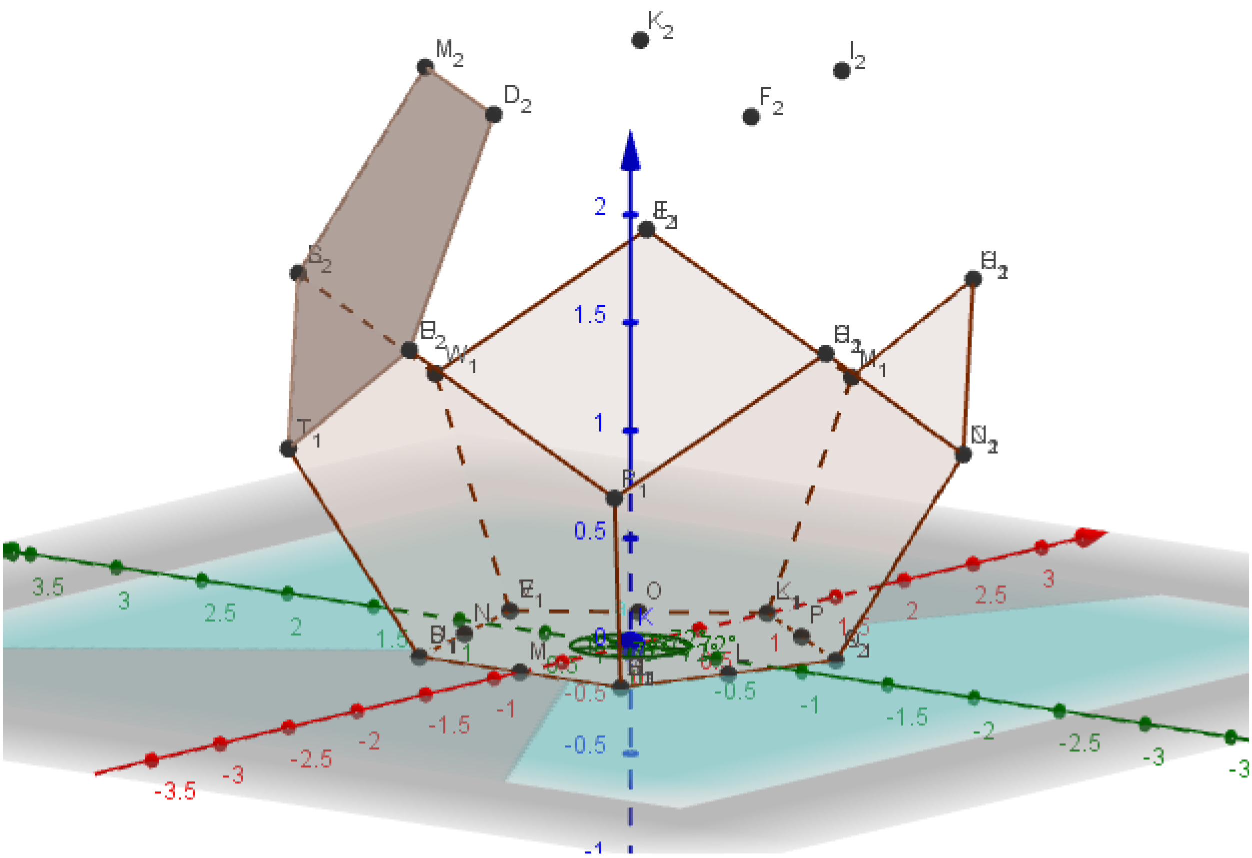


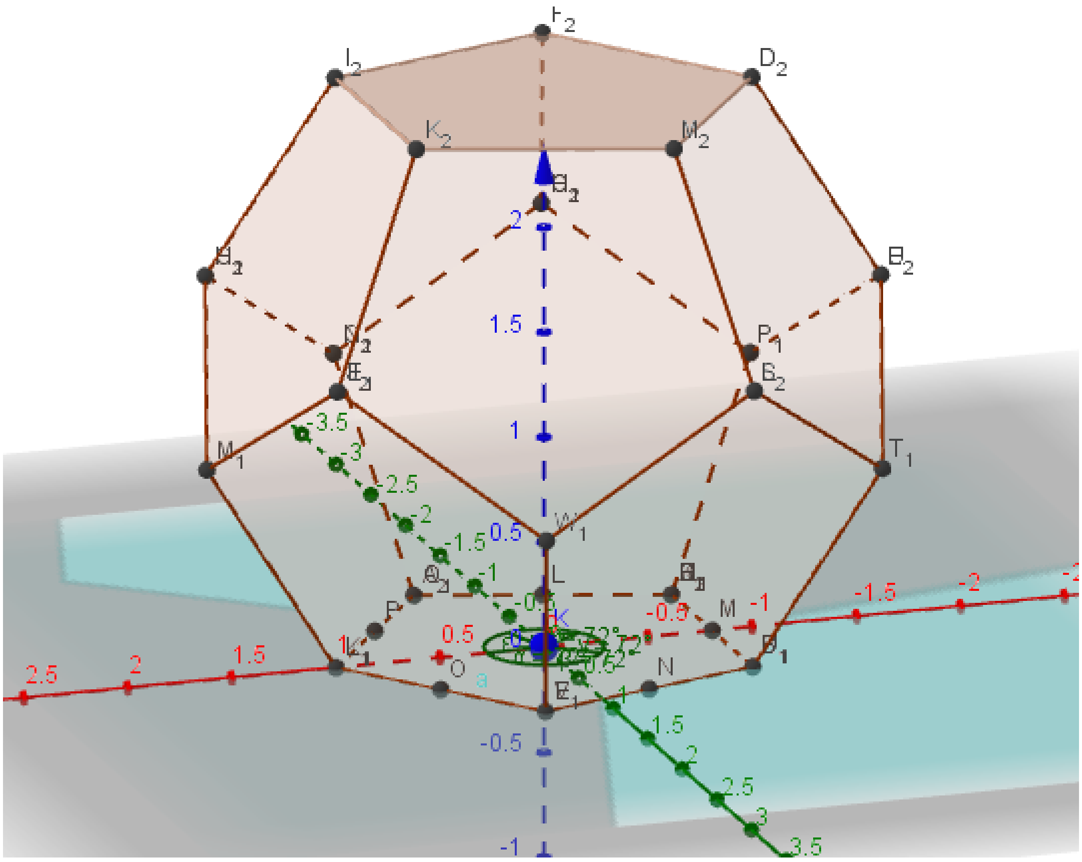

T1
S
U
B1
N
W1
M
E1
O
L
H1
K1
P
C1
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2


C1
E1
M1
H1
W1
S
K1
P
U
P1
O
T
K
L
N
B1
M
0.5
1
1.5
2
2.5
3
-0.5
-1
-1.5
-2

O processo de criar círculos a partir de três pontos e marcar as intersecções também pode ser usado para criar a parte superior do dodecaedro.

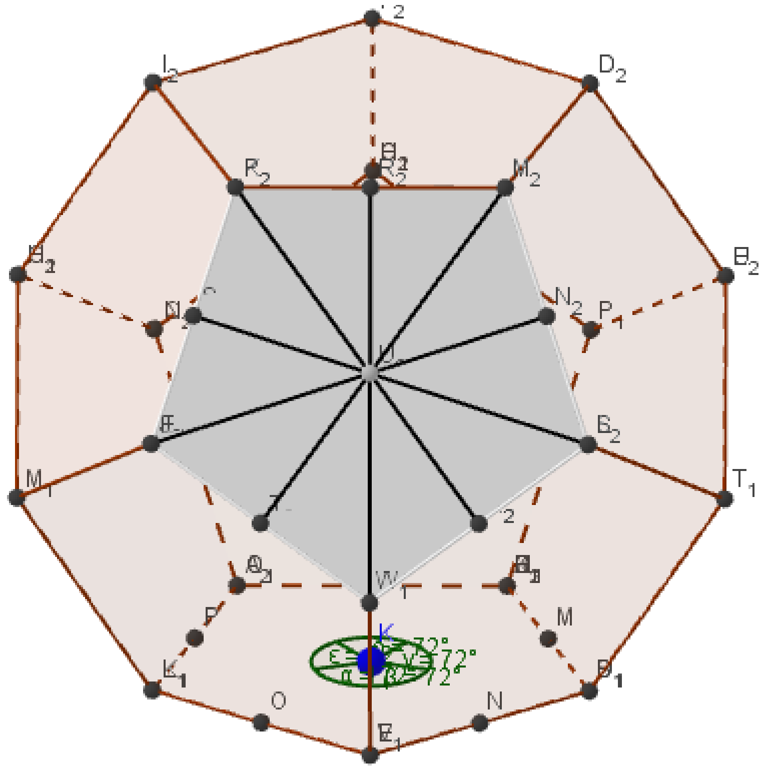




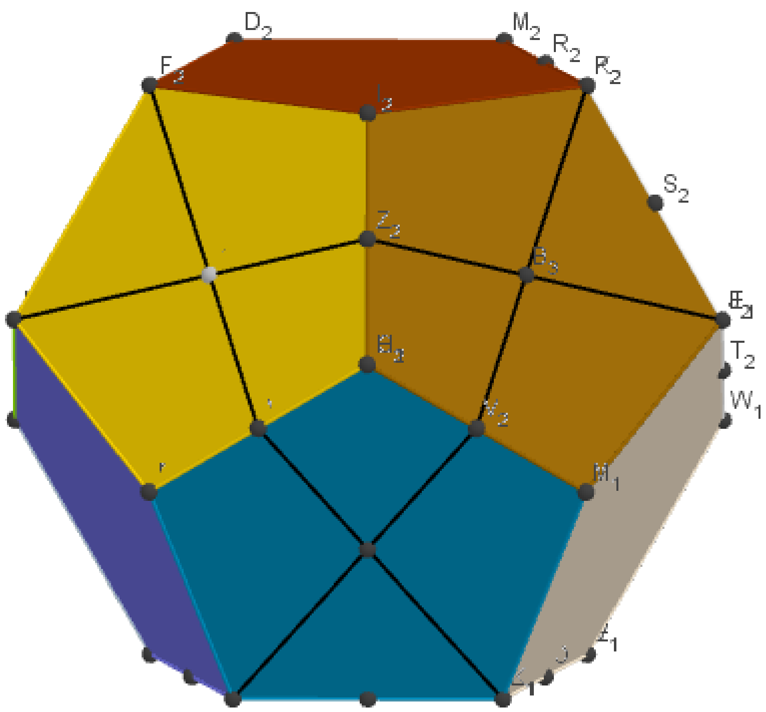


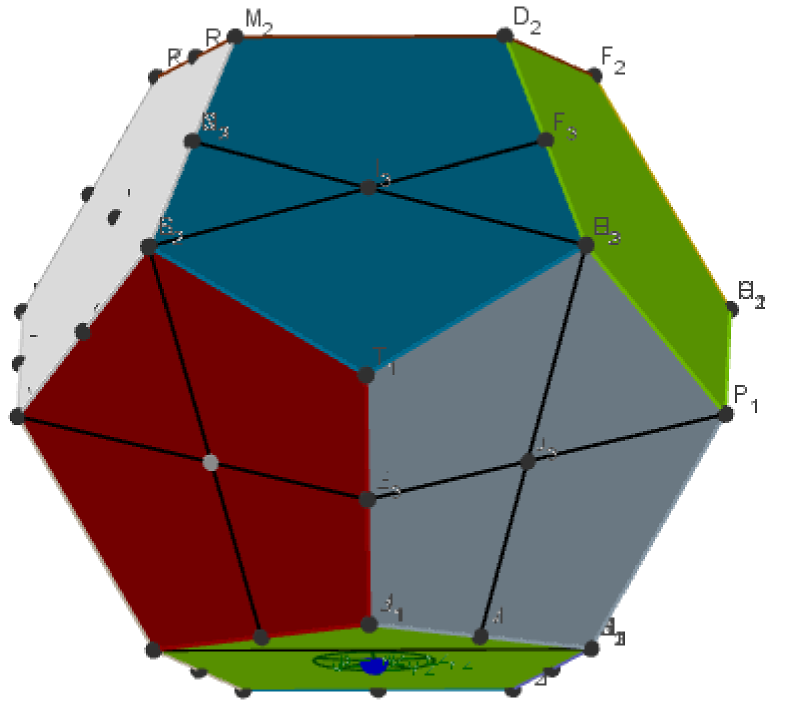
O icosaedro:

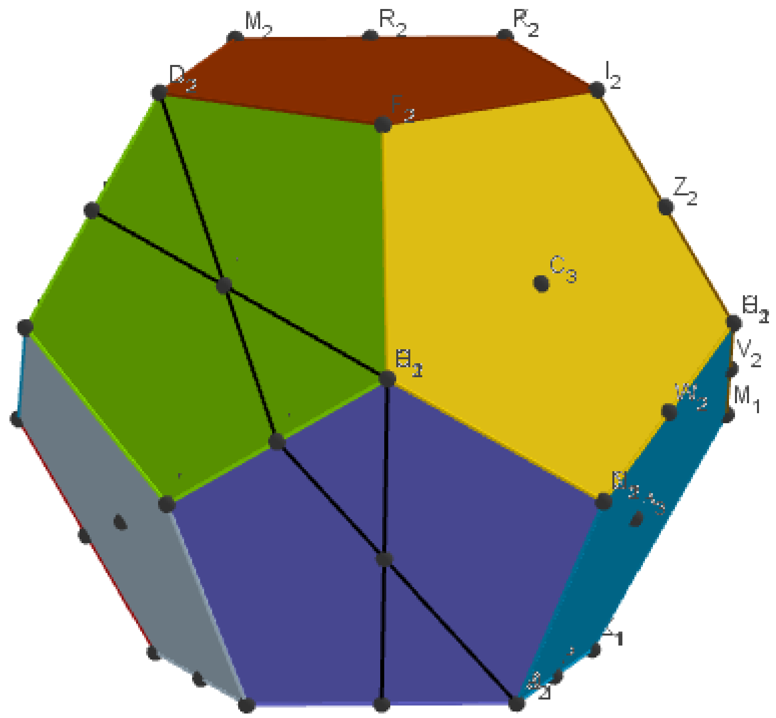
Partindo do dodecaedro e realizando a operação de truncamento é possivel construir o icosaedro facílmente:

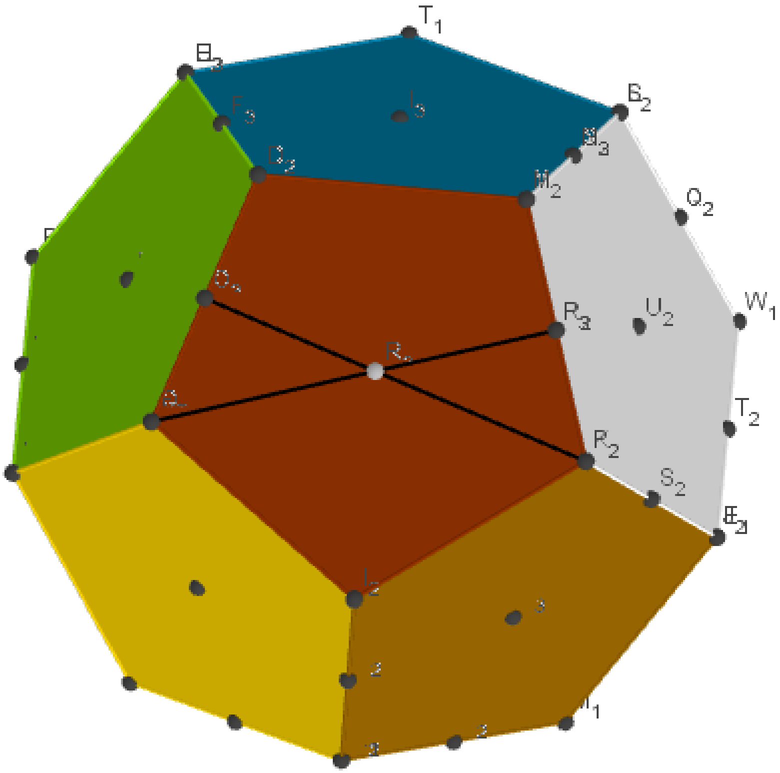


O primeiro passo é pintar as faces para melhorar a visualização, depois é preciso localizar dois segmentos que vão do ponto médio de uma aresta ao vértice oposto e marcar o ponto onde esse segmentos se encontram. Repita o processo para todas as faces.

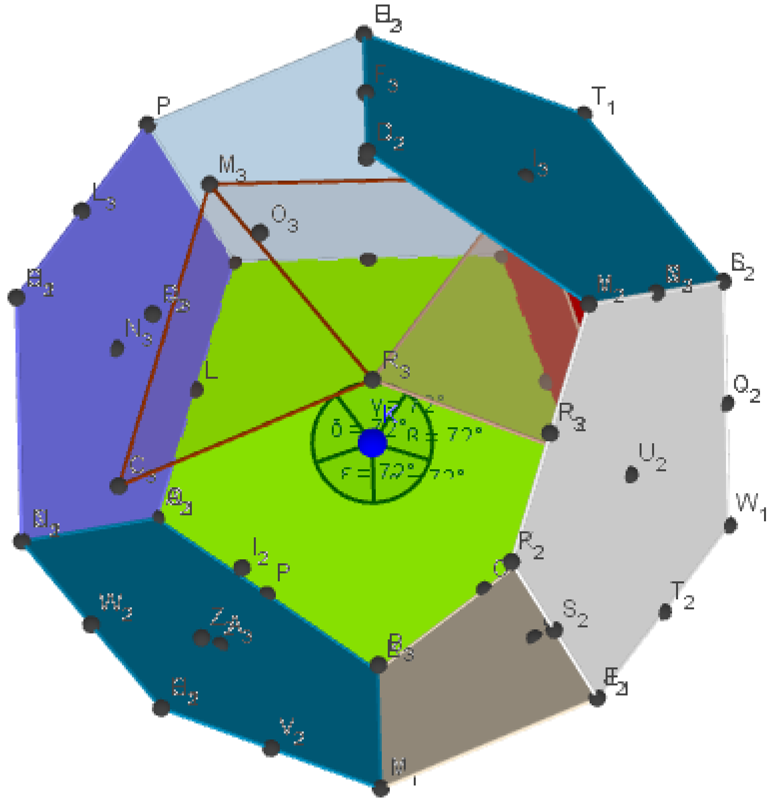


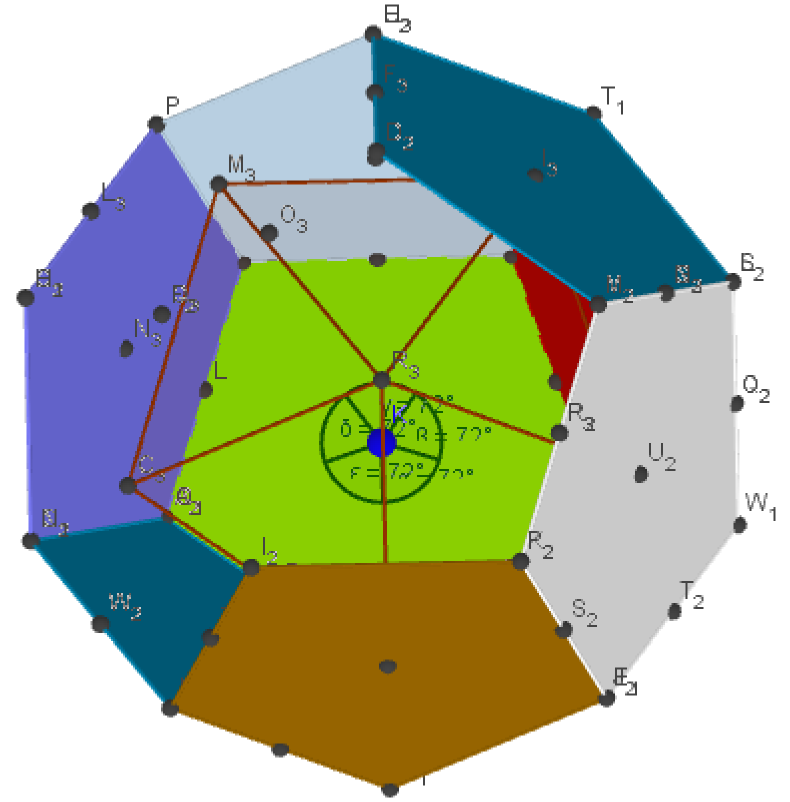

M2
D2
F2
P1

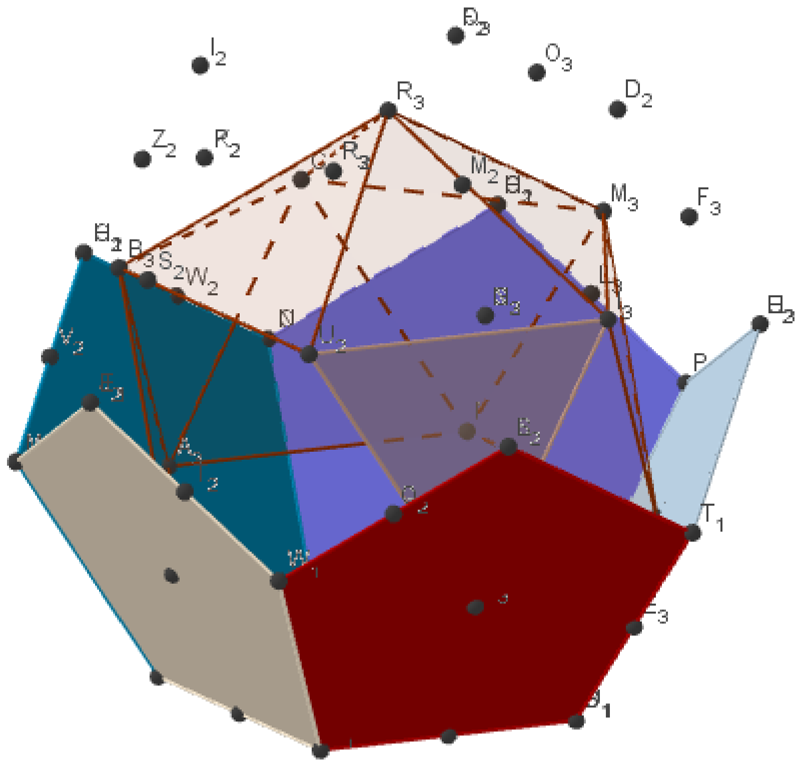

M2
R2
I2
Z2
C3
V2
M1

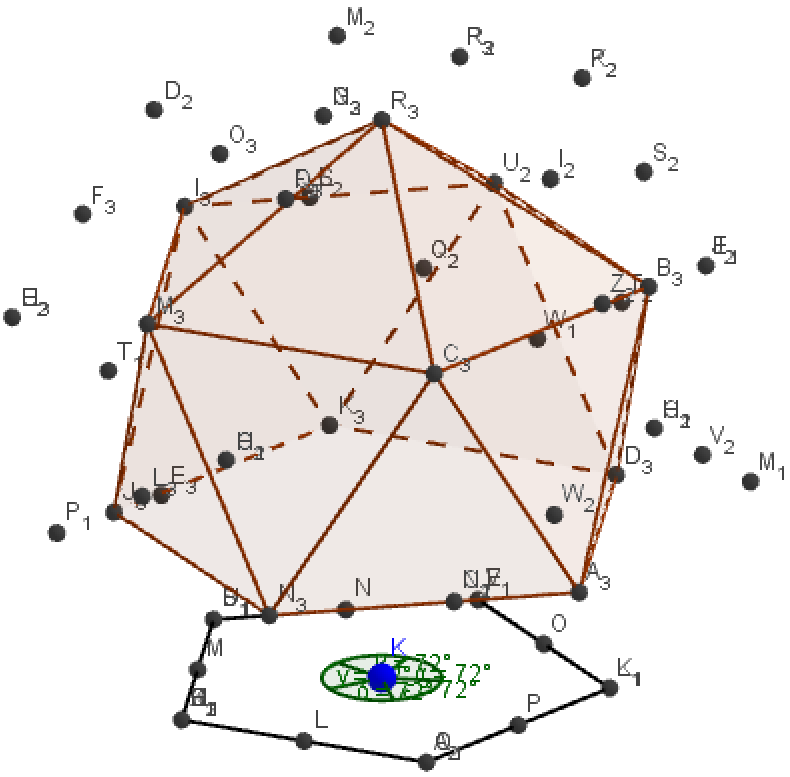


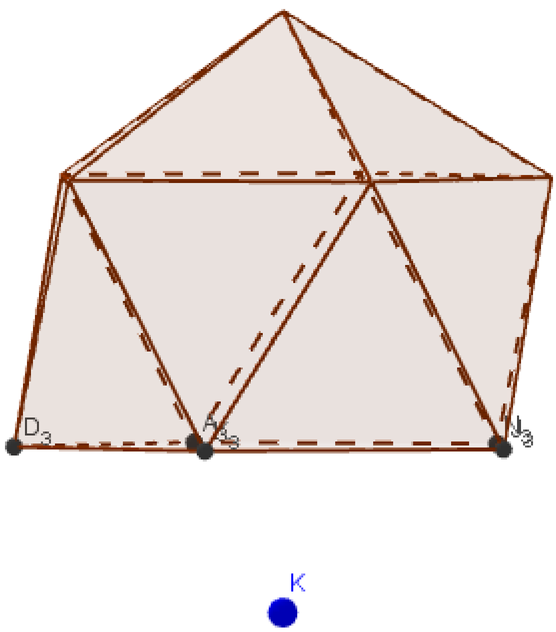
Use o encontro dos segmentos como vértices para o icosaedro, lembranco que o ponto de uma face deve ser ligado com os pontos das cinco faces visinhas.

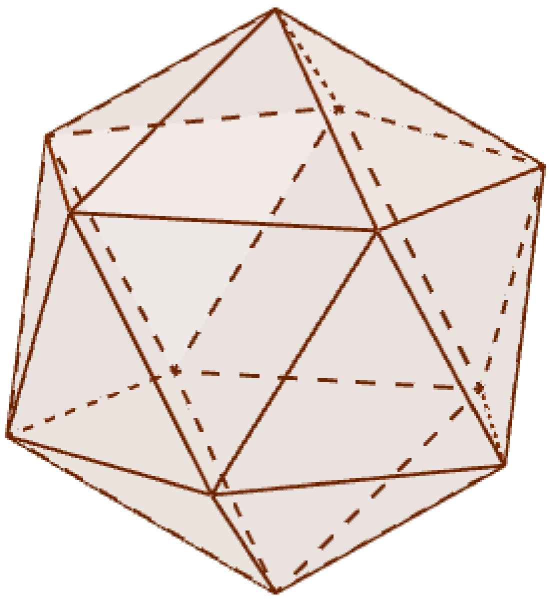



P
M$_3$
O$_3$
T$_1$
B$_2$
R$_3$
L
Q$_2$
U$_2$
W$_1$
R$_2$
I$_2$
S$_2$
T$_2$


I$_2$
O$_3$
D$_2$
R$_3$
Z$_2$
R$_2$
M$_2$
M$_3$
F$_3$
P
T$_1$

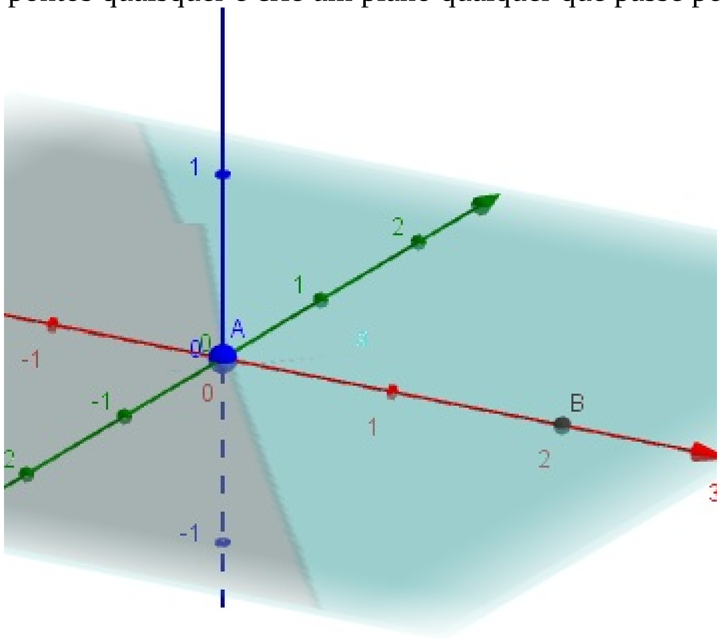

M2
D2
R3
O3
F3
I3
M3
T1
K3
J3
P1
N3
N
M
L
O
K1
P
K
72°
U2
I2
S2
Q2
B3
W1
C3
V2
M1
D3
W2
A3


D3
K

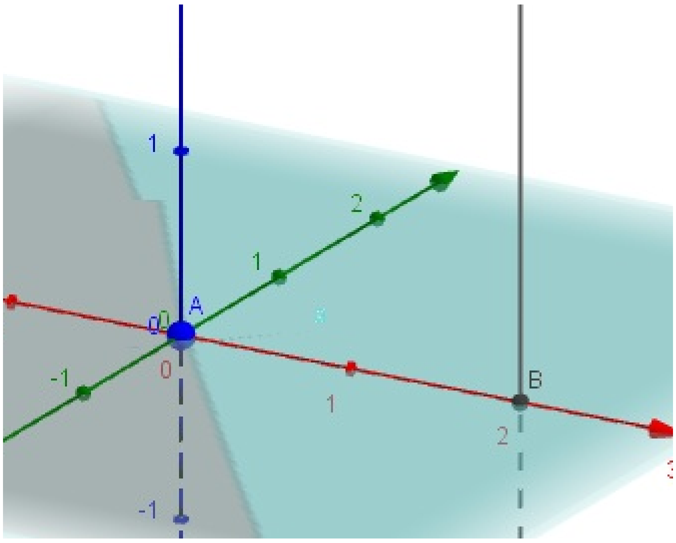


O Tetraedro:

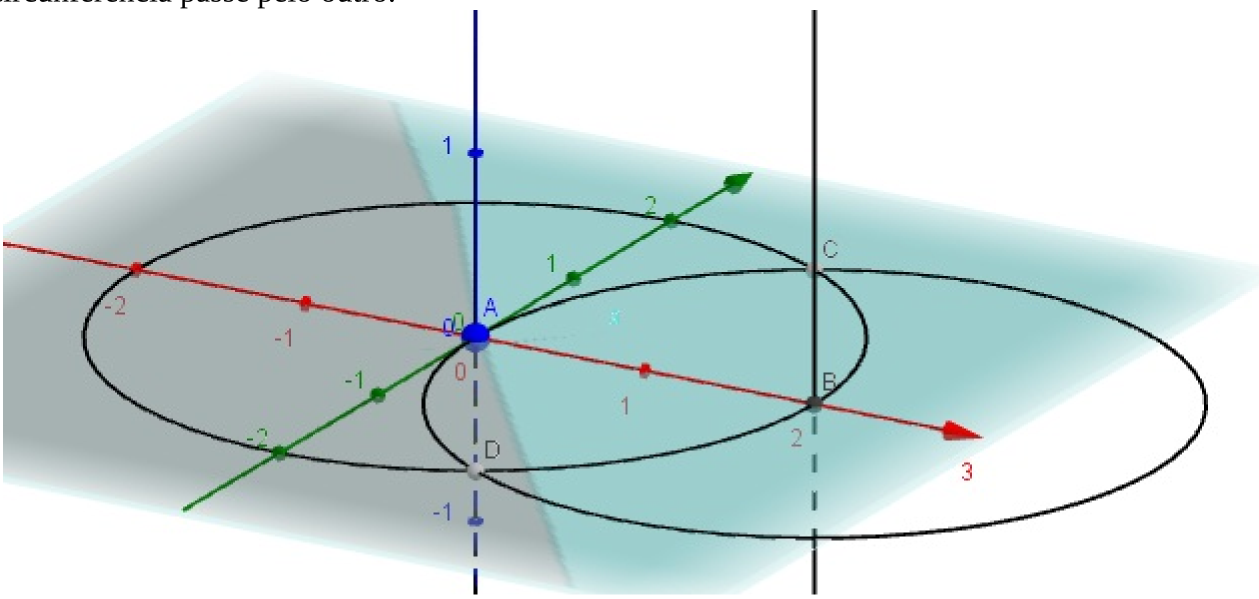
Selecione dois pontos quaisquer e crie um plano qualquer que passe por esses dois pontos.



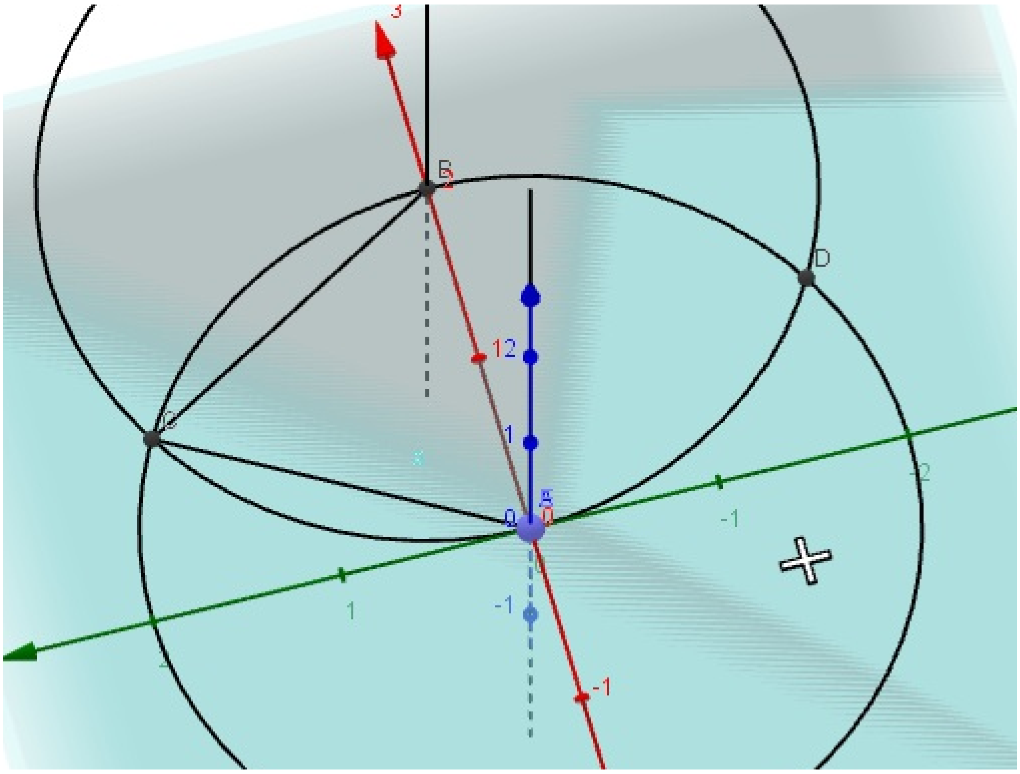
Crie retas perpendiculares ao plano que passem pelos pontos.



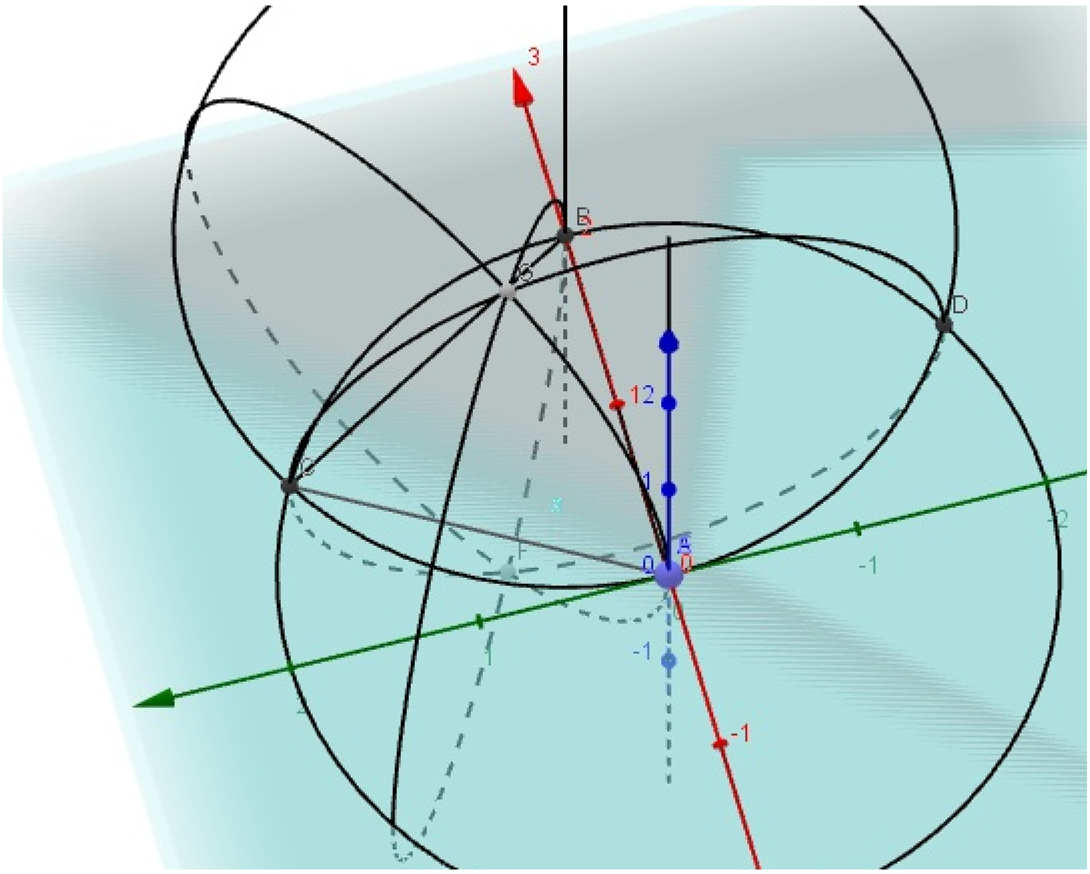
Use essas retas para criar círculos que tenham como centro um dos pontos e cuja circunferência passe pelo outro.



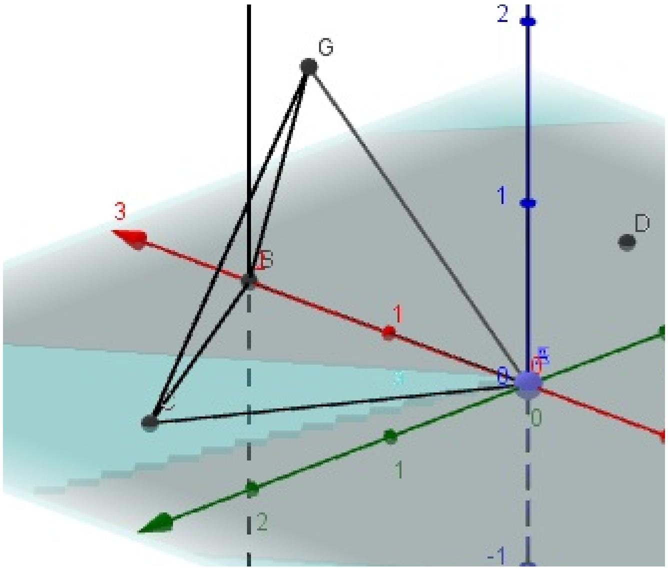
Marque a inersecção desses círculos, obtendo dois pontos. Então escolha um desses pontos e use-o para formar um triângulo com os dois centreos de círculo.



Use as arestas do triângulo para criar círculos cuja circunferência passe pelo vértice oposto a atesta. Marque o ponto onde esses círculos se encontram.

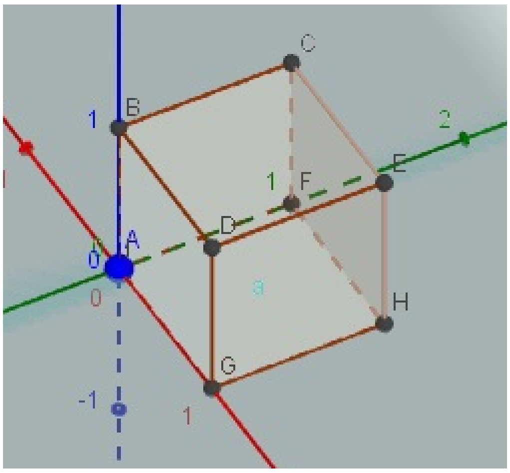


Esconda os círculos e ligue os pontos, criando o tetraedro.

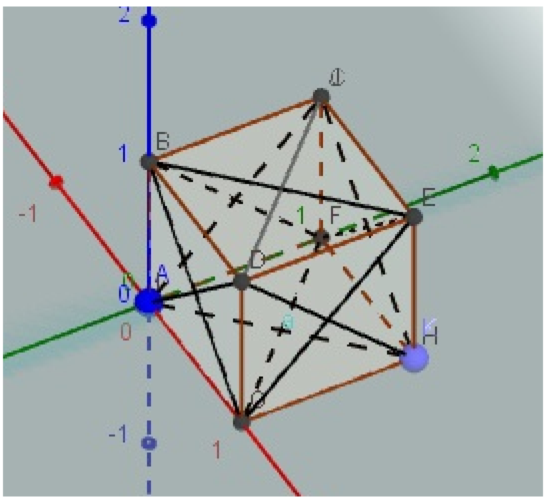


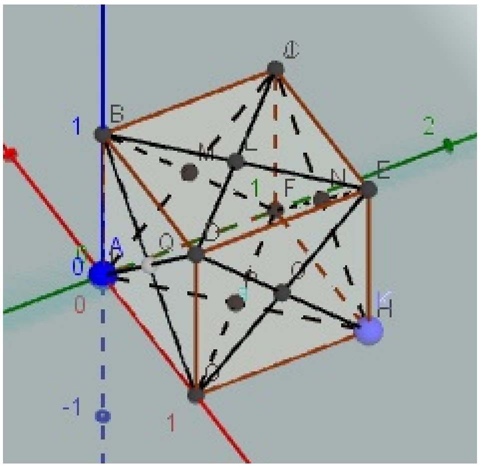
Octaedro:

Partindo do cubo:

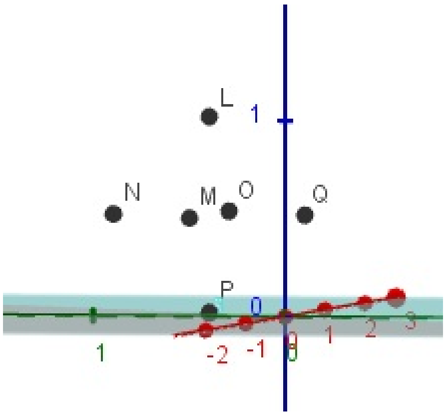


Trace as diagonais de cada face e marque os pontos onde essas diagonais se encontram:

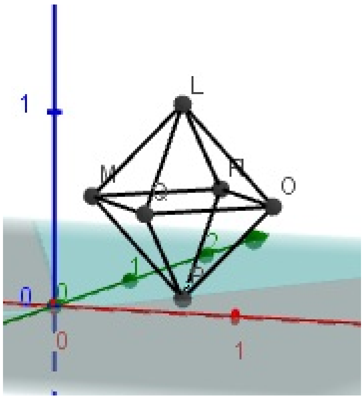




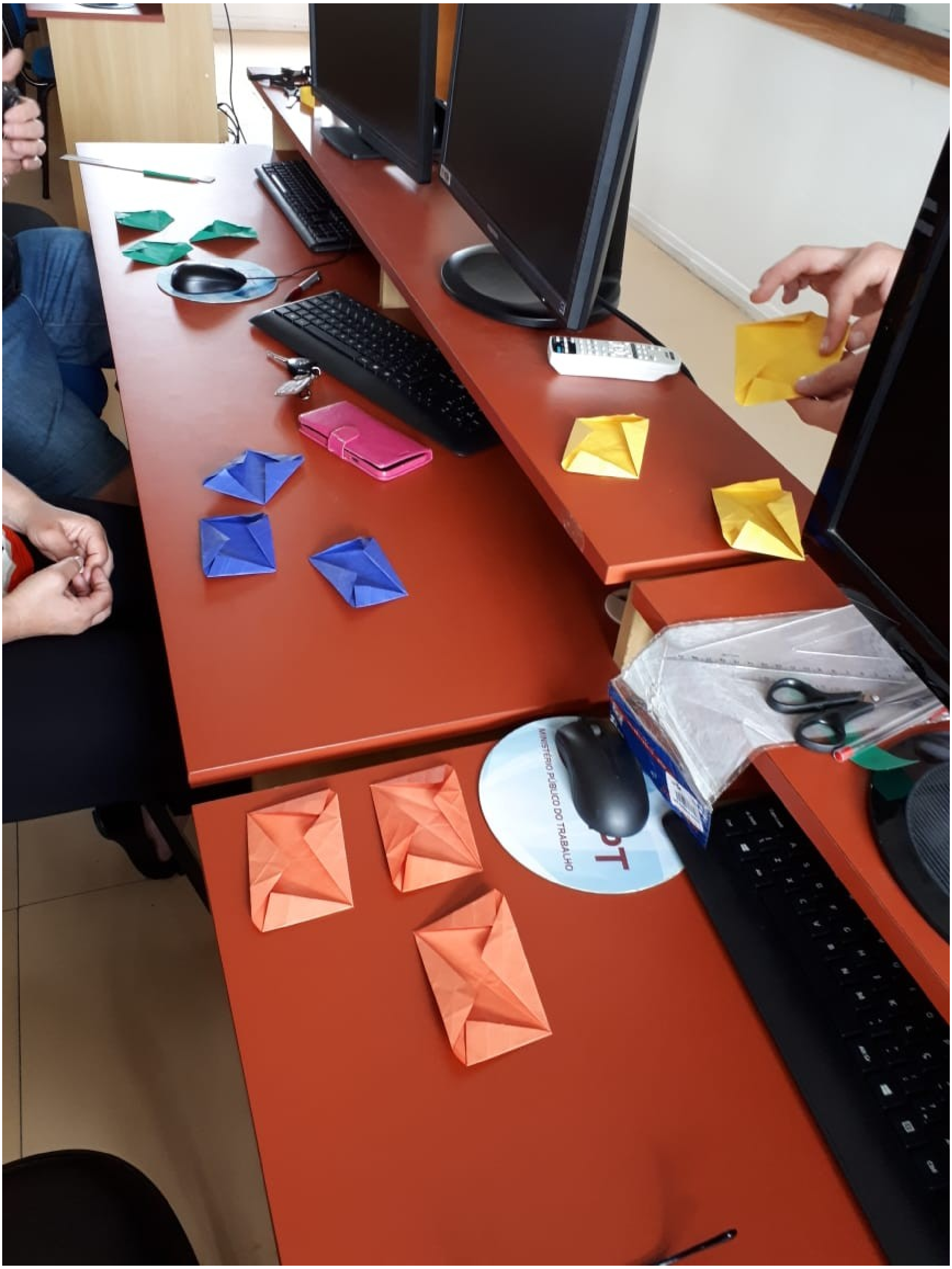
Esconda todos os pontos, retas, segmentos e poligonos, menos os pontos que marcam o encontro das diagonais.



Use esses pontos como vértices do octaedro.



Anexo 3


MINISTÉRIO PÚBLICO DO TRABALHO


MINISTÉRIO PÚBLICO DO TRABALHO