

JESSICA SANTOS

**Aplicação do Cálculo Fracionário na  
Modelagem da Memória e da Aprendizagem**

Rio Grande

2018

JESSICA SANTOS

# **Aplicação do Cálculo Fracionário na Modelagem da Memória e da Aprendizagem**

Versão original

Este exemplar corresponde ao trabalho de conclusão do curso de licenciatura em matemática devidamente apresentado pela Jéssica Nunes dos Santos no instituto de matemática, estatística e física da Universidade Federal do Rio Grande (FURG).

Área de concentração: Matemática

Versão corrigida contendo as alterações solicitadas pela comissão julgadora em xx de xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx de xxxx.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RIO GRANDE  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E FÍSICA  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Orientador: Prof. Dr. Matheus Jatkoske

Rio Grande  
2018

Ficha catalográfica

# Errata

Elemento opcional para versão corrigida, depois de depositada.

O trabalho de conclusão de curso da Jéssica Nunes do Santos, sob o título “**Aplicação do Cálculo Fracionário na Modelagem da Memória e da Aprendizagem**”, apresentado ao instituto de matemática, estatística e física da Universidade Federal do Rio Grande (FURG), para obtenção do título de licenciatura em matemática, aprovada em \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ pela comissão julgadora constituída pelos doutores:

---

**Prof. Dr.**

---

Instituição:

---

Presidente

---

**Prof. Dr.**

---

Instituição:

---

**Prof. Dr.**

---

Instituição:

---

---

**Prof. Dr.**

---

Instituição:

---

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por ser essencial em minha vida, autor do meu destino e ao meu pai José Carlos Ayres dos Santos por ser meu exemplo de vida.

# Agradecimentos

Agradeço à minha mãe Elisabete Nunes dos Santos que batalhou muito para me oferecer uma educação de qualidade e sempre perseverou comigo. Ao meu irmão Rodrigo Nunes dos Santos, que sempre acreditou no meu potencial e nunca negou uma palavra de incentivo. Ao meu namorado José Lucas Rochel das Neves que me alegrou nesses tempos de puro estresse. Ao meu orientador Dr. Matheus Jatkoske que durante anos compartilha seus conhecimentos comigo e que nunca negou uma ajuda durante o TCC, meus mais sinceros obrigada. Ao meus amigos que sempre estiveram presente nessa caminhada. Por fim, manifesto aqui a minha gratidão à Deus, que me deu força e energia para realizar o sonho de concluir a faculdade.

*“Sem Deus, o universo não é explicável satisfatoriamente ”*

*(Albert Einstein)*

# Resumo

Neste trabalho formulamos um modelo matemático baseado no cálculo fracionário de Caputo para a aquisição e perda de memória no processo de ensino. O uso de derivadas fracionárias no estudo de processos de aprendizado é justificado pelo fato de que derivadas fracionárias de Caputo são operadores não locais que introduzem naturalmente efeitos de memórias na dinâmica do sistema modelado. Resolvemos o modelo proposto pelo método de Frobenius e analisamos os resultados para o caso de aprendizado (ganho de conhecimento) e esquecimento. Nossos resultados indicam que o modelo fracionário tem o potencial de descrever processos em que o conhecimento já adquirido sobre algum assunto facilita o aprendizado futuro sobre o mesmo, ou em processos onde existe persistência na memória, tornando a dinâmica do esquecimento mais lenta.

Palavras-chaves: Modelo matemático; Educação científica; Cálculo fracionário;

# Abstract

In this work we formulate a mathematical model based on the Caputo fractional calculus for acquisition and loss of memory in the learning process. The use of fractional derivatives in the study of learning processes is justified by the fact that Caputo fractional derivatives are nonlocal operators that naturally introduce memory effects on the dynamics of the modeled system. We solve the model proposed by the Frobenius method and analyze the results of learning (gain of knowledge) and forgetfulness in this case. Our results indicates that the fractional model has the potential to describe processes in which the knowledge already acquired on some subject facilitates future learning about it, or in processes where there is persistence in memory, redering a slower forgetting dynamic.

Keywords: Mathematical models; Mathematical education; Fractional calculus;

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>UMA BREVE REVISÃO DE CONCEITOS NEUROPSICOLÓGICOS RELACIONADOS A AQUISIÇÃO DE CONHECIMENTO</b> . . .	<b>14</b>
2.1	Mecanismos fundamentais da memória . . . . .	14
2.2	Memórias de longo prazo e curto prazo . . . . .	15
<b>3</b>	<b>UMA MODELAGEM MATEMÁTICA DA APRENDIZAGEM</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>4</b>	<b>CÁLCULO FRACIONÁRIO</b> . . . . .	<b>20</b>
<b>4.1</b>	<b>O Cálculo Fracionário de Riemann-Liouville</b> . . . . .	<b>21</b>
4.1.1	Integrais de Riemann-Liouville . . . . .	23
4.1.2	As derivadas de Riemann-Liouville . . . . .	25
<b>4.2</b>	<b>O Cálculo Fracionário de Caputo</b> . . . . .	<b>26</b>
<b>5</b>	<b>UM MODELO FRACIONÁRIO PARA A MODELAGEM DA MEMÓRIA E DA APRENDIZAGEM</b> . . . . .	<b>29</b>
<b>5.1</b>	<b>Solução do modelo com derivada inteira</b> . . . . .	<b>30</b>
5.1.1	Solução do modelo com derivada de Caputo . . . . .	32
<b>5.2</b>	<b>Discussão dos resultados</b> . . . . .	<b>34</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>38</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>39</b>

# 1 Introdução

Neste trabalho temos como objetivo principal a formulação de um modelo matemático para a aquisição e perda de memória no processo de ensino. Nosso modelo é uma generalização do modelo proposto por Hicklin em 1976 através da inclusão das derivadas fracionárias na equação diferencial que descreve a dinâmica do problema. O uso de derivadas fracionárias no estudo de processos de aprendizado é justificado pelo fato de que derivadas fracionárias são, em geral, operadores não locais. Neste caso, o uso de derivadas fracionárias no tempo introduzem naturalmente efeitos de memórias na dinâmica do sistema modelado. A questão específica que queremos responder é se, com o uso de uma equação diferencial fracionária com parâmetros constantes, podemos modelar com mais precisão um processo tão complexo com o ganho e perda de memória.

Em específico, o modelo que propomos para a dinâmica entre ganho e perda de informação é obtido à partir do modelo de Hicklin através da substituição da derivada inteira por uma derivada fracionária de Caputo de ordem  $0 < \alpha < 1$ . Resolvemos o modelo proposto pelo método de Frobenius e analisamos os resultados para o caso de aprendizado (ganho de conhecimento) e esquecimento. Verificamos através da nossa solução que o modelo fracionário tem o potencial de descrever processos em que o conhecimento já adquirido sobre algum assunto facilita o aprendizado futuro sobre o mesmo, ou em processos onde existe persistência na memória, tornando a dinâmica do esquecimento mais lenta.

Finalmente, a busca por uma teoria sistemática da cognição humana é um tema antigo da psicologia e da neurociência e envolve um grande número de parâmetros. Para Miranda (2005) "não existe aprendizagem sem memória, quer dizer, sem um sistema que registre e guarde a experiência, por isso a importância de estudar a memória nesse sistema." Não é nosso objetivo neste trabalho aprofundar nessas teorias. Nosso objetivo é a partir de um dos modelos mais simples da literatura e analisar sua generalização usando derivadas fracionárias, que por sua vez incluem naturalmente efeitos de memória na dinâmica. Compreender como ocorre a dinâmica do aprendizado e do esquecimento é fundamental para desenvolvimento do trabalho de um professor de matemática e também de professores de outras áreas. Portanto, o desenvolvimento de pesquisas neste tema,

mesmo que teóricas, são de grande importância, permitindo uma melhor compreensão do fenômeno da aprendizagem e possibilitando o desenvolvimento de novas metodologias de ensino.

No capítulo 2 apresentamos uma breve revisão de conceitos neuropsicológicos relacionados a aquisição de conhecimento. Uma breve introdução a modelagem matemática deste problema é apresentada no capítulo 3. O capítulo 4 é dedicado à teoria básica do cálculo fracionário. Apresentamos nosso modelo e obtemos sua solução no capítulo 5. Finalmente, as conclusões são apresentadas no capítulo 6.

## 2 Uma breve revisão de conceitos neuropsicológicos relacionados a aquisição de conhecimento

Neste capítulo faremos uma breve revisão de alguns conceitos neuropsicológicos básicos relacionados ao problema da aquisição e perda de conhecimento. Para esta revisão utilizamos o livro Anderson (Progress in sensory physiology).

### 2.1 Mecanismos fundamentais da memória

Segundo com Anderson, (1991), os processos e mecanismos relacionados a memória, tanto nos seus aspectos normais ou anormais, foram e ainda são extensivamente estudados na literatura. De fato, este é um tema muito complexo e de grande importância. Com a possível exceção de algumas respostas motoras condicionadas simples, a localização da memória, em uma estrutura particular do sistema nervoso central (SNC), ainda é um tema em aberto. Ao que tudo indica, a memória humana não é nem unitária (um fenômeno singular e indiferenciável) nem localizável (associada a uma região específica do SNC).

O armazenamento de informações no SNC, e várias formas de aprendizagens correlacionadas com o armazenamento de informações, parecem ser mediados por uma grande rede de áreas primitivas e avançadas do cérebro. Processos de aprendizados simples, como no caso de reflexos condicionados, são em grande parte mediados por redes neurais na parte central inferior do cérebro.

Por outro lado, processos de aprendizagem mais complexos, como por exemplo no caso de aprendizagem baseadas em linguagem, requerem a participação de regiões da parte superior do cérebro incluindo estruturas corticais. Enquanto certas partes do cérebro podem ser mostradas como essenciais para funções de memória, elas talvez não sejam o local exato onde a memória está armazenada.

Experimentos mostram que o armazenamento da memória ocorre de forma difusa, sendo amplamente distribuída no SNC. A difusividade da memória é explicada pelo motivo de que um neurônio individual está envolvido na representação de muitas memórias.

Os neurônios individuais, que agrupados em rede formam um conjunto de neurônios elementares, não são exclusivos de um único traço de memória, mas podem estar envolvidos em combinações com outros neurônios para formar outros conjuntos elementares representando unidades de informação armazenadas. Formando assim um mosaico de neurônios, tal mosaico participa de diversos padrões de combinações e assim poderia explicar a notável capacidade de armazenamento do SNC.

## 2.2 Memórias de longo prazo e curto prazo

De acordo com Anderson, (1991), Algumas investigações científicas e neurobiológicas cognitivas dos estados da memória sugerem que a codificação da informação na memória ocorre em vários estágios, porém dois são considerados mais importantes. O primeiro caso é o que a informação pode ser adquirida e acessada imediatamente, conhecido como "short-term memory"(STM), com duração de intervalos de até segundos ou minutos. O segundo caso é o de um tipo de memória mais estável e duradoura, conhecida como "long-term memory"(LTM), com duração de anos.

O STM é visto como uma memória de trabalho com cada item categorizado como um "esboço instantâneo". Ela é mantida na memória imediata devido à sua relevância para realizar tarefas de uso imediato. Já o LTM é uma rede de esquemas inter-relacionados que fornece modelos de tarefas em situações de previsibilidade na representação cognitiva da experiência, ou seja, uma memória que dá coerência para uma aplicação futura.

São bastantes conhecidos os diversos níveis de processamento de informações no SNC. A natureza difusa do armazenamento de memória e essas distinções dicotômicas podem representar apenas uma categorização conveniente de processos que envolvem muitos estágios intermediários. Assim, é provável que as funções do SNC forneçam uma transformação dinâmica de informações antes e durante da codificação em longo prazo do armazenamento. As funções integrativas da ordem superior (LTM) podem sintetizar as informações recém-adquiridas (STM) dentro das informações armazenadas anteriormente, atualizando-as e modificando os armazenamentos de informações anteriores para incluir as novas unidades de informação prontamente acomodadas.

Também foi sugerido um processo sináptico conhecido como "long-term potentiation"(LTP) pode ser um mecanismo neuronal oculto ao armazenamento de informação. O LTP remete a uma mudança de longo prazo na eficácia sináptica no sistema límbico de

mamíferos, que explica a unidade responsável pelas emoções e comportamentos sociais. Algumas das limitações do LTP são como base para LTM que são considerados os instintos da memória. Assim, o que tem sido chamado de memória de trabalho (STM) em oposição à memória de armazenamento de longo prazo (LTM) representa uma separação tecnicamente conveniente, mas não totalmente correta.

### 3 Uma modelagem matemática da aprendizagem

Como visto brevemente no capítulo anterior, o processo de armazenamento e processamento de memória no SNC é um problema extremamente complexo e ainda não totalmente compreendido. Portanto, a descrição matemática deste processo, levando-se em conta detalhes da estrutura neurobiológica do cérebro, é um grande desafio ainda em aberto. Neste contexto, é importante a utilização de modelos matemáticos simples (que envolvam poucos parâmetros), e que não levem em conta diretamente os detalhes biológicos do problema, para modelar este processo.

Um dos primeiros modelos para descrever este problema foi proposto por Landahl. Neste modelo a interação entre dois neurônios é descrita de forma aproximada por uma equação diferencial simples. Landahl em Anderson, (1991), propôs que a atividade em redes nervosas contendo loops recorrentes pode ser modelada matematicamente sabendo que intensidade de excitação  $E$  de um nervo aferente varia linearmente com a intensidade do estímulo  $S$  fornecida. Uma expressão matemática foi derivada para a taxa de decaimento da excitação  $\epsilon$  dentro das redes nervosas. Se  $\epsilon$  é o número de ciclos excitados dentro de uma rede contendo loops neurais e a quantidade  $c$  é uma constante de proporcionalidade, então a taxa de variação de  $\epsilon$  é dada por

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -c\epsilon. \quad (3.1)$$

Se assumirmos agora que cada uma das fibras aferentes de um loop neuronal recorrente em uma rede faz sinapses excitatórias com outro loop, aumentando assim a disseminação da excitação e amplificando o número de loops neuronais excitados, então o número de ciclos excitados dentro de uma rede de feedback é dado por

$$\frac{d\epsilon}{dt} = CE - c\epsilon, \quad (3.2)$$

onde  $C$  é uma outra constante de proporcionalidade representando o aumento dos ciclos neuronais excitados devido à disseminação da excitação  $E$ . A Eq. (3.2) é uma equação diferencial linear de primeira ordem cuja solução é dada por

$$\epsilon = \frac{CE}{c}(1 - e^{-ct}), \quad (3.3)$$

e expressa o grau de excitação em função do tempo. Quando  $t = 0$  temos  $\epsilon = 0$ . À medida que  $t$  aumenta, e  $e^{-ct}$  diminui para zero,  $\epsilon$  tende para  $\frac{CE}{c}$ , que é o valor máximo do número de ciclos excitados em uma rede neuronal. Por outro lado, para simular a diferenciação, mediada pela inibição dentro das redes, Rashevsky em Anderson, (1991), assume que algumas das fibras aferentes de uma rede neuronal também podem fazer associações sinápticas inibidoras com os neurônios em loops neuronais de ordem superior. A dinâmica do número de ciclos excitados  $j$  que geram uma conexão inibidora com outros neurônios é dada por

$$\frac{dj}{dt} = BE - bj, \quad (3.4)$$

e  $B$  e  $b$  são constantes análogas à  $C$  e  $c$  da Eq. (3.2). A solução da Eq. (3.4) é similar à Eq. 3 substituindo-se  $C$  e  $c$  por  $B$  e  $b$ . A combinação das equações de excitação e inibição permite uma análise dos efeitos conjuntos da disseminação e inibição da excitação dentro de uma complexa rede nervosa. Variando as quatro constantes  $C$ ,  $c$ ,  $B$  e  $b$ , é possível simular alguns fenômenos neurocognitivos de ordem superior segundo Anderson, (1991), como tempos de reação, discriminação psicofísica, visão de cores, alguns aspectos de aprendizado e percepção estética.

Os modelos de Landahl e Rashevsky são limitados à representação biofísica de redes neurais isoladas, em vez de uma análise de nível de sistemas apropriada para a construção de modelos neurocognitivos de processamento de informações. Em uma pesquisa mais aprofundada de Grossberg em Anderson, (1991), propõe um modelo para descrever a dinâmica dos processos LTM e STM baseado na premissa de que estados de atividade s ressonantes similares aos ciclos de neurônios excitados de Rashevsky. Essa atividade ressonante nos sistemas STM causa mudanças na LTM. Reciprocamente, as mudanças na LTM alteram os padrões na STM. Esses ciclos interativos continuam até as STM e LTM se equilibrem. A interação dinâmica entre as STM e as LTM é categorizada como "ressonância adaptativa". Assim, o "código" de uma rede é o conjunto de estados ressonantes estáveis que podem ser gerados em resposta à uma entrada sensorial. Uma variedade de padrões no processamento de informações visuais e auditivas pode ser analisada a partir dessa perspectiva.

Com o objetivo de representar a aquisição de informação humana como uma função da interação dinâmica entre ganho e perda de informação segundo Hicklin, (1976), que propõe uma abordagem diferente. Nesta proposta, a quantidade de informação adquirida

em uma dada unidade de tempo é representada pelo balanço de informações armazenadas e esquecidas

$$\frac{dN}{dt} = A - aN, \text{ com } N(0) = 0, \quad (3.5)$$

em que  $N$  é a quantidade de informação adquirida no tempo  $t$ , e  $A$  e  $a$  são constantes características de um determinado indivíduo e dentro de uma situação de aprendizagem específica. A constante  $A$  representa a aptidão do indivíduo e  $a$  é uma expressão da taxa de perda de informação durante o esquecimento (quando  $a > 0$ ) ou ganho de informação durante o aprendizado (quando  $a < 0$ ). A solução da Eq. (3.5) pode ser facilmente obtida

$$N = \frac{A}{a}(1 - e^{at}). \quad (3.6)$$

Essa solução produz uma curva de informação de aprendizado que se aproxima de uma assíntota  $\frac{A}{a}$  com valores crescentes de  $t$  (para  $a > 0$ ). É uma ferramenta útil para representar o curso do tempo da aprendizagem humana quando apenas algumas características intrínsecas do aprendiz (ou seja, aptidão e taxa de perda de informação) são consideradas. Ela não fornece previsões de aprendizado baseadas em fatores extrínsecos, como a qualidade e quantidade do input sensorial. Por ser um modelo bem simples, partiremos dele para formular um novo modelo baseado no cálculo fracionário.

## 4 Cálculo Fracionário

Em 1965, segundo Oldham; Spanier, (1997) l'Hospital escreveu uma carta para Leibniz perguntando qual o significado da expressão  $\frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}}$ , ou seja, qual o significado da derivada de ordem  $\frac{1}{2}$ . Leibniz respondeu a carta dizendo que o valor de  $d^{\frac{1}{2}}x$  é  $x\sqrt{dx} : x$ . Desta forma, poderíamos nos perguntar qual seria o significado de uma derivada de ordem  $\pi$  ou  $i$ . Para esta revisão utilizaremos como referência a apostila de Lazo, (2013).

O Cálculo Fracionário vem despertando muito interesse na comunidade científica nas últimas três décadas devido as suas diversas aplicações. Apesar de tão antigo quanto o cálculo convencional a demora no surgimento de aplicações deste cálculo se da por conta a dificuldade de interpretar física e geometricamente as derivadas e integrais não inteiras.

Recentemente foi proposta uma interpretação geometrica como "sombra das áreas" e uma interpretação física como "sombras do passado" embora não seja totalmente satisfatório essas interpretações o Cálculo Fracionário é uma ferramenta extremamente importante para aplicações que envolvam sistemas complexos. Estes sistemas que podemos utilizar no cálculo fracionário são sistemas com comportamento não-local ou com dinâmica dependente de memória. Uma das mais antigas definições do Cálculo Fracionário se deve a Euler e foi formulada em 1730. Em que a fórmula generalizada é

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}. \quad (4.1)$$

Para  $m$  e  $n$  inteiros com  $m > n$ , substituindo os  $m$  e  $n$  por números reais  $\beta$  e  $\alpha$ , e os fatoriais pela função Gamma, obtemos

$$\frac{d^\alpha x^\beta}{dx^\alpha} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}, \quad (4.2)$$

em que a função  $\Gamma(z)$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \quad (4.3)$$

é a generalização da função fatorial para números não inteiros. Para  $z = m + 1$  inteiro usamos  $\Gamma(m + 1) = m!$ .

Embora esta seja a definição mais simples para a derivada fracionária, a definição de Euler é muito restritiva, pois só se aplica em funções analíticas, e além disso não tem definição formalmente rigorosa.

Já a definição de Riemann-Liouville é menos restritiva e mais popular entre os matemáticos. Segundo esta definição, a derivada fracionária de ordem  $\alpha$  é dada por:

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n y}{dx^n} \int_a^x \frac{y(t)}{(x - t)^{-\alpha n + 1}} dt, \quad (4.4)$$

onde  $n \leq \alpha < n + 1$  é um inteiro e  $a$  um número real arbitrário. É importante notar que a derivada fracionária de Riemann-Liouville é um operador não local pois o valor da derivada da função em  $x$  depende do valor da função em todo o intervalo  $a \leq x$ , devido à integral presente na definição. Veremos mais a frente o porque dessa integral na definição da derivada fracionária.

Por outro lado, a formulação mais usada em aplicações e nas ciências, em geral, é a definição de Caputo

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x \frac{1}{(x - t)^{-\alpha n + 1}} \frac{d^n y(t)}{dx^n} dt. \quad (4.5)$$

O Cálculo fracionário de Caputo é o mais popular entre os cientistas, pois as equações diferenciais envolvendo as derivadas de Caputo requerem condições de contorno regulares que são semelhantes às equações diferenciais com derivadas usuais de ordem inteira.

Vamos detalhar nas próximas subseções as definições e propriedades básicas do Cálculo Fracionário de Riemann-Liouville e Caputo.

## 4.1 O Cálculo Fracionário de Riemann-Liouville

Historicamente, o Cálculo Fracionário de Riemann-Liouville é a formulação mais popular entre os matemáticos. Frisando que diversas outras formulações de derivadas fracionárias, incluindo a de Caputo, são variantes da proposta de Riemann-Liouville. Essas diversas formulações de derivadas fracionárias estão conectadas pela continuação analítica da fórmula de Cauchy para as integrais repetidas:

**Teorema 4.1.1** (*Fórmula de Cauchy*) *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável segundo Riemann no intervalo  $[a, b]$ . Então temos para a integral de ordem  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ):*

$$\int_a^x f(t) (dt)^n = \int_a^x \int_a^{t_n} \int_a^{t_{n-1}} \cdots \int_a^{t_3} \int_a^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 \cdots dt_{n-1} dt_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f(t) (x-t)^{n-1} dt \quad (4.6)$$

Em que  $\Gamma$  é a função gamma de Euler

**Prova 1** Para provar (4.6) vamos primeiro mostrar que a primeira integral da função  $f$  pode ser escrita na forma

$$\int_a^x f(t)dt = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt, \quad (4.7)$$

Calculando sucessivamente as derivadas da integral do lado direito da (4.7) Obtemos:

$$\int_a^x f(t)dt = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt = \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \left[ \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} (x-t)^{n-1} f(t)dt + (x-x)^{n-1} f(x) \right], \quad (4.9)$$

resultando em

$$\int_a^x f(t)dt = \frac{1}{(n-2)!} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \int_a^x (x-t)^{n-2} f(t)dt. \quad (4.10)$$

continuando com o mesmo procedimento obtemos:

$$\int_a^x f(t)dt = \frac{1}{(n-2)!} \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} \left[ \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} (x-t)^{n-2} f(t)dt + (x-x)^{n-2} f(x) \right] \quad (4.11)$$

$$= \frac{1}{(n-3)!} \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} \int_a^x (x-t)^{n-3} f(t)dt = \dots \quad (4.12)$$

$$\dots = \frac{1}{(n-j)!} \frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}} \int_a^x (x-t)^{n-j} f(t)dt, \quad (4.13)$$

onde  $1 \leq j \leq n$  é um inteiro qualquer. Escolhendo  $j = n$  e lembrando que  $0! = 1$  e usando a identidade  $\frac{d^0}{dx^0} \equiv 1$  obtemos (4.7). Para provar (4.6) basta intergrarmos repetidas vezes a (4.7). Integrando uma vez obtemos

$$\int_a^x dt_2 \int_a^{t_2} f(t_1)dt_1 = \int_a^x \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dt_2^{n-1}} \int_a^{t_2} (t_2-t)^{n-1} f(t)dt dt_2 \quad (4.14)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt - \frac{d^{n-2}}{da^{n-2}} \int_a^a (a-t)^{n-1} f(t)dt \right) \quad (4.15)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt. \right) \quad (4.16)$$

Integrando duas vezes obtemos:

$$\int_a^x dt_3 \int_a^{t_3} dt_2 \int_a^{t_2} f(t_1)dt_1 = \int_a^x \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-2}}{dt_3^{n-2}} \int_a^{t_3} (t_3-t)^{n-1} f(t)dt dt_3 \quad (4.17)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt - \frac{d^{n-3}}{da^{n-3}} \int_a^a (a-t)^{n-1} f(t) dt \right) \quad (4.18)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad (4.19)$$

e finalmente, depois de integrar  $n-1$  vezes a (4.7) e identificar  $\Gamma(n) = (n-1)!$  obtemos a (4.6) ■.

### 4.1.1 Integrais de Riemann-Liouville

A fórmula de Cauchy para integrais repetidas (4.6) é fundamental para o cálculo fracionário de Riemann-Liouville. As continuações analíticas da (4.6) são chamadas integrais à direita e à esquerda de Riemann-Liouville.

**Definição 4.1.1** *Seja  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ . Os operadores  ${}_a J_x^\alpha$  e  ${}_x J_b^\alpha$  definidos em  $L_1[a, b]$  por*

$${}_a J_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(u)}{(x-u)^{1-\alpha}} du \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+) \quad (R.1) \quad (4.20)$$

e

$${}_x J_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(u)}{(u-x)^{1-\alpha}} du \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+), \quad (4.21)$$

Com  $a < b$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ , são chamados de integrais fracionárias à esquerda e à direita de Riemann-Liouville de ordem  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , respectivamente.

Para  $\alpha$  inteiro as integrais de Riemann-Liouville (4.20) (4.21) coincidem com integrais repetidas usuais (4.6). Além disso, pelas definições (4.20) (4.21) são fáceis de ver que as integrais fracionárias de Riemann-Liouville convergem para quaisquer funções integráveis  $f$  se  $\alpha > 1$ . Mais ainda, é possível provar a convergência das (4.20) e (4.21) para as funções  $f \in L_1[a, b]$  mesmo quando  $0 < \alpha < 1$ .

**Teorema 4.1.2** *As integrais fracionárias de Riemann-Liouville (4.20) e (4.21) preservam uma importante propriedade algébrica das integrais usuais:*

*Seja  $\alpha, \beta \geq 0$  e  $f \in L_1[a, b]$ . Então*

$${}_a J_x^\alpha {}_a J_x^\beta f(x) = {}_a J_x^{\alpha+\beta} f(x) \quad e \quad {}_a J_x^\alpha {}_x J_x^\beta f(x) = {}_x J_b^{\alpha+\beta} f(x) \quad (4.22)$$

**Prova 2** Vamos apresentar a prova para as derivadas à direita (para as derivadas à esquerda segue uma prova similar) da definição (4.20) temos:

$${}_a J_x^\alpha {}_a J_x^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \int_a^t (t-u)^{\beta-1} f(u) du dt \quad (4.23)$$

Como as integrais existem para  $f \in L_1[a, b]$ , usando o Teorema de Fubini podemos trocar a ordem de integração

$${}_a J_x^\alpha {}_a J_x^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_u^x (x-t)^{\alpha-1} (t-u)^{\beta-1} f(u) dt du \quad (4.24)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \int_u^x (x-t)^{\alpha-1} (t-u)^{\beta-1} f(u) dt du. \quad (4.25)$$

Fazendo a mudança de variável  $t = u + s(x-u)$  obtemos

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) (x-u)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds du. \quad (4.26)$$

Identificando  $\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$  com a função Beta de Euler  $B(\alpha, \beta)$  resulta, finalmente,

$${}_a J_x^\alpha {}_a J_x^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(u) (x-u)^{\alpha+\beta-1} du = {}_a J_x^{\alpha+\beta} f(x) \quad (4.27)$$

■.

Uma importante consequência desse teorema explicado é a comutatividade dos operadores integrais:

**Corolário 4.1.1** Sobre as considerações do Teorema temos

$${}_a J_x^\alpha {}_a J_x^\beta f(x) = {}_a J_x^\beta {}_a J_x^\alpha f(x) \quad e \quad {}_x J_b^\alpha {}_x J_b^\beta f(x) = {}_x J_b^\beta {}_x J_b^\alpha f(x) \quad (4.28)$$

Em outras palavras, os conjuntos dos operadores  ${}_a J_x^\alpha : L_1[a, b] \rightarrow L_1[a, b]; \alpha \geq 0$  e  ${}_x J_b^\alpha : L_1[a, b] \rightarrow L_1[a, b]; \alpha \geq 0$  formam semigrupos com respeito à concatenação, onde o elemento neutro é o operador identidade,  ${}_a J_x^0 e_x J_b^0$ , respectivamente. Estas propriedades (4.28) são uma generalização direta do caso usual de integrais de ordem inteira, onde as integrais também comutam formando um semigrupo,

### 4.1.2 As derivadas de Riemann-Liouville

Os operadores de integração  ${}_a J_x^\alpha$  e  ${}_x J_b^\alpha$ , definidos em (4.20) e (4.21), desempenham papel central no Cálculo Fracionário de Riemann-Liouville. Antes de definir as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville, relembramos que para inteiros positivos  $n > m$  vale a identidade  $D_x^m f(x) = D_x^n J_x^{n-m} f(x)$ , onde  $D_x^m$  é uma derivada usual de ordem inteira  $m$ .

**Definição 4.1.2** *As derivadas fracionárias de ordem  $\alpha > 0$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) de Riemann-Liouville à esquerda e à direita são definidas respectivamente, por  ${}_a D_x^\alpha f(x) = D_x^n J_x^{n-\alpha} f(x)$  e  ${}_x D_b^\alpha f(x) = (-1)^n D_x^n J_b^{n-\alpha} f(x)$  com  $n = [\alpha] + 1$ , ou seja,*

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(u)}{(x - u)^{1+\alpha-n}} du \quad (n = [\alpha] + 1, \alpha \in \mathbb{R}) \quad (4.29)$$

e

$${}_x D_b^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b \frac{f(u)}{(u - x)^{1+\alpha-n}} du \quad (n = [\alpha] + 1, \alpha \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}), \quad (4.30)$$

onde  $D_x^n = \frac{d^n}{dx^n}$  é uma derivada usual de ordem inteira  $n$ .

Uma consequência importante das definições (4.29) e (4.30) é que as derivadas de Riemann-Liouville são operadores não locais. O operador à esquerda (à direita) definido pela expressão integro-diferencial (4.29) e (4.30) depende de valores da função à esquerda (à direita) de  $x$ , isto é,  $a \leq u \leq x$  ( $x \leq u \leq b$ ).

**Observação 4.1.1** *Quando  $\alpha$  é um inteiro, as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville (4.29) e (4.30) reduzem à derivadas usuais inteira  $\alpha$ .*

**Observação 4.1.2** *Para  $0 < \alpha < 1$  as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville (4.29) e (4.30) podem ser aplicadas mesmo em funções não diferenciáveis. Esta propriedade é uma consequência direta do fato que neste caso a derivada fracionária é uma derivada de primeira ordem de uma integral. Podemos tomar a derivada de Riemann-Liouville mesmo de funções não diferenciáveis em todo o domínio, como a função de Weierstrass.*

Para ilustrar a aplicação das derivadas de Riemann-Liouville em funções simples, vamos calcular a derivada à esquerda  ${}_a D_x^\alpha f(x)$  (4.29) da função potência  $f(x) = (x - a)^\beta$ .

Temos

$${}_a D_x^\alpha (x - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{(u - a)^\beta}{(x - u)^{1+\alpha-n}} du \quad (4.31)$$

Onde  $n = [\alpha] + 1$ , e devemos ter  $\beta > -1$  em ordem de garantir a convergência da integral em (4.31). Fazendo a mudança de variável  $s = \frac{u-a}{x-a}$  obtemos

$${}_a D_x^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} (x-a)^{\beta-\alpha+n} \int_0^1 s^\beta (1-s)^{n-\alpha-1} ds \quad (4.32)$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} \frac{d^n}{dx^n} (x-a)^{\beta-\alpha+n}, \quad (4.33)$$

onde identificamos  $\int_0^1 s^\beta (1-s)^{n-\alpha-1} ds = B(n-\alpha, \beta+1)$  com a função Beta de Euler. Temos duas possibilidades para a derivada  ${}_a D_x^\alpha (x-a)^\beta$ . A primeira, quando  $\alpha - \beta \in \mathbb{N}$  o lado direito da (4.33) se reduz à um polinômio de grau inteiro  $n - (\alpha - \beta) \in 0, 1, 2, \dots, n-1$  e, portanto, a derivada é nula. Na segunda, quando  $\alpha - \beta \notin \mathbb{N}$  a derivada é não nula:

$${}_a D_x^\alpha (x-a)^\beta = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha - \beta \in \mathbb{N} \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} & \text{se } \alpha - \beta \notin \mathbb{N} \end{cases}, \quad (4.34)$$

onde usamos a propriedade  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  da função Gamma de Euler. De forma equivalente, temos para a derivada à direita (4.30)

$${}_x D_b^\alpha (b-x)^\beta = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha - \beta \in \mathbb{N} \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (b-x)^{\beta-\alpha} & \text{se } \alpha - \beta \notin \mathbb{N} \end{cases} \quad (4.35)$$

**Observação 4.1.3** *É importante notar que a derivada de Riemann-Liouville (4.29) e (4.30) de uma constante não é zero para  $\alpha \notin \mathbb{N}$ .*

$${}_a D_x^\alpha 1 = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad {}_x D_b^\alpha 1 = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \quad (4.36)$$

*Para  $\alpha \in \mathbb{N}$  recuperemos as derivadas usuais de ordem inteira, e o lado direito da (D.7) se torna igual à zero devido aos pólos da função Gamma de Euler. Devido ao fato da derivada de uma constante ser diferente de zero, as equações diferenciais envolvendo derivadas de Riemann-Liouville requerem condições iniciais e de contorno não regulares.*

## 4.2 O Cálculo Fracionário de Caputo

Nesta seção definiremos as derivadas fracionárias de Caputo, que serão utilizadas no restante do nosso trabalho. Essas derivadas são obtidas à partir das derivadas de Riemann-Liouville trocando a ordem entre integração e diferenciação

**Definição 4.2.1** As derivadas fracionárias à esquerda e à direita de ordem  $\alpha > 0$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) são definidas, respectivamente, por  ${}^C D_x^\alpha f(x) = {}_a J_x^{n-\alpha} D_x^n f(x)$  e  ${}^C D_b^\alpha f(x) = {}_x J_b^{n-\alpha} D_x^n f(x)$  com  $n = [\alpha] + 1$ , nomeadamente

$${}^C D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(u)}{(x-u)^{1+\alpha-n}} du \quad (n = [\alpha] + 1, \alpha \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{R}) \quad (4.37)$$

e

$${}_x D_b^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(u)}{(u-x)^{1+\alpha-n}} du \quad (n = [\alpha] + 1, \alpha \in \mathbb{R}_+, a \in \mathbb{R}), \quad (4.38)$$

onde  $f^{(n)}(u) = \frac{d^n f(u)}{du^n}$  são derivadas ordinárias de ordem inteira  $n$ , e  $f^{(n)} \in L_1[a, b]$ .

Uma consequência importante das definições (4.37) e (4.38) é que as derivadas de Caputo são operadores não locais. A derivada à esquerda (à direita) definido pela expressão integro-diferencial (4.37) ((4.38)) depende de valores da função à esquerda (à direita) de  $x$ , isto é,  $a \leq u \leq x$  ( $x \leq u \leq b$ ). Em particular, se a derivada de Caputo for no tempo  $t$ , o valor da derivada à esquerda depende dos valores da função desde o instante inicial até  $t$ . Neste sentido, a derivada de Caputo à esquerda introduz naturalmente efeitos de memória. Nosso objetivo principal neste trabalho é justamente investigar este efeito na modelagem do processo da aprendizagem.

A vantagem de utilizar as derivadas de Caputo ao invés das derivadas de Riemann-Liouville na modelagem de problemas reais se deve ao fato de que as derivadas de Caputo (4.37) e (4.38) da função constante são zero para todos  $\alpha > 0$ ,

$${}^C D_x^\alpha 1 = 0, \quad {}^C D_b^\alpha 1 = 0. \quad (4.39)$$

Como consequência deste fato, equações diferenciais envolvendo derivadas de Caputo requerem condições iniciais usuais. Diferente do que ocorre com equações diferenciais envolvendo derivadas Riemann-Liouville onde a solução costuma ser singular no tempo inicial, requerendo condições iniciais não usuais e de interpretação não clara.

Temos ainda as seguintes propriedades envolvendo derivadas de Caputo e integrais fracionárias

**Teorema 4.2.1** Se pegarmos  $\alpha > 0$  então para todo  $f \in L_1[a, b]$  nós teremos

$${}_a D_x^\alpha J_x^\alpha f(x) = f(x), \quad {}_x D_b^\alpha J_b^\alpha f(x) = f(x) \quad (4.40)$$

e

$${}^C D_x^\alpha J_x^\alpha f(x) = f(x), \quad {}^C D_b^\alpha J_b^\alpha f(x) = f(x) \quad (4.41)$$

para quase todas equações

**Teorema 4.2.2** Para o Teorema fundamental do Cálculo de Caputo. Quando  $0 < \alpha < 1$  e  $f(x)$  seja uma função diferenciável em  $[a, b]$ . Então nós temos:

$${}_a J_x^{\alpha C} D_x^\alpha f(x) = f(b) - f(a) \quad (4.42)$$

e

$${}_x J_b^{\alpha C} D_b^\alpha f(x) = f(a) - f(b) \quad (4.43)$$

Finalizamos este capítulo de revisão do Cálculo Fracionário com a derivada de Caputo da função potência. Temos para a função  $(x - a)^\beta$ , com  $\beta > 0$ ,

$${}_a D_x^\alpha (x - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta - \alpha} \quad (4.44)$$

e

$${}_x D_b^\alpha (x - b)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (b - x)^{\beta - \alpha}. \quad (4.45)$$

Se  $\beta = 0$ , as derivadas de Caputo são nulas. É importante destacar que a derivada de Caputo com  $0 < \alpha < 1$  só existe para potências  $\beta \geq 0$ . Para  $\beta < 0$ , a integral na definição da derivada de Caputo diverge, portanto, não existe derivada de Caputo nesse caso. Para verificar este fato para derivadas à esquerda vamos considerar, sem perda de generalidade,  $a = 0$ . Neste caso temos da (4.37):

$${}_0^C D_x^\alpha x^\beta = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^x \frac{\beta u^{\beta-1} du}{(x - u)^\alpha}. \quad (4.46)$$

Expandindo em série de potências

$$\frac{1}{(x - u)^\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} \left[ 1 + \frac{\alpha u}{x} + \dots \right] = \frac{1}{x^\alpha} + \frac{\alpha u}{x^{\alpha+1}} + \dots \quad (4.47)$$

e substituindo na (4.46) obtemos

$${}_0^C D_x^\alpha x^\beta = \frac{\beta}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^x u^{\beta-1} \left[ \frac{1}{x^\alpha} + \frac{\alpha u}{x^{\alpha+1}} + \dots \right] du \quad (4.48)$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^x \frac{u^{\beta-1}}{x^\alpha} du + \frac{\beta}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^x \frac{u^\beta}{x^{\alpha+1}} du + \dots, \quad (4.49)$$

onde a primeira integral em (4.49) diverge se  $\beta < 0$ . Portanto só existe derivada de Caputo de ordem  $0 < \alpha < 1$  da função potência se  $\beta \geq 0$ .

## 5 Um modelo fracionário para a modelagem da memória e da aprendizagem

Neste capítulo formulamos um modelo matemático baseado no uso de derivadas de Caputo para a aquisição e perda de memória no processo de aprendizado. Nosso modelo é uma generalização do modelo proposto por Hicklin. Segundo Hilcklin, (1976), através da inclusão das derivadas fracionárias na equação diferencial que descreve a dinâmica do problema. O uso de derivadas fracionárias no estudo de processos de aprendizado é justificado pelo fato de que derivadas fracionárias são, em geral, operadores não locais.

Neste caso, o uso de derivadas fracionárias no tempo introduzem naturalmente efeitos de memórias na dinâmica do sistema modelado. Em especial, queremos investigar se, com o uso de uma equação diferencial fracionária com parâmetros constantes, podemos modelar com mais precisão um processo tão complexo com o ganho e perda de memória.

O modelo que propomos para a dinâmica entre ganho e perda de informação é obtido à partir do modelo de Hicklin, (1976), definido pela equação (3.5) através da substituição da derivada inteira por uma derivada fracionária de Caputo de ordem  $\alpha$

$${}_0^C D_t^\alpha N = A - aN, \text{ com } N(0) = 0, \quad (5.1)$$

em que  $N$  é a quantidade de informação adquirida no tempo  $t$ , e  $A$  e  $a$  são constantes características de um determinado indivíduo e dentro de uma situação de aprendizagem específica. A condição inicial imposta  $N(0) = 0$  representa a quantidade de informação inicialmente armazenada. Como no caso do modelo original de Hicklin, a constante  $A$  representa a aptidão do indivíduo e  $a$  é uma expressão da taxa de perda de informação durante o esquecimento (quando  $a > 0$ ) ou ganho de informação durante o aprendizado (quando  $a < 0$ ). Como a equação diferencial fracionária (5.1) é não homogênea, sua solução é a soma da solução da equação homogênea (com  $A = 0$ ) mais uma solução particular. Um forma equivalente de solucionar (5.1), é relacionar a solução do problema de valor inicial não homogêneo (5.1) com a solução do problema de valor inicial homogêneo

$${}_0^C D_t^\alpha \theta = -a\theta, \text{ com } \theta(0) = 1, \quad (5.2)$$

através da relação

$$N = \frac{A}{a}(1 - \theta) \quad (5.3)$$

pois a derivada de Caputo de uma constante é zero. Note que a equação (5.2) representa o conhecido problema do decaimento radioativo fracionário de acordo com Herrmann, (2011).

Vamos obter a solução da equação do decaimento radioativo fracionária (5.2) através do método de Frobenius estudado em Arfken, (2007). Mas para ilustrar o método, vamos primeiro resolver a equação do decaimento com ordem inteira e logo após consideraremos o caso com a derivada fracionária de Caputo.

## 5.1 Solução do modelo com derivada inteira

Nesta seção apresentaremos a solução da equação do decaimento radioativo

$$\frac{d\theta}{dt} = -a\theta, \text{ com } \theta(0) = 1 \quad (5.4)$$

pelo método de expansão em séries de Frobenius. Este método consiste em procurar por uma solução escrita na forma de uma série de potências:

$$\theta(t) = t^r \sum_{k=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_n t^{r+n} = t^r (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots). \quad (5.5)$$

Calculando a derivada da (5.5) obtemos

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} a_n t^{n+r} = \sum_{k=0}^{\infty} a_n (n+r) t^{r+n}. \quad (5.6)$$

Logo, inserindo (5.6) em (5.5) obtemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n (n+r) t^{r+n-1} + a \sum_{k=0}^{\infty} a_n t^{r+n} = 0 \quad (5.7)$$

expandindo o somatório na (5.7) ficamos com

$$a_0(0+r)t^{r-1} + a_1(1+r)t^r + a_2(2+r)t^{r+1} + \dots + aa_0t^r + aa_1t^{r+1} + \dots = 0, \quad (5.8)$$

e rearranjando os termos obtemos

$$a_0 r t^{r-1} + [a_1(1+r) + aa_0]t^r + [a_2(2+r) + aa_1]t^{r+1} + [a_3 \dots = 0. \quad (5.9)$$

Para que a equação (5.9) seja satisfeita para qualquer  $t$  devemos ter

$$a_0 r = 0 \quad (5.10)$$

$$a_1(1+r) + aa_0 = 0 \quad (5.11)$$

$$a_2(2+r) + aa_1 = 0 \quad (5.12)$$

$$\vdots \quad (5.13)$$

$$a_n(n+r) + aa_{n-1} = 0 \quad (5.14)$$

Temos duas possibilidades para satisfazer todas essas equações. A primeira é escolhendo  $r \neq 0$  e  $a_0 = 0$ , que resulta na solução trivial  $\theta = 0$  pois todas as constantes  $a_n$  se anulariam automaticamente. A segunda possibilidade é escolher  $r = 0$  e  $a_0 \neq 0$ . Neste caso temos

$$a_1 + aa_0 = 0 \quad (5.15)$$

$$2a_2 + aa_1 = 0 \quad (5.16)$$

$$3a_3 + aa_2 = 0 \quad (5.17)$$

$$\vdots$$

$$na_n + aa_{n-1} = 0, \quad (5.18)$$

de onde obtemos

$$a_1 = -aa_0 \quad (5.19)$$

$$a_2 = -\frac{aa_1}{2} \quad (5.20)$$

$$a_3 = -\frac{aa_2}{3} \quad (5.21)$$

$$\vdots$$

$$a_n = -\frac{aa_{n-1}}{n}. \quad (5.22)$$

De onde encontramos

$$a_2 = (-1)^2 \frac{a^2 a_0}{2!} \quad (5.23)$$

$$a_3 = (-1)^3 \frac{a^3 a_0}{3!} \quad (5.24)$$

⋮

e assim generalizamos para

$$a_n = \frac{(-a)^n a_0}{n!}. \quad (5.25)$$

Finalmente, substituindo (5.25) na (5.5) obtemos a solução geral da equação do decaimento radioativo

$$\theta(t) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-at)^k}{k!} = a_0 e^{-at}, \quad (5.26)$$

onde identificamos o somatório com a série de potência da função exponencial. A constante  $a_0$  é fixada pela condição inicial  $\theta(0) = 1$ , de onde obtemos a solução do problema (5.4)

$$\theta(t) = e^{-at}. \quad (5.27)$$

### 5.1.1 Solução do modelo com derivada de Caputo

Nesta seção vamos obter a solução do nosso modelo fracionário (5.1). Para isso, primeiro vamos obter a solução do problema de decaimento radioativo fracionário (5.2), com  $0 < \alpha \leq 1$ , através do método de Frobenius. Como na (5.5)  $a_n$  é inicialmente uma constante arbitrária, para facilitar contas futuras, podemos reescrever  $a_n$  de tal forma que a (5.5) se transforma em

$$\theta(t) = t^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + \beta)}, \quad (5.28)$$

onde  $\beta$  é uma constante arbitrária.

Vamos considerar dois casos em separado ao calcular a derivada de Caputo de  $\theta$ . No primeiro caso temos  $r \neq 0$ :

$${}_0^C D_t^\alpha \theta(t^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(n\alpha + \beta)} {}_0^C D_t^\alpha (t^{(n\alpha+r)}) \quad (5.29)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \Gamma(n\alpha + r + 1) t^{(n-1)\alpha+r}}{\Gamma(n\alpha + \beta) \Gamma(n\alpha + r - \alpha + 1)}. \quad (5.30)$$

Como  $\beta$  é uma constante arbitrária, podemos escolher  $\beta = r + 1$  sem perda de generalidade.

Então obtemos

$${}_0^C D_t^\alpha \theta(t^\alpha) = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{a_{n+1} t^{n\alpha+r}}{\Gamma(n\alpha + \beta)} \quad (5.31)$$

$$= \frac{a_0 t^{-\alpha+r}}{\Gamma(\beta - \alpha)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1} t^{\alpha+r}}{\Gamma(n\alpha + \beta)}. \quad (5.32)$$

No segundo caso temos  $r = 0$ :

$${}_0^C D_t^\alpha \theta(t^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(n\alpha + \beta)} {}_0^C D_t^\alpha (t^{n\alpha}) \quad (5.33)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \Gamma(n\alpha + 1) t^{(n-1)\alpha}}{\Gamma(n\alpha + \beta) \Gamma(n\alpha - \alpha + 1)}. \quad (5.34)$$

Como  $\beta$  é uma constante arbitrária, neste caso podemos escolher  $\beta = 1$  sem perda de generalidade. Então obtemos

$${}_0^C D_t^\alpha \theta(t^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1} t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \quad (5.35)$$

Para obter a solução do problema de valor inicial (5.2) vamos considerar os dois casos em separado. Para  $r \neq 0$  temos, usando (5.32) na (5.2),

$$\frac{a_0 t^{-\alpha+r}}{\Gamma(\beta - \alpha)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1} t^{n\alpha+r}}{\Gamma(n\alpha + \beta)} + a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^{n\alpha+r}}{\Gamma(n\alpha + \beta)} = 0, \quad (5.36)$$

portanto

$$\frac{a_0 t^{-\alpha+r}}{\Gamma(\beta - \alpha)} + \sum_{k=0}^{\infty} [(a_{n+1}) + a a_n] \frac{t^{n\alpha+r}}{\Gamma(n\alpha + \beta)} = 0. \quad (5.37)$$

Temos duas possibilidades para satisfazer a condição (5.37) para todo  $t$ . Ou  $a_0 = 0$ , o que implica em  $a_n = 0$  (solução trivial  $\theta = 0$ ) ou  $\alpha = \beta = r + 1$  (para anular o primeiro termo da (5.37) devido ao polo da função gamma), o que implica  $r = \alpha - 1 < 0$ . Descartamos ambas as possibilidades pois no primeiro caso temos a solução trivial e no segundo caso a derivada de Caputo da função  $\theta$  não existe pois  $r < 0$ . Portanto, a solução do problema ocorre para  $r = 0$ . Neste caso temos, usando a (5.35) na (5.2),

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+1} + a a_n] \frac{t^{n\alpha+r}}{\Gamma(n\alpha + 1)} = 0. \quad (5.38)$$

Para satisfazer (5.38) para todo  $t$ , descartando a solução trivial  $a_0 = 0$  que implica  $a_n = 0$ , obtemos

$$a_{n+1} = -aa_n, \quad (5.39)$$

então

$$a_1 = -aa_0, \quad (5.40)$$

$$a_2 = aa_1 \rightarrow (-a)^2 a_0, \quad (5.41)$$

$$a_3 = aa_2 \rightarrow (-a)^3 a_0, \quad (5.42)$$

$$a_n = (-a)^n a_0. \quad (5.43)$$

Portanto, a solução geral do problema (5.2) é dada por

$$\theta(t^\alpha) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n t^{\alpha n}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \quad (5.44)$$

e a solução que satisfaz a condição inicial  $\theta(0) = 1$  é dada por:

$$\theta(t^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n t^{\alpha n}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \quad (5.45)$$

Finalmente, a solução do modelo fracionário para a modelagem da memória e da aprendizagem (5.1) que propomos é, usando a (5.45) e a (5.3)

$$N(t) = \frac{A}{a}(1 - \theta(t^\alpha)) = \frac{A}{a} \left( 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n t^{\alpha n}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \right). \quad (5.46)$$

É importante observar que para  $\alpha = 1$ , como deveríamos esperar, a solução do modelo fracionário coincide com a solução do modelo com derivada inteira (3.6) pois a série definindo a função  $\theta$  na (5.45) se transforma na função exponencial. Na próxima seção discutiremos essa solução.

## 5.2 Discussão dos resultados

Neste capítulo vamos analisar a solução do nosso do modelo fracionário para a modelagem da memória e da aprendizagem (5.46). Escolhemos para nossa análise dois valores arbitrários de  $\alpha$  entre zero e um (mais precisamente, escolhemos  $\alpha = 0,5$  e  $\alpha = 0,7$ ),

e comparamos a solução nestes casos com a solução do modelo com derivada inteira ( $\alpha = 1$ ). Como as constantes  $A$  e  $a$  em nosso modelo são específicas de cada indivíduo, vamos por simplicidade analisar graficamente apenas a função  $\theta$  para compreender o comportamento da quantidade de informação adquirida por tempo  $N(t)$  (5.46) pelo indivíduo. Os gráficos foram obtidos com o programa WXMAXIMA.

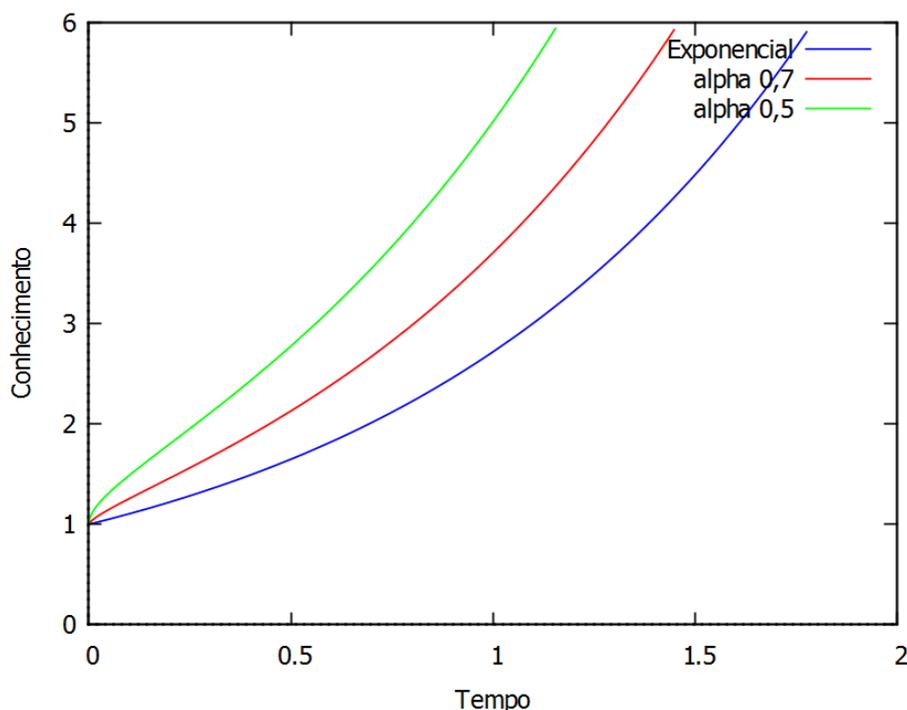


Figura 1 – Ganho de conhecimento em função do tempo para  $\alpha = 0,5$ ,  $\alpha = 0,7$  e  $\alpha = 1$ .

Na Figura 1 apresentamos o gráfico do ganho de conhecimento em função do tempo. Neste caso temos  $a < 0$  e a solução  $\theta$  (5.45) é monótona e crescente. A curva azul representa a solução do modelo com derivada inteira, ou seja, a função exponencial  $\theta = e^{-at}$ . As linhas verde e vermelha representam a solução do modelo fracionário com  $\alpha = 0,5$  e  $\alpha = 0,7$ , respectivamente. Podemos observar nesta figura que para  $0 < \alpha < 1$  a função  $\theta$  cresce mais rapidamente do que a função exponencial. De fato, quanto menor o valor de  $\alpha$  mais rápido é o crescimento de  $\theta$ . Como consequência, a quantidade de informação adquirida no tempo  $N$ , dada pela (5.46), no modelo fracionário cresce mais rapidamente que no modelo com derivada inteira devido ao efeito de memória introduzido na dinâmica do problema pela derivada de Caputo. Quanto menor o valor de  $\alpha$  maior é o efeito de memória introduzido na dinâmica devido ao fator  $(t - u)^{-\alpha}$  no integrando da definição da derivada de Caputo (4.37) (a função  $(t - u)^{-\alpha}$  cai mais lentamente quando  $\alpha$  diminui aumentando a contribuição de tempos passados para o valor da derivada). Neste caso,

vemos que o modelo fracionário tem o potencial de descrever processos de aprendizado onde o conhecimento já adquirido sobre algum assunto facilita o aprendizado futuro sobre o mesmo.

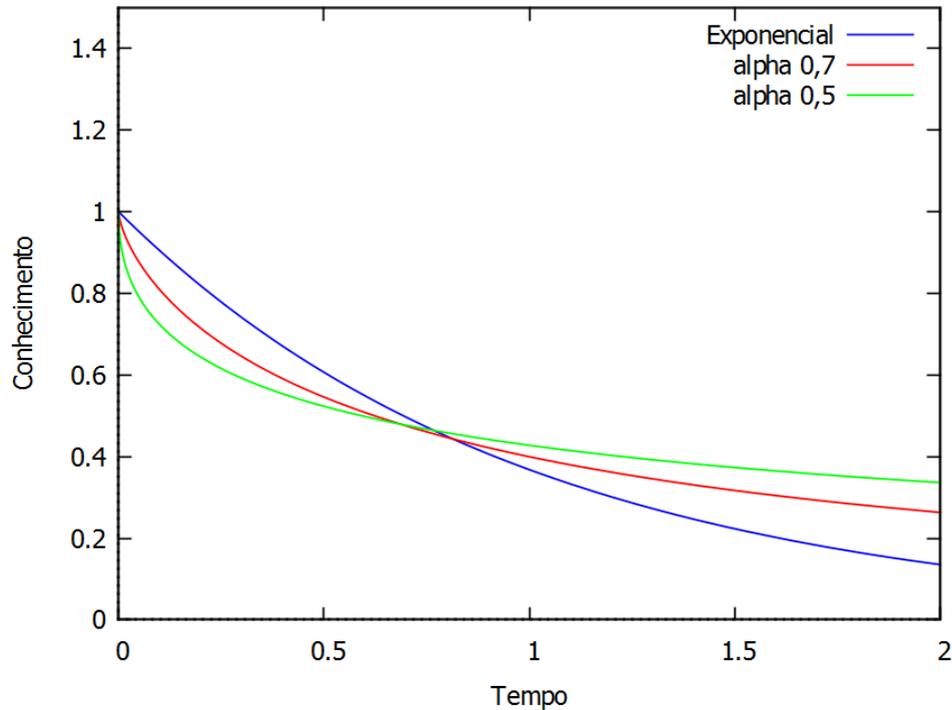


Figura 2 – Perda de conhecimento em função do tempo para  $\alpha = 0,5$ ,  $\alpha = 0,7$  e  $\alpha = 1$ .

Por outro lado, na Figura 2, analisamos o problema de perda de informação durante o esquecimento ( $a > 0$ ). Vamos novamente considerar em nossa análise os casos  $\alpha = 0,5$  e  $\alpha = 0,7$ , e comparar a solução nestes casos com a solução do modelo com derivada inteira ( $\alpha = 1$ ). Neste caso temos  $a > 0$  e a solução  $\theta$  (5.45) é monótona e decrescente. A curva azul representa a solução do modelo com derivada inteira, ou seja, a função exponencial  $\theta = e^{-at}$ . As linhas verde e vermelha representam a solução do modelo fracionário com  $\alpha = 0,5$  e  $\alpha = 0,7$ , respectivamente. Podemos observar nesta segunda figura que para  $0 < \alpha < 1$  a função  $\theta$  decresce mais lentamente do que a função exponencial. De fato, quanto menor o valor de  $\alpha$  mais lento é o decrescimento de  $\theta$ . Como consequência, a quantidade de informação armazenada no tempo  $t$  no modelo fracionário, dada pela função  $N$  definida pela (5.46), decresce mais lentamente que no modelo com derivada inteira devido ao efeito de memória introduzido na dinâmica do problema pela derivada de Caputo. Para tempos longos a quantidade de informação armazenada (que não será mais esquecida) aproxima-se do valor constante  $\frac{A}{a}$  característico de cada indivíduo, pois  $\lim_{t \rightarrow \infty} N = \frac{A}{a}$  para todo  $\alpha$ . Quanto menor o valor de  $\alpha$ , mais tempo é necessário

para se aproximar deste valor limite. Podemos interpretar este fato como a persistência da memória. Portanto, neste caso, vemos que o modelo fracionário tem o potencial de descrever processos onde existe persistência na memória, tornando a dinâmica do esquecimento mais lenta.

Para concluir, nossos resultados dão indícios do tipo de situação onde a dinâmica introduzida pelo efeito de memória pela derivada fracionária de Caputo pode resultar em uma melhor descrição do problema real em comparação com o modelo com derivada usual.

## 6 Conclusão

Neste trabalho formulamos um modelo matemático para a aquisição e perda de memória no processo de ensino. Nosso modelo é uma generalização do modelo proposto por Hicklin, (1976), através da inclusão das derivadas fracionárias de Caputo na equação diferencial que descreve a dinâmica do problema. O uso de derivadas fracionárias no estudo de processos de aprendizado é justificado pelo fato de que derivadas fracionárias são, em geral, operadores não locais.

Neste caso, o uso de derivadas fracionárias no tempo introduzem naturalmente efeitos de memórias na dinâmica do sistema modelado. Resolvemos o modelo proposto pelo método de Frobenius e analisamos os resultados para o caso de aprendizado (ganho de conhecimento) e esquecimento. Verificamos através da nossa solução que o modelo fracionário tem o potencial de descrever processos em que o conhecimento já adquirido sobre algum assunto facilita o aprendizado futuro sobre o mesmo, ou em processos onde existe persistência na memória, tornando a dinâmica do esquecimento mais lenta. Para validar esta hipótese, seria fundamental comparar nossos resultados com experimentos reais, seguindo uma metodologia análoga à utilizada pelo modelo com derivada inteira proposto por Anderson, (1991). Deixamos esta análise como sugestão de trabalho futuro.

Finalmente, compreender como ocorre a dinâmica do aprendizado e do esquecimento é fundamental para desenvolvimento do trabalho de um professor de matemática e também de professores de outras áreas. Portanto, o desenvolvimento de pesquisas neste tema, mesmo que teóricas, são de grande importância, permitindo uma melhor compreensão do fenômeno da aprendizagem e possibilitando o desenvolvimento de novas metodologias de ensino.

# Referências

ANDERSON, O. R. et al. (1991) Progress in sensory physiology. Springer.

ARFKEN, G.; WEBER, H. H. (2007). Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física. Elsevier.

ATKINSON, R. C., & SHIFFRIN, R. M. (1965). Mathematical models for memory and learning. Technical report 79. Institute for mathematical studies in social sciences, Stanford University, Palo Alto, CA.

HERRMANN, R. Fractional Calculus: An Introduction for Physicists, World Sci. Publishing, Singapore, 2011.

HICKLIN, W. J. (1976). A model for mastery learning based on dynamic equilibrium theory. Journal of Mathematical Psychology, v. 13, p. 79-88

LAZO, M. J. (2013) Introdução ao cálculo fracionário. Apostila não publicada.

MIRANDA, Guilhermina Lobato; BAHIA, Sara. Psicologia da educação: temas de desenvolvimento, aprendizagem e ensino. Relógio d'Água Editores, 2005.

OLDHAM, K.; SPANIER, J. (1974). The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. Elsevier.