Félix Afonso De Afonso

Compreendendo a teoria das Álgebras de Hopf

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Novembro, 2015

Félix Afonso De Afonso

Compreendendo a teoria das Álgebras de Hopf

Trabalho de Conclusão de Curso submetido pelo aluno Félix Afonso de Afonso como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, pelo Curso de Matemática Licenciatura junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Licenciatura em Matemática

Orientador: Dra. Daiane Silva de Freitas

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Novembro, 2015

Félix Afonso De Afonso

Compreendendo a teoria das Álgebras de Hopf

Trabalho de Conclusão de Curso submetido pelo aluno Félix Afonso de Afonso como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, pelo Curso de Matemática Licenciatura junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Dra. Daiane Silva de Freitas
(Orientador - FURG)

Dr. Rafael Cavalheiro
(Avaliador - FURG)

Dr. Matheus Lazo
(Avaliador - FURG)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Novembro, 2015

Agradecimentos

Este trabalho é dedicado a todos os meus amigos e familiares que me apoiaram durante esta etapa da minha vida. Dentre essas pessoas devem ser destacadas minha orientadora, Profª Drª Daiane Freitas, por ter aceitado trabalhar comigo desde o meu segundo ano de graduação, pela inspiração como docente, pois ela faz com muito amor e dedicação um trabalho que muitas vezes não é socialmente reconhecido e também por acreditar na minha capacidade e sempre me por desafios para que eu crescesse pessoal e profissionalmente. Ao meu amigo e companheiro Tiago pela paciência e compreensão de todos os finais de semana que deixei de o acompanhar para me dedicar a matemática, que é uma das minhas paixões. Por fim, não posso deixar de agradecer minha mãe por toda a dedicação e carinho que me deu ao longo de todos os anos da minha vida e por todos os sacrifícios que fez para me permitir estudar e seguir correndo atrás dos meus sonhos, te amo mãe.

"Vou-me embora pra Pasárgadas...
...Em Pasárgadas tem tudo é outra civilização
tem um processo seguro de impedir a concepção
tem telefone automático, tem alcalóide a vontade
e tem prostitutas bonitas pra gente namorar.
- Manuel Bandeira -1986-

Resumo

O seguinte trabalho tem como objetivo compreender, de maneira simples, as Álgebras de Hopf. Para isso, dedicamos alguns capítulos a conceitos introdutórios e necessários para compreender estas Álgebras. Dentre esses conceitos estudamos Álgebras, Coálgebras, Espaço Dual e Biálgebras. Além desses conceitos, também trazemos como exemplos de Álgebras de Hopf as álgebras de Grupo e a Álgebra dos Polinômios.

Palavras-chaves: Álgebras de Hopf, Álgebra, Coálgebra.

Sumário

1 Introdução

O primeiro exemplo de uma estrutura de Álgebra de Hopf foi observado em topologia algébrica por H. Hopf em 1941. Entretanto, apenas na década de sessenta álgebras de Hopf tornaram-se objetos de estudo sob um ponto de vista estritamente algébrico, conforme (DASCALESCUS; RAIANU; NASTASESCUS, 2001). No final dos anos oitenta, pesquisas neste campo foram impulsionadas por suas conexões com a mecânica quântica. Atualmente, existem muitas pesquisas acerca desse tema, devido a sua aplicação em diversos ramos da Matemática como, por exemplo, teoria de números, geometria algébrica, teoria de Lie, teoria de Galois, extensões de corpos separáveis, teoria de anéis graduados, teoria de operadores, teoria de grupos localmente compactos, teoria de distribuição, teoria da representação, mecânica quântica, entre outros. Com objetivo de complementar os estudos em álgebra moderna durante a formação, dada a importância dessa área como linha de pesquisa da matemática, iniciamos um trabalho de leitura e compreensão das Álgebras de Hopf. Este trabalho está dividido em quatro capítulos principais. No primeiro capítulo foi feito um levantamento bibliográfico de conceitos necessários para se começar a compreender as álgebras de Hopf. No segundo capítulo falamos principalmente sobre álgebra e coálgebras, provando algumas proposições acerca do comportamento dessas estruturas algébricas e de aplicações envolvendo as mesmas. No terceiro capítulo falamos sobre a dualização das álgebras e das coálgebras e quais estruturas esses duais apresentam dadas algumas condições iniciais sobre elas. Por fim, no último capítulo, explicamos o que é uma álgebra de Hopf e provamos algumas proposições sobre estas álgebras e alguns resultados sobre o Dual de uma álgebra de Hopf.

2 Pré-Requisitos

Neste capítulo falaremos de alguns conceitos básicos para a compreensão deste trabalho. Grande parte destes conceitos foram retirados de (LIMA, 2011) e (GARCIA; LEQUAIN, 2013). Os conceitos mais avançados como os tensores e os espaços duais foram retirados de (HUNGERFORD, 2000) e (KREYSZIG,). Também neste capítulo daremos alguns exemplos para melhor se compreender os conceitos em questão. Para um melhor estudo e compreensão dos itens trabalhados neste capítulo ou para demonstrações de proposições vide referências.

Definição 2.1. *Seja G um conjunto não vazio e $+$ uma operação definida entre os elementos de G. Dizemos que $(G,+)$ é um Grupo se satisfeitas as seguintes condições:*

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$, *para qualquer* $a,b,c \in G$;
2. *Para todo* $a \in G$ *existe* $e \in G$ *tal que* $a+e=a$ *e* $e+a=a$;
3. *Para todo* $a \in G$ *existe* $a^{-1} \in G$ *tal que* $a+a^{-1}=e$ *e* $a^{-1}+a=e$.

Se, além dessas condições, também for satisfeito que para todo $a,b \in G$, $a+b=b+a$ então dizemos que $(G,+)$ é um ***grupo comutativo*** *ou* ***abeliano****.*

Exemplo 2.1. *Como exemplo de um grupo temos os números inteiros com a operação de adição. Além disso, ($\mathbb{Z}$,+) também é um grupo abeliano pois a operação de adição dos inteiros também é comutativa.*

Definição 2.2. *Dizemos que um subconjunto S, não vazio, do grupo G é um* ***subgrupo*** *se S é um grupo com a operação $+$ definida em G.*

Exemplo 2.2. *Como exemplo de um subgrupo temos os números inteiros múltiplos de 2 com a operação de adição, ($2\mathbb{Z}$,+), sempre que operamos com dois números inteiros múltiplos de 2, ainda temos um número múltiplo de 2.*

Proposição 2.1. *Dizemos que um subconjunto S, não vazio, do grupo $(G,+)$ é um* ***subgrupo*** *se dados $a,b \in S$ tivermos que $a+b^{-1} \in S$*

Definição 2.3. *Um grupo abeliano $(G,+)$ é dito* ***grupo abeliano livre*** *se ele possuir uma base $F \neq \varnothing$.*

erate

Exemplo 2.3. *Como exemplo de um grupo abeliano livre temos o grupo das matrizes quadradas de ordem 2 com entradas inteiras, cuja a base é dada pelas matrizes:*
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Definição 2.4. *Sejam R um conjunto não vazio, $+$ e $\cdot$ duas operações definidas em R. Dizemos que $(R, +, \cdot)$ é um anel se são satisfeitas as seguintes condições:*

1. $(R, +)$ *é um grupo abeliano;*
2. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall a, b, c \in R$;
3. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $\forall a, b, c \in R$.

Se, além dos itens anteriores, for satisfeito que $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a, b \in R$ dizemos que o anel é ***comutativo****. Se, além dos três itens iniciais, for satisfeito que existe $1 \in R$ tal que $1 \cdot a = a$ e $a \cdot 1 = a$ então dizemos que R é um* ***anel unitário****.*

Exemplo 2.4.

Como exemplo de um anel temos os números inteiros com a operação de adição e multiplicação usual, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Além disso, este anel é comutativo pela comutatividade da multiplicação em $\mathbb{Z}$ e a unidade é o número 1.

Definição 2.5. *Sejam K um conjunto, $+$ e $\cdot$ duas operações entre elementos desse conjunto. Dizemos que $(K, +, \cdot)$ é um corpo se $(K, +)$ e $(K - \{0\}, \cdot)$ forem ambos grupos abelianos.*

Exemplo 2.5.

Como exemplo de um corpo temos os números reais com as operações usuais de adição e multiplicação, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Definição 2.6. *Sejam S um conjunto, $+$ uma operação entre elementos desse conjunto, K um corpo e $\cdot$ uma operação entre elementos de K e S. Dizemos que $(S, +, \cdot)$ é um K-espaço vetorial se são satisfeitas as seguintes condições, para quaisquer $u, v, w \in S$ e $k, j \in K$ temos que:*

1. $u + (v + w) = (u + v) + w$;
2. *existe $e \in S$ tal que $u + e = u$;*
3. *para cada v existe um w tal que $v + w = e$;*
4. $u + v = v + u$

5. $k \cdot (j \cdot v) = (k \cdot j) \cdot v$;

6. *Se considerarmos* 1_k *a unidade de* $(K, \cdot)$ *então* $1_k \cdot v = v$;

7. $k \cdot (u + v) = (k \cdot u) + (k \cdot v)$;

8. $(k + j) \cdot v = (k \cdot v) + (j \cdot v)$

Exemplo 2.6.

Como exemplo de um K-espaço vetorial temos o $\mathbb{R}^2$ *sobre o corpo dos números reais com a operação de* $+$ *definida por* $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$, *para qualquer* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *e* $\cdot$ *definido por* $k \cdot (a, b) = (ka, kb)$, *para qualquer* $k \in K$ *e* $a, b \in \mathbb{R}$.

Definição 2.7. *Sejam* $(G, +)$ *e* $(H, \oplus)$ *grupos e seja* $f : G \to H$ *uma aplicação. Dizemos que* f *é um* ***homomorfismo de grupos*** *se* $f(g + h) = f(g) \oplus f(h)$, *para qualquer* $g, h \in G$.

Exemplo 2.7.

Como exemplo de um homomorfismo de anéis vamos considerar uma aplicação f *de* $(\mathbb{Z}, +)$ *em* $(\mathbb{Z}, +)$ *tal que* $f(a) = 2a$, *para qualquer* $a \in \mathbb{Z}$.*Como podemos ver* $f(a+b) = 2(a+b) = 2a + 2b = f(a) + f(b)$.

Definição 2.8. *Sejam* $(R, +, \cdot)$ *e* $(S, \oplus, \odot)$ *anéis e seja* $f : R \to S$ *uma aplicação. Dizemos que* f *é um* ***homomorfismo de anéis*** *se* $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$ *e* $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$, *para qualquer* $a, b \in R$.

Exemplo 2.8.

Como exemplo de um homomorfismo de grupos vamos consideras uma aplicação f *de* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *em* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *tal que* $f(a) = 0$, *para qualquer* $a \in \mathbb{Z}$.*Como podemos ver* $f(a + b) = 0 = 0 + 0 = f(a) + f(b)$ *e* $f(a.b) = 0 = 0.0 = f(a).f(b)$.

Definição 2.9. *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *e* $(W, \oplus, \odot)$ *dois K-espaços vetoriais. Dizemos que* $f : V \to W$ *é uma aplicação K-linear se satisfeitas as seguintes condições:*

1. $f(u + v) = f(u) \oplus f(v)$, *para qualquer* $u, v \in V$.

2. $f(k \cdot u) = k \odot f(u)$, *para qualquer* $u \in V$ *e* $k \in K$.

Exemplo 2.9.

Como exemplo de uma aplicação K-linear nós temos a aplicação f *definida de* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *em* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *tal que* $f((a, b)) = (b, a)$. *Como podemos ver* $f((a, b)+(c, d)) = f((a+c, b+d)) = (b + d, a + c) = (b, a) + (c, d) = f((a, b)) + f((c, d))$ *e além disso* $f(k(a, b)) = f(ka, kb) = (kb, ka) = k(b, a) = kf((a, b))$.

Definição 2.10. *Sejam R um anel, A um grupo abeliano aditivo e $f : R \times A \to A$ tal que $f(r, a) = ra$, para qualquer $r \in R$ e $a \in A$. Dizemos que A é um R-módulo à esquerda se são satisfeitas as seguintes condições, para quaisquer $r, s \in R$ e $a, b \in A$ temos:*

1. $r(a + b) = ra + rb$;
2. $(r + s)a = ra + sa$;
3. $r(sa) = (rs)a$.

E denotamos por ${}_RA$. De forma análoga podemos definir um R-módulo a direita e o denotamos por A_R

Proposição 2.2.

Se considerarmos R como sendo um corpo temos que todo o R-módulo unitário é um K-espaço vetorial.

Definição 2.11. *Sejam R um anel, A um R-módulo à direita, B um R-módulo à esquerda e seja F o grupo abeliano livre em $A \times B$. Seja K um subgrupo de F gerado por todos os elementos da seguinte forma ($\forall a, a^{'} \in A$, $b, b^{'} \in B$ e $r \in R$):*

1. $(a + a^{'}, b) - (a, b) - (a^{'}, b)$;
2. $(a, b + b^{'}) - (a, b) - (a, b^{'})$;
3. $(ar, b) - (a, rb)$.

O grupo quociente F/K é chamado de produto tensorial de A e B e denotamos por $A \otimes_R B$. O subconjunto $(a, b) + K$ é denotado por $a \otimes b$.

Exemplo 2.10.

Se considerarmos o grupo abeliano $(\mathbb{Z}, +)$ podemos entender que para $m = 2$, por exemplo, $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_m$

Definição 2.12. *Seja A um espaço vetorial sobre um corpo K. Dizemos que A é uma* ***K-álgebra*** *se existir uma operação $\cdot : A \times A \to A$ que satisfaz as seguintes condições, para quaisquer $a, b, c \in A$ e $k, s \in K$:*

1. $a(bc) = (ab)c$;
2. $a(b + c) = ab + ac$;
3. $(ks)(ab) = (ka)(sb)$.

Lema 2.1. *Sejam K um corpo , M,N, V espaços vetoriais, M^*, N^* seus respectivos duais e as seguintes aplicações lineares $\phi : M^* \otimes V \to Hom(M, V)$ dada por*

$$\phi(f \otimes v)(m) = f(m)v, \text{ para qualquer } f \in M^*, v \in V, m \in M,$$

$\phi^{'} : Hom(M, N^*) \to (M \otimes N)^*$ *dada por*

$$\phi^{'}(g)(m \otimes n) = g(m)(n), \text{ para qualuqer } g \in Hom(M, N^*), m \in M, n \in N$$

$\rho : M^* \otimes N^* \to (M \otimes N)^*$ *dada por*

$$\rho(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m)g(n), \text{ para qualquer } f \in M^*, g \in N^*, m \in M, n \in N.$$

Então:

1. *ϕ é injetiva. Se a dimensão de V for finita, então ϕ é um isomorfismo.*

2. *$\phi^{'}$ é um isomorfismo.*

3. *ρ é injetiva. Se a dimensão de N for finita, então ρ é um isomorfismo.*

Corolário 2.1. *Para quaisquer espaços vetoriais $M_1, M_2, ..., M_n$ a aplicação*

$$\theta : M_1^* \otimes ... \otimes M_n^* \to (M_1 \otimes ... \otimes M_n)$$

definida por $\theta(f_1 \otimes ... \otimes f_n)(m_1 \otimes ... \otimes m_n) = f_1(m_1)...f_n(m_n)$ é injetiva. Além disso, se todos os espaços vetoriais $M_i, 1 \leq i \leq n$, forem de dimensão finita, então θ é um isomorfismo.

Definição 2.13. *Se X, Y são k-espaços vetoriais e $v : X \to Y$ é uma aplicação K-linear, então denotaremos por $v^* : Y^* \to X^*$ a aplicação definida por $v^*(f) = f(v)$, denotaremos por fv a composição de f com v, para qualquer $f \in Y^*$*

Teorema 2.1. *Se R e S são anéis e $A_R, {}_R B_S, {}_S C$ são respectivamente R-módulo a direita, R-S-bimódulo, ou seja, um módulo a esquerda e a direita, e S-módulo a esquerda, então existe um isomorfismo*

$$(A \otimes_R B) \otimes_S C \simeq A \otimes_R (B \otimes_S C)$$

3 Álgebras e Coálgebras

Sejam K um corpo e $\otimes$ um produto tensorial sobre K. A seguinte definição através de diagramas comutativos nos dará uma nova ótica sobre a definição clássica de álgebra.

Definição 3.1. *Uma K-álgebra é uma terna ordenada (A,M,u), onde A é um K-espaço vetorial, $M : A \otimes A \to A$ e $u : K \to A$ são homomorfismos de K-espaços vetoriais tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "I\otimes M"] \arrow[d, "M\otimes I"'] & A \otimes A \arrow[d, "M"] \\
A \otimes A \arrow[r, "M"'] & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dd, "M"] & \\
K \otimes A \arrow[ur, "u\otimes I"] \arrow[dr, "\sim"'] & & A \otimes K \arrow[ul, "I\otimes u"'] \arrow[dl, "\sim"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

Observação 3.1. *A definição 3.1 é equivalente a definição 2.12.*

Demonstração. De fato, vamos supor primeiramente que seja válida a definição clássica e vamos mostrar que os diagramas da definição 3.1 comutam. Sejam a,b,c $\in$ A e a$\otimes$b$\otimes$c $\in$ A$\otimes$A$\otimes$A então temos que:

$$\begin{aligned}
M(I \otimes M)(a \otimes b \otimes c) &= M(a \otimes bc) \\
&= a(bc) \\
&\overset{(1)}{=} (ab)c \\
&= M(ab \otimes c) \\
&= M(M \otimes I)(a \otimes b \otimes c).
\end{aligned}$$

Observe que em (1) usamos a Associatividade da Álgebra.
Sendo assim o primeiro diagrama comuta.

Sejam agora a∈A e K∈K. Então temos que:

$$\begin{aligned} M(u \otimes I)(K \otimes a) &= M(u(K) \otimes a) \\ &= M(K \otimes a) \\ &= Ka \\ &= \sim (a) \end{aligned}$$

Analogamente temos que:

$$\begin{aligned} M(I \otimes u)(a \otimes K) & \\ &= M(a \otimes u(K)) \\ &= M(a \otimes K) \\ &= aK \\ &= \sim (a) \end{aligned}$$

Portanto o segundo diagrama comuta. É importante notar que as aplicações $\sim$ utilizadas neste diagrama são diferente, pois uma opera com com os elementos do corpo pela direita e a outra pela esquerda.
Reciprocamente, suponha que os diagramas comutam e vamos mostrar que é válida a definição 2.12. Sejam a,b,c∈A. Então temos que:

$$\begin{aligned} M(I \otimes M)(a \otimes b \otimes c) &= M(a \otimes M(b \otimes c)) \\ &= M(a \otimes (bc)) \\ &= a(bc) \end{aligned}$$

Analogamente temos que:

$$\begin{aligned} M(M \otimes I)(a \otimes b \otimes c) &= M(M(a \otimes b) \otimes c) \\ &= M((ab) \otimes c \\ &= (ab)c. \end{aligned}$$

Pela comutatividade do primeiro diagrama podemos concluir que, como

$$M(I \otimes M)(a \otimes b \otimes c) = M(M \otimes I)(a \otimes b \otimes c)$$

então $a(bc) = (ab)c$ e portanto a Álgebra é associativa.
Para a distributividade de $\cdot$ em relação a $+$ temos que:

$$\begin{aligned} a(b + c) &= M(a \otimes (b + c)) \\ &\overset{(2)}{=} M((a \otimes b) + (a \otimes c)) \\ &\overset{(3)}{=} M(a \otimes b) + M(a \otimes c) \\ &= (ab) + (ac) \end{aligned}$$

Note que nas igualdades (2) e (3) usamos a distributividade do produto tensorial e o fato de M ser homomorfismo de álgebras, respectivamente.
Portanto, concluímos que a Álgebra também é distributiva com $\cdot$ em relação a $+$.
Para a bilinearidade vamos considerar a,b∈A e j,K∈K, logo temos que:

$$\begin{aligned} M(\sim\otimes\sim)((K\otimes a)\otimes(j\otimes b)) &= M(\sim(K\otimes a)\otimes\sim(j\otimes b)) \\ &= M(Ka\otimes jb) \end{aligned}$$

Por um lado $M(Ka\otimes jb)\overset{(2)}{=}(Ka)(jb)$;
Por outro lado $M(Ka\otimes jb)\overset{(3)}{=}(Kj)M(a\otimes b)=(Kj)(ab)$;
Sendo assim $(Ka)(jb)=(Kj)(ab)$ e a multiplicação é bilinear. □

Exemplo 3.1.

Seja $(G,\cdot)$ um grupo multiplicativo, K um corpo. E Seja $KG=\{\sum_{g\in G}\alpha_g g\}$, com $(\alpha_g)_{g\in G}$ uma família de elementos de K com um número finito de elementos não nulos, com as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} M: KG\otimes KG &\to KG \\ M(g\otimes h) &= (gh) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u: K &\to KG \\ u(K) &= K1_G \end{aligned}$$

Então (KG,M,u) tem uma estrutura de Álgebra.

Demonstração. Sejam $g,h,e\in KG$ e $K\in K$. Então temos que:

$$\begin{aligned} M(I\otimes M)(g\otimes h\otimes e) &= M(I(g)\otimes M(h\otimes e)) \\ &= M(g\otimes(he)) \\ &= g(he) \\ &\overset{(4)}{=} (gh)e \\ &= M((gh)\otimes e) \\ &= M(M(g\otimes h)\otimes I(e)) \\ &= M(M\otimes I)(g\otimes h\otimes e) \end{aligned}$$

Note que a igualdade (4) é dada pela associatividade do grupo G.
Agora sejam $\sim_1$: $K\otimes KG\to KG$ dada por $(K\otimes g)\mapsto(Kg)$ e $\sim_2$: $KG\otimes K\to KG$ dado por $(g\otimes K)\mapsto(gK)$, os isomorfismos canônicos da definição **??**, então temos que:

$$\begin{aligned} M(u\otimes I)(K\otimes g) &= M(u(K)\otimes I(g)) \\ &= M(K1\otimes g) \\ &= K1g=Kg \\ &= \sim_1(K\otimes g). \end{aligned}$$

Analogamente temos:

$$\begin{aligned} M(I \otimes u)(g \otimes K) &= M(I(g) \otimes u(K)) \\ &= M(g \otimes K1) \\ &= gK1 = gK \\ &= \sim_2 (g \otimes K) \end{aligned}$$

E portanto KG é uma Álgebra.

□

Exemplo 3.2.

Seja $K[X]$ o conjunto de todos os polinômios sobre um corpo K com as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} M : K[X] \otimes K[X] &\rightarrow K[X] \\ M(p(x) \otimes q(x)) &= (p(x)q(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u : K &\rightarrow K[X] \\ u(K) &= K \end{aligned}$$

Então $(K[X], M, u)$ é uma Álgebra.

Demonstração. Seja $p = p(x) = \sum a_i x^i, q = q(x) = \sum b_j x^j, r = r(x) = \sum c_h x^h \in K[X]$ com $a_i, b_j, c_h \in K$ $\forall 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n, 0 \leq h \leq l$, tal que $\partial p = m, \partial q = n, \partial r = l$, onde ∂ é o grau do polinômio e $\alpha \in K$. Então, para a comutatividade do primeiro diagrama temos:

$$\begin{aligned} M(I \otimes M)(p \otimes q \otimes r) &= M(I(p) \otimes M(q \otimes r)) \\ &= M(p \otimes (qr)) \\ &= p(qr) \\ &\overset{(1)}{=} (pq)r \\ &= M((pq) \otimes r) \\ &= M(M(p \otimes q) \otimes I(r)) \\ &= M(M \otimes I)(p \otimes q \otimes r). \end{aligned}$$

Observe que esta igualdade decorre de que $p(qr) = \sum d_f x^f$, com $d_f = \sum_{n+l=f} b_n c_l, = \sum e_g x^g$, com $e_g = \sum_{m+n+l=g} a_m(b_n c_l), = \sum_{m+n+l=g}(a_m b_n)c_l = (pq)r$, pela comutatividade do corpo K.

Agora seja $\sim_1$: $K \otimes K[X] \to K[X]$ dada por $(\alpha \otimes p(x)) \mapsto (\alpha p(x))$ e seja $\sim_2$: $K[X] \otimes K \to K[X]$ dada por $\sim_2 (p(x) \otimes \alpha) = (p(x)\alpha)$ então temos que:

$$\begin{aligned} M(u \otimes I)(\alpha \otimes p) &= M(u(\alpha) \otimes I(p)) \\ &= M(\alpha \otimes p) \\ &= \alpha p \\ &= \sim_1 (\alpha \otimes p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(I \otimes u)(p \otimes \alpha) &= M(I(p) \otimes u(\alpha)) \\ &= M(p \otimes \alpha) \\ &= p\alpha \\ &= \sim_2 (p \otimes \alpha). \end{aligned}$$

Sendo assim $(K[X], M, u)$ é uma Álgebra.

$\square$

Observação 3.2. *Como K é um corpo, $\sim_1 = \sim_2$.*

Definição 3.2. *Uma K-coálgebra é uma terna ordenada (C, Δ, ε), onde C é um K-espaço vetorial, $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to K$ são homomorfismos de K-espaços vetoriais tal que os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "I \otimes \Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes I"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr, "\sim"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\ K \otimes C & & C \otimes K \\ & C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon \otimes I"] \arrow[ur, "I \otimes \varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

Ou seja, $(I \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes) I \circ \Delta$, $\sim_1 = \varepsilon \otimes I \circ \Delta$ e também $\sim_2 = I \otimes \varepsilon \circ \Delta$

A aplicação Δ é denominada comultiplicação e a aplicação ε é denominada counidade, respectivamente, da Coálgebra C. O primeiro diagrama é chamado de coassociatividade de C.

Exemplo 3.3.

Seja G um grupo multiplicativo, K um corpo e KG o K-espaço vetorial com base G. Definimos em KG, as aplicações lineares, $\Delta(g) = g \otimes g$ *e* $\varepsilon(g) = 1, \forall g \in G$*. Então* $(KG, \Delta, \varepsilon)$ *é uma coálgebra.*

Demonstração. Seja g∈G, então:

$$\begin{aligned}
(I \otimes \Delta)(\Delta)(g) &= (I \otimes \Delta)\Delta(g) = (I \otimes \Delta)(g \otimes g) = g \otimes (g \otimes g) \\
&\overset{(5)}{=} (g \otimes g) \otimes g = (\Delta \otimes I)(g \otimes g) = (\Delta \otimes I)(\Delta(g)) \\
&= (\Delta \otimes I)(\Delta)(g)
\end{aligned}$$

Note que a igualdade (5) decorre do Teorema 2.1.
Portanto o primeiro diagrama comuta.
Para o segundo diagrama vamos considerar g∈G e 1 como sendo a unidade de G. Então temos que:

$$\begin{aligned}
(I \otimes \varepsilon)(\Delta)(g) &= (I \otimes \varepsilon)(\Delta(g)) \\
&= (I \otimes \varepsilon)(g \otimes g) \\
&= I(g) \otimes \varepsilon(g) \\
&= g \otimes (1)_K \\
&= \sim (g1) \\
&= \sim (g)
\end{aligned}$$

Logo, $(I \otimes \varepsilon)(\Delta) = \sim$.
Analogamente para o outro lado temos que:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes I)(\Delta)(g) &= (\varepsilon \otimes I)\Delta(g) \\
&= (\varepsilon \otimes I)(g \otimes g) \\
&= \varepsilon(g) \otimes I(g) \\
&= 1_K \otimes g \\
&= \sim (1g) \\
&= \sim (g)
\end{aligned}$$

Portanto, $(\varepsilon \otimes I)(\Delta) = \sim$.
Sendo assim o segundo diagrama também comuta e $(KG, \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra.

□

Exemplo 3.4.

Seja K um corpo e $K[X]$ o espaço de todos os polinômios com coeficientes em K na indeterminada x. Se definirmos em $K[X]$ as operações $\Delta : K[X] \to K[X] \otimes K[X]$ dada por $\Delta(X^n) = (X \otimes 1 + 1 \otimes X)^n$, de forma que$\Delta(X^n)$ seja multiplicativa, isto é, $\Delta(X^n = \Delta(X)^n$, e também $\varepsilon : K[X] \to K$ tal que $\varepsilon(X) = 0$, temos que $(K[X], \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra.

Demonstração. Sejam $X \in K[X]$ e $K \in K$. Primeiramente temos que:

$$\begin{aligned}
(I \otimes \Delta)(\Delta)(X) &= (I \otimes \Delta)(1 \otimes X + X \otimes 1) \\
&= (I \otimes \Delta)(1 \otimes X) + (I \otimes \Delta)(X \otimes 1) \\
&= I(1) \otimes \Delta(X) + I(X) \otimes \Delta(1) \\
&= 1 \otimes \Delta(X) + p \otimes \Delta(1) \\
&= 1 \otimes (1 \otimes X + X \otimes 1) + X \otimes (1 \otimes 1 + 1 \otimes 1) \\
&= 1 \otimes 1 \otimes X + 1 \otimes X \otimes 1 + X \otimes 1 \otimes 1 + X \otimes 1 \otimes 1 \\
&= \Delta(X) \otimes 1 + \Delta(1) \otimes X) \\
&= (\Delta(X) \otimes I(X)) + (\Delta(1) \otimes I(X)) \\
&= (\Delta \otimes I)(X \otimes 1) + (\Delta \otimes I)(1 \otimes X) \\
&= (\Delta \otimes I)(\Delta)(X)
\end{aligned}$$

Portanto o primeiro diagrama comuta. Para o segundo diagrama temos que:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes I)(\Delta)(X) &= (\varepsilon \otimes I)(1 \otimes X + X \otimes 1) \\
&= (\varepsilon \otimes I)(1 \otimes X) + (\varepsilon \otimes I)(X \otimes 1) \\
&= \varepsilon(1) \otimes I(p) + \varepsilon(X) \otimes I(1) \\
&= 1 \otimes X + 0 \otimes 1 = 1 \otimes X \\
&= \sim (X)
\end{aligned}$$

Analogamente temos que:

$$\begin{aligned}
(I \otimes \varepsilon)(\Delta)(X) &= (I \otimes \varepsilon)(1 \otimes X + X \otimes 1) \\
&= (I \otimes \varepsilon)(1 \otimes X) + (I \otimes \varepsilon)(X \otimes 1) \\
&= I(1) \otimes \varepsilon(X) + I(X) \otimes \varepsilon(1) \\
&= 1 \otimes 0 + X \otimes 1 \\
&= X \otimes 1 \\
&= \sim (X)
\end{aligned}$$

Portanto o segundo diagrama comuta e $(K[X], \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra. □

Proposição 3.1. *Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra. Então para qualquer $n \geq 2$ e para qualquer $p \in \{0, ..., n-1\}$ temos a seguinte igualdade:*

$$\Delta_n = (I^p \otimes \Delta \otimes I^{n-1-p}) \circ \Delta_{n-1}$$

Demonstração. Vamos mostrar utilizando indução sobre n que a igualdade é valida para qualquer $p \in \{0, ..., n-1\}$. Para $n = 2$ nós temos que $(\Delta \otimes I) \circ \Delta = (I \otimes \Delta) \circ \Delta$, o que é decorrente da coassociativadade da comultiplicação.
Agora vamos assumir que a igualdade é válida para n e vamos mostrar para $n+1$. Seja $p \in \{0, 1, ..., n\}$. Então temos que:

$$\begin{aligned}
(I^p \otimes \Delta \otimes I^{n-p}) \circ \Delta_n &= (I^p \otimes \Delta \otimes I^{n-p}) \circ (I^{p-1} \otimes \Delta \otimes I^{n-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (I^p \circ I^{p-1} \otimes \Delta \circ \Delta \otimes I^{n-p} \circ I^{n-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (I^{p-1} \otimes \Delta_2 \otimes I^{n-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (I^{p-1} \otimes ((I \otimes \Delta) \circ \Delta) \otimes I^{n-p} \circ \Delta_{n-1} \\
&= (I^{p-1} \otimes ((\Delta \otimes I) \circ \Delta) \otimes I^{n-p} \circ \Delta_{n-1} \\
&= (I^{p-1} \otimes \Delta \otimes I^{n+1-p}) \circ (I^{p-1} \otimes \Delta \otimes I^{n-p}) \circ \Delta_{n-1} \\
&= (I^{p-1} \otimes \Delta \otimes I^{n-p+1}) \circ \Delta_n
\end{aligned}$$

Uma vez que para $p = 0$ nós temos pela definição que $\Delta_{n+1} = (I^p \otimes \Delta \otimes I^{n-p}) \circ \Delta_n$, pelas relações acima e pela indução em p temos que a igualdade é satisfeita para qualquer $p \in \{0, ..., n\}$. □

A notação Sigma:
Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra. Para qualquer elemento $c \in C$ nós denotamos

$$\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2.$$

Com a notação usual teríamos que escrever da seguinte maneira

$$\Delta(c) = \sum_{i=1,n} c_{i1} \otimes c_{i2}.$$

A notação sigma suprime o índice "i". Sendo assim torna-se muito mais fácil escrever composições envolvendo comultiplações.
De maneira análoga, temos que, para $n \geq 1$

$$\Delta_n(c) = \sum c_1 \otimes ... \otimes c_{n+1}.$$

Esta notação também nos permite escrever diagramas comutativos de forma mais compreensível. Iniciaremos os exemplos com a definição de coálgebra, isto é, a coassociativdade e a counidade propriamente dita.

Definição 3.3. *Sejam (C, Δ, ε) uma coálgebra e $c \in C$. Então:*

$$\Delta_2(c) = \sum \Delta(c_1) \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes \Delta(c_2) = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3$$
$$\textit{(ou ainda } \sum c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2} = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3\textit{)}$$

Note que $\sum c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2}$, $\forall c \in C$ *nada mais é do que a igualdade* $(\Delta \otimes I) \circ \Delta = (I \otimes \Delta) \circ \Delta$, *que nos fornece a comutatividade do primeiro diagrama da definição de coálgebra.*
O segundo diagrama desta mesma definição pode ser escrito como:

$$Id_C = \phi_l \circ (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta = \phi_r \circ (I \otimes \varepsilon) \circ \Delta,$$

onde $\phi_r : C \otimes K \xrightarrow{\sim} C$ *e* $\phi_l : K \otimes C \xrightarrow{\sim} C$*são isomorfismos canônicos. Usando a notação sigma podemos escrever a mesma igualdade da seguinte maneira*

$$\sum \varepsilon(c_1)c_2 = \sum c_1\varepsilon(c_2) = c.$$

O seguinte Lema nos mostrará como devemos operar utilizando a notação sigma.

Lema 3.1. *Seja* (C, Δ, ε) *uma coálgebra. Então:*

1. *Para qualquer* $i \geq 2$ *temos que* $\Delta_i = (\Delta_{i-1} \otimes I) \circ \Delta$.

2. *Para qualquer* $n \geq 2$, $i \in \{1, ..., n-1\}$ *e* $m \in \{0, ..., n-i\}$ *temos que*

$$\Delta_n = (I^m \otimes \Delta_i \otimes I^{n-i-m}) \circ \Delta_{n-i}.$$

Demonstração. 1. Utilizando indução sobre i temos:

Para $i = 2$ temos a exata definição de Δ_2. Agora vamos assumir que é válido para i e mostrar que é válido para $i + 1$.

$$\begin{aligned}
\Delta_{i+1} &= (\Delta \otimes I^i) \circ \Delta_i \\
&= (\Delta \otimes I^i) \circ (\Delta_{i-1} \otimes I) \circ \Delta \\
&\overset{(6)}{=} (((\Delta \otimes I^{i-1}) \circ \Delta_{1-i}) \otimes I) \circ \Delta \\
&= (\Delta_i) \otimes I) \circ \Delta.
\end{aligned}$$

Para mostrar a igualdade (6), temos por um lado:

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes I^i) \circ (\Delta_{i-1} \otimes I)(a \otimes b) &= (\Delta \otimes I^{i-1}) \circ (\Delta_{i-1}(a)) \otimes I^i(b) \\
&= \sum \Delta(\Delta_{i-2}(a_1) \otimes a_2) \otimes b \\
&= \sum \Delta_{i-1}(a_1) \otimes a_2 \otimes b.
\end{aligned}$$

Por outro lado temos que :

$$\begin{aligned}(((\Delta \otimes I^{i-1}) \circ \Delta_{i-1}) \otimes I)(a \otimes b) &= ((\Delta \otimes I^{i-1})(\sum \Delta_{i-2}(a_1) \otimes a_2)) \otimes b \\ &= \sum \Delta_{i-1}(a_1) \otimes a_2 \otimes b.\end{aligned}$$

E portanto $(\Delta \otimes I^i) \circ (\Delta_{i-1} \otimes I)(a \otimes b) = (((\Delta \otimes I^{i-1}) \circ \Delta_{i-1}) \otimes I)(a \otimes b), \forall a, b \in C$.

2. Nós fixaremos $n \geq 2$ e iremos provar utilizando indução sobre $i \in \{1, ..., n-1\}$ que para qualquer $m \in \{0, ..., n-i\}$ a seguinte relação é satisfeita.

$$\Delta_n = (I^m \otimes \Delta_i \otimes I^{n-i-m}) \circ \Delta_{n-i}.$$

Para $i = 1$ temos exatamente a Proposição 3.1.
Agora vamos assumir que é válido para $i - 1(i \geq 2)$ e vamos provar para i. Vamos tomar $m \in \{0, ..., n-i\} \subset \{0, ..., n-i+1\}$ e então temos que:

$$\begin{aligned}\Delta_n &= (I^m \otimes \Delta_{i-1} \otimes I^{n-i-m+1}) \circ \Delta_{n-i+1} \\ &\overset{(7)}{=} (I^m \otimes \Delta_{i-1} \otimes I^{n-i-m+1}) \circ (I^m \otimes \Delta \otimes I^{n-i-m}) \circ \Delta_{n-i} \\ &\overset{(8)}{=} (I^m \otimes ((\Delta_{i-1} \otimes I) \circ \Delta) \otimes I^{n-i-m} \circ \Delta_{n-1} \\ &\overset{(9)}{=} (I^m \otimes \Delta_i \otimes I^{n-i-m}) \circ \Delta_{n-i}.\end{aligned}$$

(7) Pela hipótese de Indução.
(8) Pela Proposição 3.1.
(9) Utilizando o item 1 deste Lema.

□

Estas fórmulas nos permitem concluir a seguinte regra de cálculo, que é essencial para as coálgebras.

Regra de Cálculo 3.1. *Sejam (C, Δ, ε) uma coálgebra, $i \geq 1$, $f : C \otimes ... \otimes C \to C$ (O produto de tensores aparece $i + 1$ vezes) e $\bar{f}$: $C \to C$, uma aplicação linear tal que $f \circ \Delta_i = \bar{f}$.*
Então, se $n \geq i$, V é um espaço vetorial, e

$$g : C \otimes ... \otimes C \to V$$

(Onde C aparece $n + 1$ vezes no produto de tensores) é uma aplicação $K-$linear, para qualquer $i \leq j \leq n + 1$ e $c \in C$ nós temos que:
$\sum g(c_1 \otimes ... \otimes c_{j-1} \otimes f(c_j \otimes ... \otimes c_{j+i}) \otimes c_{j+i+1} \otimes ... \otimes c_{n+i+1}) =$
$\sum g(c_1 \otimes ... \otimes c_{j-1} \otimes \bar{f}\ (c_j) \otimes c_{j+1} \otimes ... \otimes c_{n+1})$. *Isto acontece por que*

$$\sum g(c_1 \otimes ... \otimes c_{j-1} \otimes f(c_j \otimes ... \otimes c_{j+i}) \otimes c_{j+i+1} \otimes ... \otimes c_{n+i+1}) =$$

$$= g \circ (I^{j-1} \otimes f \otimes I^{n-j+1} \circ \Delta_{n+i}(c) =$$

$$= g \circ (I^{j-1} \otimes f \otimes I^{n-j+1}) \circ (I^{j-1} \otimes \Delta_i \otimes I^{n-j+1}) \circ \Delta_n(c) =$$

$$= g \circ (I^{j-1} \otimes (f \circ \Delta_i) \otimes I^{n-j+1}) \circ \Delta_n(c) =$$

$$= g \circ (I^{j-1} \otimes \bar{f} \otimes I^(n - j + 1) \circ \Delta_n(c) =$$

$$= \sum g(c_1 \otimes ... \otimes c_{j-1} \otimes f(c_j) \otimes c_{j+1} \otimes ... \otimes c_{n+1}).$$

Esta regra pode ser entendida como: Se tivermos uma fórmula (*) na qual a expressão em $c_1, ..., c_{i+1}$(de $\Delta_i(c)$) tem como resultado um elemento de C ($f \circ \Delta_i = \bar{f}$), então a expressão dependendo de $c_1, ..., c_{n+i+1}$ (de $\Delta_{n+i}(c)$) na qual a expressão na fórmula (*) aparece para $c_j, ..., c_{j+i}$($i + 1$ consecutivas posições), podemos reorganizar as expressões dependentes de $c_{j+i+1}, ..., c_{n+i+1}$ via $\bar{f}$ (c_j) sem mudar $c_1, ..., c_{j-1}$ e transformando $c_{j+i+1}, ..., c_{n+i+1}$ em $c_{j+1}, ..., c_{n+1}$.

Exemplo 3.5. *Se (C, Δ, ε) é uma coálgebra, então para qualquer $c \in C$ nós temos que:*

$$\sum \varepsilon(c_1)\varepsilon(c_2)c_3 = c.$$

Se tivermos em mente a fórmula $\sum \varepsilon(c_1)c_2 = c$, nós podemos substituir pela esquerda $\varepsilon(c_2)c_3$ por c_2, sem alterar c_1. Além disso, $\sum \varepsilon(c_1)\varepsilon(c_2)c_3 = \sum \varepsilon(c_1)c_2$, e isso é exatamente c.

Definição 3.4. *Uma álgebra (A, M, u) é dita comutativa se o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "M"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "M"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

onde $T : A \otimes A \to A \otimes A$ é a aplicação definida por $T(a \otimes b) = b \otimes a$, na qual denominamos twist.

Definição 3.5. *Uma coálgebra (C, Δ, ε) é dita cocomutativa se o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\ C \otimes C \arrow[rr, "T"] & & C \otimes C \end{tikzcd}$$

Donde segue que $\sum c_1 \otimes c_2 = \sum c_2 \otimes c_1$ *para qualquer* $c \in C$.

Observação 3.3. *A definição clássica de comutatividade em uma álgebra* $(A, +, \cdot, \times)$ *é:*

$$\forall a, b \in A \text{ temos que } a \times b = b \times a.$$

Sendo assim vamos mostrar que a definição clássica e a por diagramas são equivalentes.

Demonstração. De fato, primeiramente vamos supor que a definição pelos diagramas comutativos seja verdade. Sejam $a, b \in A$ então temos que:

$$\begin{aligned} a \times b &= M(a \otimes b) \\ &\overset{(10)}{=} M \circ T(a \otimes b) \\ &= M(b \otimes a) \\ &= b \times a. \end{aligned}$$

(10) Por Hipótese.
Agora vamos assumir como verdadeira a definição clássica. Portanto temos:

$$\begin{aligned} (M \circ T)(a \otimes b) &= M(b \otimes a) \\ &= b \times a \\ &\overset{(1)}{=} a \times b \\ &= M(a \otimes b), \forall a \otimes b \in A \otimes A. \end{aligned}$$

(1) Por Hipótese.
Sendo assim ambas as definições são equivalentes. □

Definição 3.6. *Sejam* (A, M_A, u_A), $(B.M_B, u_B)$ *K-álgebras. A aplicação K-linear* $f : A \to B$ *é um homomorfismo de álgebras se os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "M_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "M_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & K \arrow[ul, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] & \end{tikzcd}$$

Definição 3.7. *Sejam $(C, \Delta_A, \varepsilon_A)$, $(D.\Delta_B, \varepsilon_B)$ K-coálgebras. A aplicação K-linear $g : C \to D$ é um morfismo de coálgebras se os seguintes diagramas comutam:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "g \otimes g"'] & D \otimes D \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

A comutatividade do primeiro diagrama pode ser escrita na notação sigma como:

$$\Delta(g(c)) = \sum g(c)_1 \otimes g(c)_2 = \sum g(c_1) \otimes g(c_2).$$

Observação 3.4. *A definição clássica de Homomorfismo de álgebras diz que $f : A \to B$, onde A e B são álgebras, é um homomorfismo de álgebras se são satisfeitas as seguintes condições:*

1. $\forall a, b \in A, f(a +_A b) = f(a) +_B f(b)$;
2. $\forall a, b \in A, f(a \times_A b) = f(a) \times_B f(b)$;
3. $\forall a \in A, K \in K, f(K \cdot_A a) = K \cdot_B f(a)$;
4. $f(1_A) = 1_B$.

Sendo assim nos resta mostrar que a definição clássica e a definição por diagramas comutativos são equivalentes.

Demonstração. Primeiramente vamos assumir que a definição por diagramas seja verdadeira. Seja $f : A \to B$, com A e B K-álgebras, uma aplicação bem definida e sejam também $a, b \in A$. Então temos que:

$$\begin{aligned} f(a+b) &= f(M_A(1 \otimes a) + M_A(1 \otimes b)) \\ &\overset{(11)}{=} f(M_A(1 \otimes a + 1 \otimes b)) \\ &= (f \circ M_A)(1 \otimes a + 1 \otimes b) \\ &\overset{(12)}{=} (M_B \circ f \otimes f)(1 \otimes a + 1 \otimes b) \end{aligned}$$

Por outro lado temos que:

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) &= (f \circ M_A)(1 \otimes a) + (f \circ M_A)(1 \otimes b) \\ &\overset{(12)}{=} (M_B \circ f \otimes f)(1 \otimes a + 1 \otimes b) \end{aligned}$$

Sendo assim temos que $f(a+b) = f(a) + f(b)$.
Para o item 2 da definição clássica temos que:

$$\begin{aligned} f(ab) &= f(M_A(a \otimes b)) \\ &= (f \circ M_A)(a \otimes b) \\ &\overset{(12)}{=} (M_B \circ f \otimes f)(a \otimes b) \\ &= M_B(f(a) \otimes f(b)) \\ &= f(a)f(b). \end{aligned}$$

E portanto $f(ab) = f(a)f(b)$.
Por fim, para o item 3 temos:

$$\begin{aligned} f(Ka) &= (f \circ M_A)(u_A(K) \otimes a) \\ &\overset{(12)}{=} (M_B \circ f \otimes f)(u_a(K) \otimes a) \\ &= M_B(f(u_A(K) \otimes f(a)) \\ &\overset{(13)}{=} M_B(u_B(K) \otimes f(a)) \\ &= u_B(K)f(a) \\ &= Kf(a). \end{aligned}$$

(11) Pois M é um homomorfismo de álgebras;
(12) Pela comutatividade do primeiro diagrama.
(13) Pela comutatividade do segundo diagrama.
Agora vamos assumir que a definição clássica seja verdadeira. Sejam $a \otimes b \in A \otimes A$ e $K \in K$.

Primeiramente temos que:

$$\begin{aligned}(M_B \circ f \otimes f)(a \otimes b) &= M_B(f(a) \otimes f(b)) \\ &= f(a)f(b) \\ &\overset{(14)}{=} f(ab) \\ &= f(M_A(a \otimes b)) \\ &= (f \circ M_A)(a \otimes b).\end{aligned}$$

Portanto o primeiro diagrama comuta.
Continuando temos que:

$$\begin{aligned}(f \circ u_A)(K) &= f(u_a(K)) \\ &= f(K1_A) \\ &\overset{(15)}{=} Kf(1_A) \\ &\overset{(16)}{=} K1_B \\ &= u_B(K)\end{aligned}$$

Portanto o segundo diagrama tambem comuta.
(14) Pelo item 2 da definição clássica.
(15) Pelo item 3 da definição clássica.
(16) Pelo item 4 da definição clássica.
Sendo assim conseguimos concluir que as duas definições, Clássica e por Diagrmas, são equivalentes.

□

4 O Dual de uma Álgebra e de uma Coálgebra

Antes de construirmos o dual de uma coálgebra é necessário construirmos as aplicações que definirão o nosso dual. Seja, então, (C, Δ, ε) uma coálgebra. Então vamos definir as seguintes aplicações:

$$M : C^* \otimes C^* \to C^*,$$

onde $M = \Delta^* \rho(f \otimes g) = \rho(f \otimes g)\Delta$, ρ é a aplicação definida no Lema 2.1 e

$$u : K \to C^*,$$

onde $u = \varepsilon^* \phi$, $\phi : K \to K^*$ é um isomorfismo canônico.

Proposição 4.1. *(C^*, M, u) é uma álgebra.*

Demonstração. Primeiramente notemos que $M(f \otimes g)(c) = (f * g)(c) = \Delta^* \rho(f \otimes g)(c) = \rho(f \otimes g)(\Delta(c)) = \sum f(c_1)g(c_2)$, $\forall c \in C$. Agora sejam $f, g, h \in C^*$ então temos que:

$$\begin{aligned}
M(I \otimes M)(h \otimes f \otimes g)(c) &= M(I(h) \otimes M(f \otimes g))(c) \\
&= M(I(h) \otimes (f * g))(c) \\
&= M(h \otimes (f * g))(c) \\
&= (h * (f * g)(c) \\
&= \sum h(c_1)(f * g)(c_2) \\
&= \sum h_(c_1) f(c_2) g(c_3) \\
&= \sum (h * f)(c_1) g(c_2) \\
&= ((h * f) * g)(c) \\
&= M((h * f) \otimes g)(c) \\
&= M(M(h \otimes f) \otimes I(g))(c) \\
&= M(M \otimes I)((h \otimes f) \otimes g)(c) \\
&= M(M \otimes I)(h \otimes (f \otimes g))(c)
\end{aligned}$$

Agora notemos que $u(\alpha)(c) = \alpha\varepsilon(c)$, para $\alpha \in K$ e $c \in C$. Sendo assim temos que:

$$\begin{aligned}
M(I \otimes u)(f \otimes \alpha)(c) &= M(f \otimes u(K))(c) \\
&= \sum f(c_1)u(\alpha)(c_2) \\
&= \sum f(c_1)\varepsilon^*\phi(\alpha)(c_2) \\
&= \sum f(c_1)(\phi(\alpha) \circ \varepsilon)(c_2) \\
&= \sum f(c_1)\phi(\alpha)\varepsilon(c_2) \\
&\overset{(1)}{=} f(\sum c_1\varepsilon(c_2))\phi(\alpha) \\
&\overset{(2)}{=} f(c)\phi(\alpha) \\
&\overset{(3)}{=} \alpha f(c)\phi(1) \\
&= \alpha f(c) \\
&= \sim (f \otimes K)(c)
\end{aligned}$$

Analogamente, para a outra igualdade temos:

$$\begin{aligned}
M(u \otimes I)(\alpha \otimes f)(c) &= M(u(\alpha) \otimes I(f)(c) \\
&= M(u(\alpha) \otimes f)(c) \\
&= \sum u(\alpha)(c_1)f(c_2) \\
&= \sum \varepsilon^*\phi(c_1)f(c_2) \\
&= \sum \phi(\alpha)\varepsilon(c_1)f(c_2) \\
&\overset{(1)}{=} \phi(\alpha)f(\sum \varepsilon(c_1)c_2) \\
&\overset{(2)}{=} \phi(\alpha)f(c) \\
&\overset{(3)}{=} \alpha\phi(1)f(c) \\
&= \alpha f(c) \\
&= \sim (\alpha \otimes f)(c)
\end{aligned}$$

(1) Por que $f \in C^*$

(2) Por que $\sum c_1\varepsilon(c_2) \in C$ e C é coálgebra.

(3) Como ϕ é um isomorfismo, então $\phi(1) = 1$

□

Observação 4.1. *A álgebra C^* é denominada álgebra dual da coálgebra C e sua multiplicação $M(f \otimes g) = f * g$ é denominada produto convolução de f e g.*

Exemplo 4.1.

Seja $(KG, \Delta, \varepsilon)$ a coálgebra definida no Exemplo 3.3 da Definição 3.2. Então podemos definir o dual dessa coálgebra como sendo $(KG)^* = Hom(KG, K)$. Neste dual definimos $(f * g)(a) = f(a)g(a)$ e $u(K)(g) = K(g)$, $\forall f, g \in (KG)^*$ e $a \in G$. Então temos que $((KG)^*, M, u)$ tem uma estrutura de álgebra.

Demonstração. Sejam $f, g, h \in (KG)^*$, $a \in KG$ e $K \in K$ então temos que:

$$\begin{aligned}
M(M \otimes I)(f \otimes g \otimes h)(a) &= M(M(f \otimes g) \otimes I(h))(a) \\
&= M((f * g) \otimes h)(a) \\
&= ((f * g) * h)(a) = (f * g)(a)h(a) \\
&= f(a)g(a)h(a) \\
&= f(a)(g * h)(a) = (f * (g * h))(a) \\
&= M(f \otimes (g * h)(a) \\
&= M(I(f) \otimes M(g \otimes h))(a) \\
&= M(I \otimes M)(f \otimes g \otimes h)(a),
\end{aligned}$$

portanto o primeiro diagrama comuta. Para o segundo diagrama temos que:

$$\begin{aligned}
M(I \otimes u)(f \otimes K)(a) &= M(I(f) \otimes u(K))(a) \\
&= M(f \otimes K)(a) \\
&= (f * K)(a) \\
&= f(a)K \\
&= \sim (K \otimes f)(a).
\end{aligned}$$

Por outro lado temos que:

$$\begin{aligned}
M(u \otimes I)(K \otimes f)(a) &= M(u(K) \otimes I(f))(a) \\
&= M(K \otimes f)(a) \\
&= (K * f)(a) \\
&= Kf(a) \\
&= \sim (f \otimes K)(a).
\end{aligned}$$

Sendo assim o segundo diagrama comuta e $((KG)^*, M, u)$ tem uma estrutura de álgebra.

□

Exemplo 4.2.

Seja $(K[X], \Delta, \varepsilon)$ a coálgebra definida no Exemplo 3.4 da Definição 3.2. Então o dual dessa coálgebra é $(K[X])^* = Hom(K[X], K)$. Neste dual $(p*q)(X) = p(X)q(1)+p(1)q(X)$ e $u(K)(X) = 0$, $\forall p, q \in (K[X])^*$. Então temos que $((K[X])^*, M, u)$ é uma álgebra.

Demonstração. Sejam $p, q, r \in (K[X])^*$ e $K \in K$ então temos que:

$$\begin{aligned}
M(M \otimes I)(p \otimes q \otimes r)(X) &= M(M(p \otimes q) \otimes I(r))(X) \\
&= M((p * q) \otimes r)(X) \\
&= ((p * q) * r)(X) \\
&= (p * q)(X)r(1) + (p * q)(1)r(X) \\
&= (p(X)q(1) + p(1)q(X))r(1) + p(1)q(1)r(X) \\
&= p(X)q(1)r(1) + q(X)p(1)r(1) + p(1)q(1)r(X).
\end{aligned}$$

Por outro lado temos que:

$$\begin{aligned}
M(I \otimes M)(p \otimes q \otimes r)(X) &= M(I(p) \otimes M(q \otimes r))(X) \\
&= M(p \otimes (q * r))(X) \\
&= (p * (q * r))(X) \\
&= p(X)(q * r)(1) + p(1)(q * r)(X) \\
&= p(X)q(1)r(1) + p(1)(q(X)r(1) + q(1)r(X)) \\
&= p(X)q(1)r(1) + q(X)p(1)r(1) + p(1)q(1)r(X).
\end{aligned}$$

Portanto, $M(M \otimes I)(p \otimes q \otimes r)(X) = M(I \otimes M)(p \otimes q \otimes r)(X)$ e o primeiro diagrama comuta. Para o segundo diagrama temos que:

$$\begin{aligned}
M(I \otimes u)(p \otimes K)(X) &= M(I(p) \otimes u(K))(X) \\
&= M(p \otimes K)(X) \\
&= (p * K)(X) \\
&= p(X)K(1) + p(1)K(X) \\
&= Kp(X) \\
&= \sim (K \otimes p)(X)
\end{aligned}$$

Por outro lado temos que:

$$\begin{aligned}
M(u \otimes I)(K \otimes p)(X) &= M(u(K) \otimes I(p))(X) \\
&= M(K \otimes p)(X) \\
&= (K * p)(X) \\
&= K(X)p(1) + K(1)p(X) \\
&= p(X)K \\
&= \sim (p \otimes K)(X)
\end{aligned}$$

Sendo assim o segundo diagrama comuta e $((K[X])^*, M, u)$ tem uma estrutura de álebra $\square$

Observação 4.2. *Dada uma álgebra (A, M, u) só é possível introduzir em seu dual uma estrutura de coálgebra se A tiver dimensão finita, pois a aplicação ρ construída no Lema 2.1 só é bijetora no caso de dimensões finitas. Portanto, se (A, M, u) tem dimensão finita podemos construir a aplicação*

$$\Delta : A^* \to A^* \otimes A^*,$$

com $\Delta = \rho^{-1}M^*$ e

$$\varepsilon : A^* \to K,$$

com $\varepsilon = \psi u^*$ e $\psi : K^* \to K$ é o isomorfismo canônico tal que, $\psi(f) = f(1), \forall f \in K^*$.
Além disso se $\Delta(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$, onde $g_i, h_i \in A^*$,então $f(ab) = \sum_i g_i(a)h_i(b), \forall a, b \in A$. Também se $\{g_j^{'}, h_j^{'}\}_j$ é uma família finita de elementos em A^* tal que $f(ab) = \sum_j g_j^{'}(a)h_j^{'}(b), \forall a, b \in A$, então $\sum_i g_i \otimes h_i = \sum_j g_j^{'} \otimes h_j^{'}$, que é consequência da injetividade de ρ definida no Lema 2.1.
Resumindo, $\Delta(f) = \sum g_i \otimes h_i, \forall g_i, h_i \in A^*$ cse e somente se $f(ab) = \sum_i g_i(a)h_i(b)$, $\forall a, b \in A$.

Proposição 4.2. *Se (A, M, u) é uma álgebra de dimensão finita, então temos que $(A^*, \Delta, \varepsilon)$ tem uma estrutura de coálgebra.*

Demonstração. Sejam $a, b, c \in A$ e seja $f \in A^*$.Além disso note que, $\Delta(f) = \sum g_i \otimes h_i$, $\Delta(g_i) = \sum g_{ij}^{'} \otimes g$

$_{ij}$ e $\Delta(h_i) = \sum(h_{ij}^{'} \otimes h$

$_{ij}$ Primeiramente temos que:

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes I)(\Delta)(f)(a \otimes b \otimes c) &= (\Delta \otimes I)(\sum g_i \otimes h_i)(a \otimes b \otimes c) \\
&= (\sum \Delta(g_i) \otimes I(h_i))(a \otimes b \otimes c) \\
&= (\sum g_{i,j}^{'} \otimes g_{i,j}^{''} \otimes h_i)(a \otimes b \otimes c) \\
&\overset{(4)}{=} \sum g_{i,j}^{'}(a)g_{i,j}^{''}(b)h_i(c) \\
&\overset{(5)}{=} \sum g_i(ab)h_i(c) \\
&= f(abc).
\end{aligned}$$

Por outro lado temos que:

$$\begin{aligned}
(I\otimes\Delta)(\Delta)(f)(a\otimes b\otimes c) &= (I\otimes\Delta)(\sum g_i\otimes h_i)(a\otimes b\otimes c)\\
&= (\sum I(g_i)\otimes\Delta(h_i))(a\otimes b\otimes c)\\
&= \sum g_i\otimes h^{'}_{i,j}\otimes h^{''}_{i,j})(a\otimes b\otimes c)\\
&\overset{(4)}{=} \sum g_i(a)h^{'}_{i,j}(b)h^{''}_{i,j}(c)\\
&\overset{(5)}{=} \sum g_i(a)h_i(bc)\\
&= f(abc).
\end{aligned}$$

(4) Pelo isomorfismo descrito no Lema 2.1.
(5) Pela Observação 4.2.
Portanto $(\Delta\otimes I)(\Delta)=(I\otimes\Delta)(\Delta)$ donde segue a comutatividade do primeiro diagrama. Para o segundo diagrama é importante observar que $\varepsilon(f)=\psi u^*(f)=\psi(u^*(f))=u^*f(1)=f(u(1))=f(1)\in K$, $\forall f\in A^*$. Dito isto, temos que:

$$\begin{aligned}
(I\otimes\varepsilon)(\Delta)(f)(a) &= ((I\otimes\varepsilon)\sum g_i\otimes h_i)(a)\\
&= (\sum I(g_i)\otimes\varepsilon(h_i))(a)\\
&= \sum g_i(a)\otimes h_i(1)\\
&= f(a1)\\
&= f(a)\\
&= \sim(f)(a).
\end{aligned}$$

Analogamente, temos:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon\otimes I)(\Delta)(f)(a) &= ((\varepsilon\otimes I)\sum g_i\otimes h_i)(a)\\
&= (\sum \varepsilon(g_i)\otimes I(h_i))(a)\\
&= \sum g_i(1)\otimes h_i(a)\\
&= f(1a)\\
&= f(a)\\
&= \sim(f)(a)
\end{aligned}$$

Sendo assim o segundo diagrama também comuta e portanto (A^*,Δ,ε)tem uma estrutura de coálgebra. □

Proposição 4.3. *Sejam C e D coálgebras quaisquer, respectivamente C^* e D^* seus duais vistos como álgebras, A e B álgebras de dimensão finita quaisquer, respectivamente A^* e B^* seus duais vistos como coálgebras de dimensão finita.*

1. *Se $f : C \to D$ é um homomorfismo de coálgebras, então $f^* : D^* \to C^*$ é um homomorfismo de álgebras.*

2. *Se $f : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras de dimensão finita, então $f^* : B^* \to A^*$ é um homomorfismo de coálgebras.*

Demonstração. Para o item 1 temos que sejam d^* e $e^* \in D^*$ e $c \in C$. Então temos que:

$$\begin{aligned} f^*(M_{D^*})(d^* \otimes e^*)(c) &= f^*(d^* * e^*)(c) \\ &= (d^* * e^*)f(c) \\ &= \sum d^*(f(c)_1)e^*(f(c)_2) \\ &\overset{(6)}{=} \sum d^*(f(c_1))e^*(f(c_2)) \\ &\overset{(7)}{=} \sum (f^*(d^*))(c_1)(f^*(e^*))(c_2) \\ &= (f^*(d^*) * f^*(e^*))(c) \\ &= M_{C^*}(f^* \otimes f^*)(d^* \otimes e^*)(c) \end{aligned}$$

Para o segundo diagrama temos que:

$$\begin{aligned} (f^* u_{D^*})(K)(c) &= u_D(K)f(c) \\ &= \varepsilon^* \phi(K)f(c) \\ &= \phi(K)\varepsilon_D f(c) \\ &\overset{(6)}{=} \phi(K)\varepsilon_C(c) \\ &= u_{C^*}(K)(c) \end{aligned}$$

(6) Pois f é um homomorfismo de coálgebras.
(7) Definição 2.13.
E portanto o item 1 está demonstrado. Para o item 2 vamos primeiramente denotar $(\Delta_{A^*} f^*)(b^*) = \Delta_{A^*}(b^* f) = \sum g_i \otimes h_i$ e $\Delta_{B^*}(b^*) = \sum p_j \otimes q_j$, $\forall b^* \in B^*$. Se denotarmos por ρ a aplicação definida no Lema 2.1, $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ temos que:

$$\begin{aligned} \rho((\Delta_{A^*} f^*)(b^*)(a \otimes b) &= \sum g_i(a)h_i(b) \\ &= (b^* f)(ab). \end{aligned}$$

Por outro lado temos:

$$\begin{aligned}
\rho((f^* \otimes f^*)\Delta_{B^*}(b^*))(a \otimes b) &= \rho(\sum p_j f \otimes q_j f)(a \otimes b) \\
&= \sum (p_j f)(a)(q_j f)(b) \\
&= \sum p_j(f(a)) q_j(f(b)) \\
&= b^*(f(a)f(b)) \\
&\overset{(8)}{=} b^*(f(ab)) \\
&= (b^* f)(ab)
\end{aligned}$$

(8) Por que f é um homomorfismo de álgebras.
E portanto o primeiro diagrama comuta.
Para o segundo diagrama temos que:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_{A^*} f^*)(b^*) &= \varepsilon_{A^*}(b^* f) \\
&= (b^* f)(1) \\
&= b^*(f(1)) \\
&\overset{(8)}{=} b^*(1) \\
&= \varepsilon_{B^*}(b^*)
\end{aligned}$$

Sendo assim o item 2 também é válido e esta demonstrada a proposição. □

5 Biálgebras e Álgebras de Hopf

Seja H um k-espaço vetorial simultaneamente munido com uma estrutura de álgebra (H, M, u) e uma estrutura de coálgebra (H, Δ, ε). O seguinte resultado descreve a situação em que duas estruturas são compatíveis. Dizemos que em $H \otimes H$ temos a estrutura de um produto de tensores de coálgebras com as operações definidas na definição 3.2 e a estrutura de um produto de tensores de álgebras com as operações definidas na definição 3.1. Além disso, em k existe uma estrutura canônica de coálgebras se considerarmos kG onde G é um grupo com apenas um elemento.

Proposição 5.1. *As seguintes sentenças são equivalentes:*

1. *As aplicações M e u são homomorfismos de coálgebras.*
2. *As aplicações Δ e ε são homomorfismos de álgebras.*

Demonstração. Primeiramente vamos considerar os seguintes diagramas:

1.
$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[rr, "M"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"'] & & H \arrow[dd, "\Delta"] \\
H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[d, "I\otimes T\otimes I"'] & & \\
H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[rr, "M\otimes M"] & & H \otimes H
\end{tikzcd}$$

2. $$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, "M"] \arrow[d, "\varepsilon\otimes\varepsilon"'] & H \arrow[dd, "\varepsilon"] \\
k \otimes k \arrow[d, "\phi"'] & \\
k \arrow[r, "Id"] & k
\end{tikzcd}$$

3. $$\begin{tikzcd}
k \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\phi^{-1}"'] & H \arrow[d, "\Delta"] \\
k \otimes k \arrow[r, "u\otimes u"] & H \otimes H
\end{tikzcd}$$

4. $$\begin{tikzcd}
k \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "Id"'] & & H \arrow[dl, "\varepsilon"] \\
& k &
\end{tikzcd}$$

Onde $\phi^{-1} : k \to k \otimes k$ é definida como $\phi^{-1}(\lambda) = \lambda(1 \otimes 1)$, $\forall \lambda \in k$.
Note que para M ser um homomorfismo de coálgebras o primeiro e o segundo diagrama devem comutar. Para u ser um homomorfismo de coálgebras o terceiro e o quarto devem comutar. Para Δ ser um morfismo de álgebras o primeiro e o terceiro diagrama forem comutativos e por fim ε é um homomorfismo de álgebras se o segundo e o quarto diagrama forem comutativos.
Primeiramente mostraremos que cada um dos diagramas comuta partindo da hipótese

que as aplicações Δ e ε são homomorfismos de álgebras. Sejam então $a, b \in H$ e $k \in k$.

$$\begin{aligned}
(M \otimes M)(I \otimes T \otimes I)(\Delta \otimes \Delta)(a \otimes b) &= (M \otimes M)(I \otimes T \otimes I)(\Delta(a) \otimes \Delta(b)) \\
&= (M \otimes M)(I \otimes T \otimes I)((\sum a_1 \otimes a_2) \otimes (\sum b_1 \otimes b_2)) \\
&= (M \otimes M)(I \otimes T \otimes I)(\sum a_1 \otimes a_2 \otimes b_1 \otimes b_2 \otimes) \\
&= (M \otimes M)(\sum I(a_1) \otimes T(a_2 \otimes b_1) \otimes I(b_2)) \\
&= (M \otimes M)(\sum a_1 \otimes b_1 \otimes a_2 \otimes b_2) \\
&= \sum M(a_1 \otimes b_1) \otimes M(a_2 \otimes b_2) \\
&= \sum a_1 b_1 \otimes a_2 b_2 \\
&\overset{(1)}{=} \Delta(ab) \\
&= (\Delta \circ M)(a \otimes b)
\end{aligned}$$

(1) Pela hipótese que Δ é um homomorfismo de álgebras.
Analisando agora o segundo diagrama:

$$\begin{aligned}
(Id \circ \phi \circ \varepsilon \otimes \varepsilon)(a \otimes b) &= (Id \circ \phi)(\varepsilon(a) \otimes \varepsilon(b)) \\
&\overset{(2)}{=} \varepsilon(a)\varepsilon(b)(id \circ \phi)(1 \otimes 1) \\
&= \varepsilon(a)\varepsilon(b) \\
&= \varepsilon(ab) \\
&= \varepsilon(M(a \otimes b)) \\
&= (\varepsilon \circ M)(a \otimes b).
\end{aligned}$$

Sendo assim M é um homomorfismo de coálgebras. Suponha agora que u e M são homomorfismos de coálgebras:

$$\begin{aligned}
(\Delta \circ u)(k) &= k\Delta \circ u(1) \\
&= k\Delta(1_H) \\
&= k1_H \otimes 1_H \\
&= k(u(1_k) \otimes u(1_k)) \\
&= k((u \otimes u)(1_k \otimes 1_k)) \\
&= (u \otimes u)(k(1_k \otimes 1_k)) \\
&= (u \otimes u)(\phi^{-1}(k)) \\
&= ((u \otimes u) \circ \phi^{-1})(k).
\end{aligned}$$

Por fim temo que:

$$\begin{aligned}(\varepsilon \circ u)(k) &= \varepsilon(u(k)) \\ &= \varepsilon(k1_H) \\ &= k \\ &= Id(k)\end{aligned}$$

Sendo assim u é um homomorfismo de álgebras. Para mostrar a implicação inversa basta prosseguir de maneira análoga e chega-se ao mesmo resultado. □

Exemplo 5.1.

Considere a coálgebra $(kG, \Delta, \varepsilon)$ definida no Exemplo 3.3 da Definição 3.2. Vamos mostrar que Δ e ε são homomorfismos de álgebras e por consequência da proposição anterior M e u serão homomorfismos de coálgebras.

Demonstração. Sejam $g, h \in G$ e $k \in k$. Então temos que:

$$\begin{aligned}(M \otimes M)(I \otimes T \otimes I)(\Delta \otimes \Delta)(g \otimes h) &= (M \otimes M)(I \otimes T \otimes I)(\Delta(g) \otimes \Delta(h)) \\ &= (M \otimes M)(I \otimes T \otimes I)(g \otimes g \otimes h \otimes h) \\ &= (M \otimes M)(I(g) \otimes T(g \otimes h) \otimes I(h)) \\ &= (M \otimes M)(g \otimes h \otimes g \otimes h) \\ &= M(g \otimes h) \otimes M(g \otimes h) \\ &= gh \otimes gh \\ &= \Delta(gh) \\ &= (\Delta \circ M)(g \otimes h)\end{aligned}$$

Para o segundo diagrama temos:

$$\begin{aligned}(\Delta \circ u)(k) &= \Delta(u(k)) \\ &= \Delta(k1_G) \\ &= k(1_G \otimes 1_{G)} \\ &= k(u(1_k) \otimes u(1_k)) \\ &= (u \otimes u)(k(1_k \otimes 1_k)) \\ &= (u \otimes u)(\phi^{-1})(k)\end{aligned}$$

Sendo assim Δ é um homomorfismo de álgebras. Agora para ε temos que:

$$\begin{aligned}(Id)\circ(\phi)\circ(\varepsilon\otimes\varepsilon)(g\otimes h) &= (Id)\circ(\phi)\circ(\varepsilon(g)\otimes\varepsilon(h))\\ &= (Id)\circ(\phi)(1_k\otimes 1_k)\\ &= Id(1_k)\\ &= 1_k\\ &= \varepsilon(gh)\\ &= (\varepsilon\circ M)(g\otimes h)\end{aligned}$$

Para o segundo diagrama temos:

$$\begin{aligned}(\varepsilon\circ u)(k) &= \varepsilon(u(k))\\ &= \varepsilon(k1_G)\\ &= k\varepsilon(1_G)\\ &= k1_k\\ &= k\\ &= Id(k)\end{aligned}$$

Sendo assim ε também é um homomorfismo de álgebras e portanto M e u são homomorfismos de coálgebras. □

Exemplo 5.2.

Considere a coálgebra $(k[X],\Delta,\varepsilon)$ definida no Exemplo 3.4 da Definição 3.2. Vamos mostrar que Δ e ε são homomorfismos de álgebras e por consequência da proposição anterior M e u serão homomorfismos de coálgebras. Note que Δ já esta definida multiplicativamente e portanto só nos resta mostrar a comutatividade do terceiro e quarto diagrama. Para o terceiro diagrama temos:

$$\begin{aligned}\Delta(u(k))) &= \Delta(k)\\ &= k\Delta(1)\\ &= k(1\otimes 1)\\ &= k(u(1)\otimes u(1))\\ &= u(k)\otimes u(1)\\ &= (u\otimes u)(k\otimes 1)\\ &= (u\otimes u)\phi^{-1}(k).\end{aligned}$$

Para o último diagrama temos:

$$\begin{aligned}(\varepsilon \circ u)(k) &= \varepsilon(u(k))\\ &= \varepsilon(k)\\ &= k\varepsilon(1)\\ &= k\\ &= id(k).\end{aligned}$$

Sendo assim Δ e ε são homomorfismos de álgebras e por consequência M e u serão homomorfismos de coálgebras.

Observação 5.1. *Na notação sigma, a condição na qual Δ e ε são homomorfismos de álgebras pode ser escrita como:*

$$\Delta(hg) = \sum h_1 g_1 \otimes h_2 g_2$$

$$\varepsilon(hg) = \varepsilon(h)\varepsilon(g)$$

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1$$

$$\varepsilon(1) = 1$$

Definição 5.1. *Uma biálgebra é um k-espaço vetorial H, munido com uma estrutura de álgebra (H, M, u) e uma estrutura de coálgebra (H, Δ, ε) tal que M e u são homomorfismos de coálgebras, consequentemente pela proposição anterior, Δ e ε homomorfismos de álgebras.*

Exemplo 5.3.

Se considerarmos $(kG, M, u, \Delta, \varepsilon)$, já mostramos que (kG, M, u) é uma álgebra, $(kG, \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra e do exemplo anterior temos que M e u são homomorfismos de coálgebras e Δ e ε são homomorfismos de álgebras. Portanto $(kG, M, u, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra.

Se considerarmos $(k[X], M, u, \Delta, \varepsilon)$, já mostramos que $(k[X], M, u)$ é uma álgebra, $(k[X], \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra e do exemplo anterior temos que M e u são homomorfismos de coálgebras e Δ e ε são homomorfismos de álgebras. Portanto $(k[X], M, u, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra.

Proposição 5.2. *Seja H uma biálgebra de dimensão finita. Então H^*, juntamente com a estrutura de álgebra dada pelo dual da coálgebra de H e com a estrutura de coálgebra dada pelo dual da álgebra de H, é uma biálgebra. Chamamos essa biálgebra de dual da biálgebra H.*

Demonstração. Denotemos por Δ e ε a comultiplicação e a counidade em H e denotaemos por δ e E a comultiplicação e a counidade em H^*, respectivamente. Então $E(h^*) = h^*(1)$

e $\delta(h^*) = \sum h_1^* \otimes h_2^*$, onde $h^*(hg) = \sum h_1^*(h)h_2^*(g)$, $\forall h^* \in H^*$ e $\forall h, g \in H$. Vamos mostrar que δ e E são homomorfismos de álgebras (pois, pela proposição 5.1, poderemos concluir que H^* é uma biálgebra). Sejam $h^*, g^* \in H^*$ e $\delta(h^*) = \sum h_1^* \otimes h_2^*$, $\delta(g^*) = \sum g_1^* \otimes g_2^*$, $\forall h, g \in H$.

$$\begin{aligned} (h^*g^*)(hg) &\overset{(2)}{=\!=} \sum h^*(h_1g_1)g^*(h_2g_2) \\ &= \sum h_1^*(h_1)h_2^*(h_2)g_1^*(g_1)g_2^*(g_2) \\ &= \sum (h_1^*g_1^*)(h)(h_2^*g_2^*)(g) \end{aligned}$$

(2) Por que h^* é um homomorfismo de álgebras.
Portanto, $\delta(h^*g^*) = \sum h_1^*g_1^* \otimes h_2^*g_2^* = \sum (h_1^* \otimes h_2^*)(g_1^* \otimes g_2^*) = \delta(h^*)\delta(g^*)$
Além disso, $\varepsilon(hg) = \varepsilon(h)\varepsilon(g)$ e consequentemente $\delta(\varepsilon) = \varepsilon \otimes \varepsilon$. Portanto δ é um homomorfismo de coálgebras.
Para o E temos que:

$$\begin{aligned} E(h^*g^*) &= (h^*g^*)(1) \\ &= h^*(1)g^*(1) \\ &= E(h^*)E(g^*) \end{aligned}$$

e além disso $E(\varepsilon) = \varepsilon(1) = 1$ e portanto E também é homomorfismo de álgebras. □

Definição 5.2. *Sejam H e L duas k-biálgebras. Uma aplicação k-linear $f : H \to L$ é dito um homomorfismo de biálgebras se for simultaneamente um homomorfismo de álgebras e de coálgebras, com relação as estruturas de álgebra e coálgebra de H e L.*

Observação 5.2. *Sejam (C, Δ, ε) uma coálgebra e (A, M, u) uma álgebra. Nós podemos definir no conjunto $Hom(C, A)$ uma estrutura de álgebra com a seguinte multiplicação:*

$$(f * g)(c) = \sum f(c_1)g(c_2), \forall f, g \in Hom(C, A), \forall c \in C.$$

A multiplicação assim definida é associativa pois dados $f, g, h \in Hom(C, A)$ temos que:

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(c) &= \sum (f * g)(c_1)h(c_2) \\ &= \sum f(c_1)g(c_2)h(c_3) \\ &= \sum f(c_1)(g * h)(c_2) \\ &= (f * (g * h))(c) \end{aligned}$$

O elemento identidade em $Hom(C, A)$ com essa multiplicação é dado por $u\varepsilon$ pois:

$$\begin{aligned}
(f * (u\varepsilon))(c) &= \sum f(c_1)(u\varepsilon)(c_2) \\
&= \sum f(c_1)u(\varepsilon(c_2)) \\
&= \sum f(c_1)\varepsilon(c_2)1_A \\
&= \sum f(c_1)\varepsilon(c_2)u(1_k) \\
&= \sum f(c_1\varepsilon(c_2))1_A \\
&= f(\sum c_1\varepsilon(c_2))1_A \\
&= f(c)
\end{aligned}$$

Analogamente para $(u\varepsilon) * f = f$.

Observação 5.3. *Agora se considerarmos $A = k$, então $*$ é o produto convolução definido no dual de uma coálgebra C. Sendo assim podemos chamar $*$ de produto convolução sendo A uma álgebra arbitrária.*
Vamos considerar a construção de um caso muito especial. Seja H uma biálgebra. Vamos denotar por H^c a estrutura de coálgebra que existe em H e vamos denotar por H^a a estrutura de álgebra que existe em H. Então podemos construir o conjunto dos $Hom(H^c, H^a)$ no qual a multiplicação é definida como $(f * g)(h) = \sum f(h_1)g(h_2), \forall f, g \in Hom(H^c, H^a)$ e $\forall h \in H$ e com elemento identidade $u\varepsilon$. Observe que a aplicação identidade $I : H \to H$ é um elemento de $Hom(H^c, H^a)$.

Definição 5.3. *Seja H uma biálgebra. Uma aplicação linear $S : H \to H$ é chamada de antípoda da biálgebra H se S for a inversa da aplicação identidade com relação ao produto convolução em $Hom(H^c, H^a)$*

Definição 5.4. *Uma biálgebra H que possui uma antípoda S é chamada Álgebra de Hopf.*

Observação 5.4. *Em uma álgebra de Hopf a antípoda S é única,pois é a inversa do elemento I na álgebra dos $Hom(H^c, H^a)$.*

Observação 5.5. *Também é importante observar que $\sum S(h_1)h_2 = \sum h_1S(h_2) = \varepsilon(h)1_H$ que decorre de $S * I = I * S = u\varepsilon$.*

Exemplo 5.4.

Até agora mostramos que $(kG, M, u, \Delta, \varepsilon)$ possui uma estrutura de biálgebra. Agora resta-nos mostrar que existe uma aplicação $S : kG \to kG$ que será nossa antípoda. De maneira *natural podemos definir a antípoda* $S(g) = g^{-1}$, $\forall g \in G$. *Note que:*

$$\begin{aligned} (S * I)(g) &\overset{(3)}{=} S(g)g \\ &= g^{-1}g \\ &= 1_G \\ &= u(1_k) \\ &= u(\varepsilon(1_{kG})) \\ &= (u\varepsilon)(g) \end{aligned}$$

(3) $\Delta(g) = g \otimes g$.
E para o outro lado temos:

$$\begin{aligned} (I * S)(g) &\overset{(3)}{=} gS(g) \\ &= gg^{-1} \\ &= 1_G \\ &= u(1_k) \\ &= u(\varepsilon(1_{kG})) \\ &= (u\varepsilon)(g) \end{aligned}$$

Portanto $(kG, M, u, \Delta, \varepsilon, S)$ *é de fato uma álgebra de Hopf.*

Exemplo 5.5. *Até agora mostramos que* $(k[X], M, u, \Delta, \varepsilon)$ *possui uma estrutura de biálgebra. Agora resta-nos mostrar que existe uma aplicação* $S : k[X] \to k[X]$ *que será nossa antípoda. Podemos definir a antípoda* $S(X) = -X$. *Note que:*

$$\begin{aligned} (I * S)(X) &= I(X)S(1) + I(1)S(X) \\ &= X + (-X) \\ &= 0 \\ &= u(0) \\ &= u(\varepsilon(X)) \\ &= (u\varepsilon)(X) \end{aligned}$$

De maneira análoga concluímos que $S * I = u\varepsilon$ *e portanto* $(k[X], M, u, \Delta, \varepsilon, S)$ *é uma álgebra de Hopf.*

Definição 5.5. *Sejam* H *e* B *álgebras de Hopf. A aplicação* $f : A \to B$ *é um homomorfismo de álgebras de Hopf se* f *for um homomorfismo de biálgebras.*

Proposição 5.3. *Sejam* H *e* B *duas álgebras de Hopf com antípodas* S_H *e* S_B, *respectivamente. Se* $f : H \to B$ *é um homomorfismo de álgebras de Hopf então* $S_B f = f S_H$.

Demonstração. Vamos considerar a álgebra $Hom(H, B)$ e S_Bf e fS_H dois elementos dessa álgebra. Vamos mostrar que ambos são o inverso de f e como a inversa de f nessa álgebra é única, podemos concluir que $S_Bf = fS_H$. Então considerando $h \in H$ temos por um lado:

$$\begin{aligned} ((S_Bf) * f)(h) &= \sum S_Bf(h_1)f(h_2) \\ &\overset{(4)}{=} \sum S_B(f(h)_1)f(h)_2 \\ &\overset{(5)}{=} \varepsilon_B(f(h))1_B \\ &\overset{(4)}{=} \varepsilon_H(h)1_B \\ &\overset{(6)}{=} (u\varepsilon)(h) \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} (f * (fS_H))(h) &= \sum f(h_1)f(S_H(h_2)) \\ &\overset{(4)}{=} f(\sum h_1S_H(h_2)) \\ &\overset{(5)}{=} f(\varepsilon_H(h)1_H) \\ &\overset{(4)}{=} \varepsilon_H(h)1_B \\ &\overset{(6)}{=} (u\varepsilon)(h) \end{aligned}$$

(4) por que f é um homomorfismo de álgebras e de coálgebras.
(5) Observação 5.5.
(6) $\varepsilon_H(h)1_B = \varepsilon_H(h)u(1_k) = u_B(\varepsilon_H(h)) = (u_B \circ \varepsilon_H)(h)$.
Sendo assim $S_Bf = fS_H$. □

Proposição 5.4. *Seja H um álgebra de Hopf com antípoda S. Então, $\forall h, g \in H$ temos:*

1. $S(hg) = S(g)S(h)$.
2. $S(1) = 1$.
3. $\Delta(S(h)) = \sum S(h_2) \otimes S(h_1)$.
4. $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$.

As propriedades 1 e 2 dizem que S é um antihomomorfismo de álgebras e as propriedades 3 e 4 dizem que S é um antimorfismo de coálgebras.

Demonstração. Para demonstrarmos o item 1 usaremos a mesma técnica usada na proposição anterior.
Considere os $Hom(H \otimes H, H)$ e os elementos $F, G, M \in Hom(H \otimes H, H)$ definidos da seguinte forma:

$$F(h \otimes g) = S(g)S(h),$$

$$G(h \otimes g) = S(hg),$$

$$M(h \otimes g) = hg,$$

para quais quer $h, g \in H$. Mostraremos que M é a inversa à esquerda de F e a inversa à direita de G e pela unicidade da inversa vamos concluir que

$$S(g)S(h) = F(h \otimes g) = G(h \otimes g) = S(hg).$$

Sejam $h, g \in H$ então temos que:

$$\begin{aligned}
(M * F)(h \otimes g) &= \sum M((h \otimes g)_1)F((h \otimes g)_2) \\
&\overset{(7)}{=} \sum M(h_1 \otimes g_1)F(h_2 \otimes g_2) \\
&= \sum h_1 g_1 S(g_2)S(h_2) \\
&\overset{(5)}{=} \sum h_1 \varepsilon(g) 1 S(h_2) \\
&= \varepsilon(h)\varepsilon(g)1_H \\
&= \varepsilon_{H \otimes H}(h \otimes g)1 \\
&= u_H \varepsilon_{H \otimes H}(h \otimes g)
\end{aligned}$$

Para o outro lado temos que:

$$\begin{aligned}
(G * M)(h \otimes g) &= \sum G((h \otimes g)_1)M((h \otimes g)_2) \\
&\overset{(8)}{=} \sum S(h_1 g_1)h_2 g_2 \\
&= \sum S((hg)_1)(hg)_2 \\
&\overset{(5)}{=} \varepsilon(hg)_1 \\
&= u_H \varepsilon_{H \otimes H}(h \otimes g)
\end{aligned}$$

(7)Da definição de $\Delta_{H \otimes H}$.
(8)Das definições de $\Delta_{H \otimes H}$, G e M.
Para o item 2. basta aplicar a definição da antípoda S em 1_H e concluimos que:

$$\begin{aligned}
S(1_H)1_H &= 1_H S(1_H) \\
&= \varepsilon(1_H)1_H \\
&= 1_k 1_H \\
&= 1_H
\end{aligned}$$

Agora no item 3. o processo é análogo ao do item 1. porém vamos definir $F(h) = \Delta(S(h))$ e $G(h) = \sum S(h_2) \otimes S(h_1)$ para qualquer $h \in H$. Agora vamos mostrar que Δ é o inverso à esquerda de F e à direita de G e assim concluindo que F=G. Então, para $h \in H$ nós temos que:

$$\begin{aligned}(\Delta * F)(h) &= \sum \Delta(h_1)F(h_2)\\ &= \sum \Delta(h_1)\Delta(S(h_2))\\ &= \Delta(\sum h_1 S(h_2))\\ &= \Delta(\varepsilon(h)1)\\ &= \varepsilon(h)1\otimes 1\\ &= u_{H\otimes H}\varepsilon_H(h).\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}(G * \Delta)(h) &= \sum G(h_1)\Delta(h_2)\\ &= \sum(S((h_1)_2)\otimes S((h_1)_1)((h_2)_1\otimes (h_2)_2)\\ &= \sum(S(h_2)\otimes S(h_1))(h_3\otimes h_4)\\ &= \sum S(h_2)h_3\otimes S(h_1)h_4\\ &= \sum S((h_2)_1)(h_2)_2\otimes S(h_1)h_3\\ &\overset{(5)}{=} \sum \varepsilon(h_2)1\otimes S(h_1)h_3\\ &= \sum 1\otimes S(h_1)\varepsilon((h_2)_1)(h_2)_2\\ &\overset{(5)}{=} \sum 1\otimes S(h_1)h_2\\ &= 1\otimes\varepsilon(h)1\\ &= u_{H\otimes H}\varepsilon_H(h)\end{aligned}$$

Portanto $F = G$.
Para o item 4. aplicamos ε na relação $\sum h_1S(h_2) = \varepsilon(h)1$ para obtermos

$$\begin{aligned}\varepsilon(\sum h_1S(h_2)) &= \sum\varepsilon(h_1)\varepsilon(S(h_2))\\ &= \sum\varepsilon(h_1)S(\varepsilon(h_2)1_H)\\ &= \varepsilon(\varepsilon(h)1_H)\\ &= \varepsilon(h)\end{aligned}$$

Além disso, pela linearidade de ε e S, podemos reescrever obtendo $\varepsilon(S(\sum\varepsilon(h_1)h_2)) = \varepsilon(h)$. Usando a propriedade da counidade temos então que $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$ □

Proposição 5.5. *Seja H um álgebra de Hopf com antípoda S. Então as seguintes proposições são equivalentes:*

1. $\sum S(h_2)h_1 = \varepsilon(h)1$ *para qualquer* $h \in H$.

2. $\sum h_2S(h_1) = \varepsilon(h)1$ *para qualquer* $h \in H$.

3. $S^2 = I$.

Demonstração. $1 \Rightarrow 3$
Vamos mostrar que S^2 é a inversa à direita de S, pois como sabemos que I é a inversa de S poderemos concluir que $I = S^2$. Sendo assim, considere $h \in H$ e então temos:

$$\begin{aligned}(S * S^2)(h) &= \sum S(h_1)S^2(h_2) \\ &\overset{(5)}{=} \sum S(S(h_2)h_1) \\ &= S(\varepsilon(h)1) \\ &= \varepsilon(h)1 \\ &= u\varepsilon(h).\end{aligned}$$

$3 \Rightarrow 2$

$$\sum h_1 S(h_2) = \varepsilon(h)1 \overset{(9)}{\Leftrightarrow} \sum S^2(h_2)S(h_1) = \varepsilon(h)1 \overset{(10)}{\Rightarrow} \sum h_2 S(h_1) = \varepsilon(h)1.$$

$2 \Rightarrow 3$
Neste caso vamos prosseguir de maneira análoga ao $1 \Rightarrow 3$, mostrando agora que S^2 é o inverso à esquerda. Seja $h \in H$, então temos:

$$\begin{aligned}(S^2 * S)(h) &= \sum S^2(h_1)S(h_2) \\ &= S(\sum h_2 S(h_1)) \\ &= S(\varepsilon(h)1) \\ &= \varepsilon(h)1 \\ &= u\varepsilon(h).\end{aligned}$$

$3 \Rightarrow 1$

$$\sum S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1 \overset{(9)}{\Leftrightarrow} \sum S(h_2)S^2(h_1) = \varepsilon(h)1 \overset{(10)}{\Rightarrow} \sum S(h_2)h_1 = \varepsilon(h)1.$$

(9) Aplicando o antimorfismo de álgebras S.
(10) Por hipótese $S^2 = I$.

□

Corolário 5.1. *Se H é uma álgebra de Hopf comutativa ou cocomutativa então $S^2 = I$.*

Demonstração. Se H é comutativo então o item 2 da proposição anterior é satisfeita e portanto $S^2 = I$.
Se H é cocomutativo então $\sum h_1 \otimes h_2 = \sum h_2 \otimes h_1$ e também sabemos que $\sum S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1$ portanto temos que $\sum S(h_2)h_1 = \varepsilon(h)1$ e pela proposição anterior $S^2 = I$.

□

Proposição 5.6. *Seja H uma álgebra de Hopf com dimensão finita e antípoda S. Então a biálgebra H^* é uma álgebra de Hopf com antípoda S^**

Demonstração. Já sabemos que H^* é uma biálgebra. Vamos mostrar que existe uma antípoda. Seja $h^* \in H^*$ e seja $\delta(h^*) = \sum h_1^* \otimes h_2^*$ a comultiplicação. Então para todo $h \in H$ temos que:

$$\begin{aligned}
(S^* * I)(h^*)(h) &\overset{(10)}{=} \sum (S^*(h_1^*)h_2^*)(h) \\
&= \sum S^*(h_1^*)(h_1)h_2^*(h_2) \\
&\overset{(11)}{=} \sum h_1^*(S(h_1))h_2^*(h_2) \\
&\overset{(12)}{=} \sum h^*(S(h_1)h_2) \\
&\overset{(13)}{=} h^*(\varepsilon(h)1) \\
&\overset{(11)}{=} \varepsilon(h)h^*(1) \\
&= E(h^*)\varepsilon(h)
\end{aligned}$$

Analogamente,temos:

$$\begin{aligned}
(I * S^*)(h^*)(h) &\overset{(10)}{=} \sum h_1^* S^*(h_2^*))(h) \\
&= \sum h_1^*(h_1)S^*(h_2^*)(h_2) \\
&\overset{(11)}{=} \sum h_1^*(h_1)h_2^*(S(h_2)) \\
&\overset{(12)}{=} \sum h^*(h_1 S(h_2)) \\
&\overset{(13)}{=} h^*(\varepsilon(h)1) \\
&\overset{(11)}{=} \varepsilon(h)h^*(1) \\
&= E(h^*)\varepsilon(h)
\end{aligned}$$

(10) Utilizando a as definições contruídas na demonstração da Proposição 4.1 e o Lema 2.1.
(11) Bilinearidade de h*.
(12)$Definiçãode\Delta_{H*}$
(13) Observação 5.5
Portanto, S^* é a antípoda que procurávamos em H^* $\square$

6 Considerações finais

Após o termino deste trabalho foi possível compreender melhor a estrutura das Álgebras de Hopf e sua importância para os diversos campos da física e da matemática. Também foi possível reconhecer essa estrutura em outras estruturas mais familiares como as álgebras de Grupo e as álgebras de polinômios. Foi possível também entender como funciona o Dual de estruturas como as Álgebras e as coálgebras, além de compreender as limitações que devem ser impostas a essas estruturas para que seus respectivos duais mantenham estruturas algébricas compatíveis. No capítulo 4 deste trabalho nos é permitido ver as estruturas por diferentes ângulos, quando analisamos as biálgebras, hora como álgebras e hora como coálgebras, tornando assim cada vez mais clara as ligações que existem entre essas duas estruturas. Durante o trabalho foi possível se apropriar de inúmeras técnicas de demonstração que são utilizadas na álgebra, essas técnicas me permitiram repensar algumas demonstrações e outras me permitiram olhar de uma maneira diferente para os objetos de estudo. Para além dos conceitos matemáticos desenvolvidos neste trabalho, esse se apresentou importante pois permitiu um primeiro contato com áreas da matemática que são estudadas em diversos centros de pesquisa em Álgebra. Além disso, o contato com uma área muito pouco desenvolvida na grade curricular do curso de matemática licenciatura me permitiu aprofundar os conhecimentos nesta área para que seja possível dar continuidade nessa linha de pesquisa em cursos de pós-graduação ao longo da minha jornada acadêmica.

Referências

DASCALESCUS, S.; RAIANU, S.; NASTASESCUS, C. Hopf algebras: an introduction*. Basel, Switzerland: Marcel Dekker, 2001. v. 1. Citado na página 7.*

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. Elementos de álgebra*. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. v. 1. Citado na página 8.*

HUNGERFORD, T. W. Algebra*. New York: Springer, 2000. v. 1. Citado na página 8.*

KREYSZIG, E. Introductory functional analysis with applications*. Nwe York: Wiley Classics Library. Citado na página 8.*

LIMA, E. L. Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. v. 1. Citado na página 8.*