

Renan de Almeida Schmidt

Estudo Introdutório da Equação do Calor Unidimensional

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Novembro, 2019

Renan de Almeida Schmidt

Estudo Introdutório da Equação do Calor Unidimensional

Trabalho de Conclusão de Curso, Matemática Aplicada Bacharelado, submetido por Renan de Almeida Schmidt junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Matemática Aplicada Bacharelado

Orientador: Dra. Fabiana Travessini De Cezaro

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Novembro, 2019

Resumo

A equação do calor unidimensional é uma Equação Diferencial Parcial (EDP) que modela a dinâmica do calor em uma barra cilíndrica, cuja seção transversal é tão pequena e relação ao seu comprimento que podemos tratar a barra como se ela tivesse apenas uma dimensão. Neste trabalho, estudaremos a equação do calor homogênea unidimensional dada pela Lei de Fourier e de Cattaneo. Mostraremos a existência de solução clássica através do método de Fourier, no caso de domínio limitado, utilizando a teoria de séries de Fourier e a Transformada de Fourier para o domínio não-limitado. Ainda, apresentaremos a equação do calor não-homogênea e algumas ferramentas para encontrar uma solução clássica, a saber, o princípio de Duhamel. Ainda, mostraremos algumas soluções numéricas.

Palavras-chaves: Equação do calor, Transformada de Fourier, Série de Fourier, Princípio de Duhamel.

Sumário

	Introdução	4
1	CONHECIMENTOS PRELIMINARES	6
1.1	Conceitos físicos	6
1.2	Pré-requisitos	6
2	TEORIA DE FOURIER	8
2.1	Série de Fourier	8
2.2	Transformada de Fourier	25
3	EQUAÇÃO DO CALOR	30
3.1	Dedução da Equação do Calor Homogênea dada pela Lei de Fourier	30
3.2	Solução do Problema Homogêneo	32
3.3	Caso 1: Condições de Contorno de Dirichlet	33
3.4	Caso 2: Condições de Contorno de Neumann	38
4	EQUAÇÃO DO CALOR NÃO HOMOGÊNEA	43
4.1	Definindo a Equação do Calor não-homogênea	43
4.2	O Princípio de Duhamel	44
4.3	Caso 1: Condições de Contorno de Dirichlet	47
4.4	Caso 2: Condições de Contorno de Neumann	49
5	A EQUAÇÃO DE CATTANEO	53
5.1	Caso 1: Condições de Contorno de Dirichlet	54
5.2	Caso 2	57
6	A EQUAÇÃO DO CALOR NA RETA	59
6.1	Equação do calor não homogênea na reta	65
7	SOLUÇÃO NUMÉRICA	67
7.1	Equação do Calor Homogênea pela Lei de Fourier	67
7.2	Equação do Calor Não Homogênea pela Lei de Fourier	71
7.3	Equação do Calor Homogênea de Cattaneo	79
8	CONCLUSÕES	81
	REFERÊNCIAS	82

Introdução

Chamamos de Equação Diferencial Parcial (EDP) uma equação que contém derivadas parciais de uma função de várias variáveis. Elas descrevem muitos fenômenos importantes na natureza. São exemplos de EDP's a equação da onda $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ que é associada a processos oscilatórios, a equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ que modela processos independentes do tempo ou estacionários, a equação do calor de Fourier $u_t - k u_{xx} = f(x, t)$ e a equação do calor de Cattaneo $u_t(x, t) + \alpha u_{tt}(x, t) = \beta u_{xx}(x, t)$, ambas descrevem processos de condução do calor.

A Equação do calor unidimensional é um modelo que representa dinâmica do calor em uma barra unidimensional, ou seja, um cilindro cuja seção transversal é muito pequena em relação ao seu comprimento. Neste trabalho nos ateremos a equação do calor unidimensional de Fourier e de Cattaneo. Estudamos a equação do calor pois a análise da dissipação e condução do calor continua atraindo a atenção da comunidade acadêmica, uma vez que modela problemas tecnológicos importantes como, por exemplo, a transferência de calor produzido por máquinas de alta velocidade.

Sabemos da teoria geral de EDP's, (JR., 1988), que dentro de cada classe, hiperbólica, elíptica ou parabólica, as soluções das equações diferenciais possuem o mesmo tipo de comportamento. A equação do calor dada por Fourier é do tipo parabólica e a equação de Cattaneo é classificada como hiperbólica. A Fourier tem a propriedade de velocidade infinita de propagação e Cattaneo possui a propriedade de velocidade finita. Esta é a principal diferença entre estas duas equações.

A lei de Fourier para condução de calor prevê uma velocidade infinita para sinais térmicos, este comportamento contradiz a teoria de relatividade de Einstein, pois isto faria a velocidade de propagação do calor maior que a velocidade da luz (MARÍN, 2011). Este fato é conhecido como o paradoxo da propagação instantânea do calor (MARÍN, 2011). Então para certas situações o modelo de Fourier não produz resultados precisos, por exemplo, se o tempo de interação entre um laser e um corpo sólido for muito pequeno (LENARCZY, 2019). Isto acontece pela ausência de equilíbrio térmico local (LENARCZY, 2019).

Em 1958 um modelo hiperbólico para a equação do calor foi proposto por Cattaneo e independentemente por Vernotte (LENARCZY, 2019). Este modelo leva em conta a propagação finita do calor, concertando assim o paradoxo da propagação infinita do calor do modelo de Fourier (LENARCZY, 2019). Um exemplo de aplicação para o modelo de Cattaneo, é a limpeza de chips de computador através de curtos pulsos de laser (SARE; RACKE, 2009).

Durante os últimos dois séculos vários métodos foram desenvolvidos para resolver EDPs, como por exemplo, o método de separação de variáveis usado por D'Alembert, Daniel Bernoulli e Euler em cerca de 1750 (BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 2001, p. 573). Vamos mostrar a existência de solução clássica através do método de Fourier (BLEECKER, 1995) para estas equações definidas numa barra finita. Para isso, mostraremos alguns dos principais resultados da teoria de séries de Fourier (JR., 1988). Em domínio não-limitado da reta, estudaremos somente a equação do calor dada por Fourier e apresentamos alguns resultados da transformada de Fourier (JR., 1988).

No Capítulo 1 nós definiremos alguns conhecimentos preliminares, a saber conceitos físicos e alguns pré-requisitos que serão necessários ao decorrer do trabalho. O assunto do Capítulo 2 será a teoria de Fourier, a saber a transformada e a série de Fourier, assim como alguns resultados importantes. No capítulo 3 trataremos sobre a Equação do Calor Homogênea de Fourier, sua dedução e sua resolução através do método de separação de variáveis. No Capítulo 4 nós apresentaremos o modelo de Fourier da equação do calor não homogênea, assim como as ferramentas para solucioná-la, a saber, o Princípio de Duhamel. O tema do Capítulo 5 será o modelo de Cattaneo para equação de calor e a sua resolução. No capítulo 6 trataremos sobre a Equação do Calor na Reta, tanto a homogênea quanto a não homogênea. No Capítulo 7 apresentaremos algumas soluções numéricas dos modelos estudados. Para finalizar no Capítulo 8 trataremos a conclusão e as perspectivas de trabalhos futuros.

1 Conhecimentos Preliminares

Neste Capítulo veremos alguns pré-requisitos para o que será abordado neste trabalho, utilizaremos os livros (NUSSENZVEIG, 2002) e (YOUNG; FREEDMAN, 2008) para os conceitos de física, e para os demais, utilizaremos (BLEECKER, 1995) e (IÓRIO, 2005).

1.1 Conceitos físicos

Definição 1.1.1. (Equação Fundamental da Calorimetria) Suponha um corpo com massa m e calor específico C . O calor Q necessário para uma variação de temperatura ΔT é dado pela equação

$$Q = mC\Delta T$$

onde $\Delta T = T_{final} - T_{inicial}$. $T_{inicial}$ e T_{final} são as temperaturas inicial e final respectivamente.

Definição 1.1.2. (Lei de Fourier) A taxa de transferência de calor, $\frac{dQ}{dt}$, em uma barra cilíndrica é dada pela equação

$$\frac{dQ}{dt} = -KA \frac{\partial T}{\partial x}$$

onde K é a constante de condutividade térmica do material, A é a área de seção reta do cilindro e $\frac{\partial T}{\partial x}$ é o gradiente de temperatura na forma geral.

1.2 Pré-requisitos

Teorema 1.2.1. Sejam $f(x)$ e $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) funções contínuas por partes definidas em um intervalo não vazio $I \in \mathbb{R}$, que pode ser aberto, fechado, finito ou infinito. Suponhamos que para cada x , tenhamos $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Assuma que existe uma função $g(x) \geq 0$ contínua por partes tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$, e a integral de $g(x)$ no intervalo I é finita. Então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_I f(x) dx$$

Teorema 1.2.2. Para cada $h \in \mathbb{R}$ em um intervalo H que contenha h_0 , seja $F(x, h)$ uma função contínua por partes, definida em um intervalo não vazio I , que pode ser aberto, fechado, finito ou infinito. Suponhamos que $f(x) = \lim_{h \rightarrow h_0} F(x, h)$ é contínua por partes em I . Assuma que existe uma função $g(x) \geq 0$ contínua por partes tal que $|F(x, h)| \leq g(x)$, $\forall x \in I$ e $h \in H$, e que a integral de $g(x)$ no intervalo I é finita. Então:

$$\lim_{h \rightarrow h_0} \int_I F(x, h) dx = \int_I \lim_{h \rightarrow h_0} F(x, h) dx = \int_I f(x) dx$$

Teorema 1.2.3. (Regra de Leibniz) Seja R a região $R = \{-\infty \leq a < x < b \leq \infty, -\infty \leq c < y < d \leq \infty\}$ no plano XY . Seja $f(x, y)$ uma função contínua definida em R , tal que $f_y(x, y)$ também seja contínua em R . Além disso, assumamos que

$$\int_c^d |f(x, y)| dx < \infty$$

para cada x em (a, b) . Suponhamos que existe uma função $g(x)$ contínua tal que para todo (x, y) em R temos

$$|f_y(x, y)| \leq g(x) \quad \text{e} \quad \int_c^d g(x) dx < \infty$$

Então:

$$\frac{d}{dy} \left[\int_c^d f(x, y) dx \right] = \int_c^d \frac{\partial}{\partial y} [f(x, y)] dx \quad (a < y < b)$$

Demonstração. Utilizando a definição de derivada obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left[\int_c^d f(x, y) dx \right] &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\int_c^d f(x, y+h) dx - \int_c^d f(x, y) dx}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_c^d \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} dx \right] \end{aligned}$$

Como $f(x, t)$ é uma função contínua definida em R , pelo Teorema 1.2.2 podemos escrever

$$\frac{d}{dy} \left[\int_c^d f(x, y) dx \right] = \int_c^d \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \right) dx$$

Utilizando novamente a definição de derivada obtemos:

$$\frac{d}{dy} \left[\int_c^d f(x, y) dx \right] = \int_c^d \frac{\partial}{\partial y} [f(x, y) dx]$$

□

Teorema 1.2.4. (Princípio da Superposição) Seja L um operador diferencial parcial linear de ordem k cujos coeficientes estão definidos em um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Suponha que $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ é um conjunto de funções de classe C^k em Ω satisfazendo a EDP linear homogênea $Lu = 0$. Então, se $\{\alpha\}_{m=1}^{\infty}$ é uma seqüência de escalares tal que a série

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m(x) \tag{1.1}$$

é convergente e k vezes diferenciável termo a termo em Ω , u satisfaz $Lu = 0$.

2 Teoria de Fourier

Neste capítulo abordaremos a transformada de Fourier e a série de Fourier, assim como alguns de seus resultados. Foram utilizados aqui os livros (BLEECKER, 1995), (IÓRIO, 2005) e (FIGUEIREDO, 1988).

2.1 Série de Fourier

Nesta seção definiremos a série de Fourier e veremos alguns de seus resultados, (BLEECKER, 1995).

Definição 2.1.1. Uma função $f(x)$ é dita absolutamente integrável sobre um intervalo $[a, b]$ se

$$\int_a^b |f(x)| dx < \infty$$

Definição 2.1.2. Um conjunto de funções $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é ortogonal em $[0, L]$ se o produto interno:

$$\int_0^L \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x) dx = 0 \text{ se } m \neq n$$

$$\int_0^L \varphi_n^2(x) dx > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se além disso,

$$\int_0^L \varphi_n^2(x) dx = 1, \forall n \in \mathbb{N},$$

dizemos que $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é ortonormal.

Teorema 2.1.1. O conjunto de funções $\left\{\varphi_n = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ é ortogonal em $[0, L]$. Também, o conjunto $\left\{\varphi_n = \text{cos}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ é ortogonal em $[0, L]$.

Demonstração. Vamos relembrar as seguintes propriedades

$$\cos(A + B) = \cos(A)\cos(B) - \text{sen}(A)\text{sen}(B) \quad (2.1)$$

$$\cos(A - B) = \cos(A)\cos(B) + \text{sen}(A)\text{sen}(B) \quad (2.2)$$

$$[\text{sen}(x)]^2 = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad (2.3)$$

$$[\cos(x)]^2 = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad (2.4)$$

Subtraindo (2.1) de (2.2)

$$\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2\operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B) \quad (2.5)$$

Somando (2.1) com (2.2)

$$\cos(A - B) + \cos(A + B) = 2\cos(A)\cos(B) \quad (2.6)$$

Para $\left\{\varphi_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L 2\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

Aplicando (2.5), onde $\frac{n\pi x}{L} = A$ e $\frac{m\pi x}{L} = B$, obtemos

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L} - \frac{m\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \cos\left(\left[\frac{n\pi}{L} - \frac{m\pi}{L}\right] x\right) dx - \frac{1}{2} \int_0^L \cos\left(\left[\frac{n\pi}{L} + \frac{m\pi}{L}\right] x\right) dx \\ &= \frac{1}{2\left(\frac{n\pi}{L} - \frac{m\pi}{L}\right)} \left[\operatorname{sen}\left(\left[\frac{n\pi}{L} - \frac{m\pi}{L}\right] x\right)\right]_{x=0}^{x=L} - \frac{1}{2\left(\frac{n\pi}{L} + \frac{m\pi}{L}\right)} \left[\operatorname{sen}\left(\left[\frac{n\pi}{L} + \frac{m\pi}{L}\right] x\right)\right]_{x=0}^{x=L} \\ &= \frac{1}{\frac{2\pi(n-m)}{L}} \left[\operatorname{sen}\left(\left[\frac{\pi(n-m)}{L}\right] (L)\right) - \operatorname{sen}\left(\left[\frac{\pi(n-m)}{L}\right] (0)\right)\right] \\ &\quad - \frac{1}{\frac{2\pi(n+m)}{L}} \left[\operatorname{sen}\left(\left[\frac{\pi(n+m)}{L}\right] (L)\right) - \operatorname{sen}\left(\left[\frac{\pi(n+m)}{L}\right] (0)\right)\right] \\ &= \frac{L\operatorname{sen}(\pi(n-m))}{2\pi(n-m)} - \frac{L\operatorname{sen}(\pi(n+m))}{2\pi(n+m)} \quad p_1 = n+m \in \mathbb{N} \text{ e } p_2 = n-m \in \mathbb{N} \\ &= \frac{L\operatorname{sen}(\pi p_2)}{2\pi p_2} - \frac{L\operatorname{sen}(\pi p_1)}{2\pi p_1} = \frac{L(0)}{2\pi p_2} - \frac{L(0)}{2\pi p_1} = 0 \end{aligned}$$

Agora temos que mostrar que

$$\int_0^L \left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]^2 dx > 0 \quad (2.7)$$

Aplicando (2.3) na integral (2.7)

$$\begin{aligned}
\int_0^L \left[\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right]^2 dx &= \int_0^L \frac{1 - \cos \left(\frac{2n\pi x}{L} \right)}{2} dx \\
&= \int_0^L \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{2n\pi}{L}} \right) \int_0^L \frac{2n\pi}{L} \cos \left(\frac{2n\pi x}{L} \right) dx \\
&= \left[\frac{x}{2} \right]_{x=0}^{x=L} - \left[\frac{L \operatorname{sen} \left(\frac{2n\pi x}{L} \right)}{2n\pi} \right]_{x=0}^{x=L} \\
&= \frac{L}{2} - \frac{L \operatorname{sen} (2n\pi)}{2n\pi} + \frac{L \operatorname{sen} (0)}{2n\pi} = \\
&= \frac{L}{2} > 0
\end{aligned}$$

Para $\left\{ \varphi_n = \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$\int_0^L \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L 2 \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx$$

Aplicando (2.6), onde $\frac{n\pi x}{L} = A$ e $\frac{m\pi x}{L} = B$, obtemos

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^L \cos \left(\frac{n\pi x}{L} - \frac{m\pi x}{L} \right) + \cos \left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{m\pi x}{L} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L \cos \left(\left[\frac{n\pi}{L} - \frac{m\pi}{L} \right] x \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \cos \left(\left[\frac{n\pi}{L} + \frac{m\pi}{L} \right] x \right) dx \\
&= \frac{1}{2 \left(\frac{n\pi}{L} - \frac{m\pi}{L} \right)} \left[-\operatorname{sen} \left(\left[\frac{n\pi}{L} - \frac{m\pi}{L} \right] x \right) \right]_{x=0}^{x=L} + \frac{1}{2 \left(\frac{n\pi}{L} + \frac{m\pi}{L} \right)} \left[-\operatorname{sen} \left(\left[\frac{n\pi}{L} + \frac{m\pi}{L} \right] x \right) \right]_{x=0}^{x=L} \\
&= \frac{1}{\frac{2\pi(n-m)}{L}} \left[-\operatorname{sen} \left(\left[\frac{\pi(n-m)}{L} \right] (L) \right) + \operatorname{sen} \left(\left[\frac{\pi(n-m)}{L} \right] (0) \right) \right] \\
&+ \frac{1}{\frac{2\pi(n+m)}{L}} \left[-\operatorname{sen} \left(\left[\frac{\pi(n+m)}{L} \right] (L) \right) + \operatorname{sen} \left(\left[\frac{\pi(n+m)}{L} \right] (0) \right) \right] \\
&= -\frac{L \operatorname{sen} (\pi(n-m))}{2\pi(n-m)} + \frac{L \operatorname{sen} (\pi(n+m))}{2\pi(n+m)} \quad p_1 = n+m \in \mathbb{N} \text{ e } p_2 = n-m \in \mathbb{N} \\
&= -\frac{L \operatorname{sen} (\pi p_2)}{2\pi p_2} + \frac{L \operatorname{sen} (\pi p_1)}{2\pi p_1} = -\frac{L(0)}{2\pi p_2} + \frac{L(0)}{2\pi p_1} = 0
\end{aligned}$$

Agora temos que mostrar que

$$\int_0^L \left[\cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right]^2 dx > 0 \quad (2.8)$$

Aplicando (2.4) na integral (2.8)

$$\begin{aligned}
\int_0^L \left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]^2 dx &= \int_0^L \frac{1 + \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)}{2} dx \\
&= \int_0^L \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{2n\pi}{L}} \right) \int_0^L \frac{2n\pi}{L} \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx \\
&= \left[\frac{x}{2} \right]_{x=0}^{x=L} + \left[\frac{L \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)}{2n\pi} \right]_{x=0}^{x=L} \\
&= \frac{L}{2} + \frac{L \sin(2n\pi)}{2n\pi} + \frac{L \sin(0)}{2n\pi} = \\
&= \frac{L}{2} > 0
\end{aligned}$$

□

Definição 2.1.3. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período T se $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definição 2.1.4. Seja f uma função definida em $[-L, L]$ periódica, de período $2L$, integrável e absolutamente integrável. Sejam

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Então, a Série de Fourier de f em $[-L, L]$ é dada por:

$$SF[f(x)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

onde os coeficientes a_0, a_n, b_n são conhecidos como os coeficientes de Fourier de f .

Agora, a pergunta é sob quais condições sobre a função f , a série de Fourier $SF[f]$ converge para f , ou seja, quando teremos a igualdade $f(x) = SF[f(x)]$ para $x \in [0, L]$? O Teorema de Fourier abaixo responderá esta pergunta, mas antes precisamos de algumas definições

Definição 2.1.5. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será seccionalmente contínua se para qualquer intervalo limitado $[a, b]$, $a < b$, existem $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq b$ tais que f é contínua em cada intervalo aberto (a_j, a_{j+1}) , $j = 1 : (n - 1)$, e existem os limites

$$f(a_j^+) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x) \quad \text{e} \quad f(a_j^-) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x)$$

Ou seja, existe um número finito de descontinuidade e todas são de primeira espécie.

Definição 2.1.6. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ será seccionalmente diferenciável se ela for seccionalmente contínua e se a função derivada f' for também seccionalmente contínua

Seja

$$S_n = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right)$$

a sequência de somas parciais da série de Fourier de f .

Nosso objetivo é estimar

$$e_n(x) = S_n - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

ou seja, analisar a convergência de S_n , quando $n \rightarrow \infty$ para $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

Sabemos que

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx \quad \text{e} \quad b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L f(x) dx + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \cos\left(\frac{k\pi y}{L}\right) dy \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{L}\right) dy \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L f(x) dx + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \cos\left(\frac{k\pi y}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dy \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dy \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L f(x) dx + \sum_{k=1}^n \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \left[\cos\left(\frac{k\pi y}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi y}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right] dy \end{aligned}$$

Utilizando (2.2)

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L f(x) dx + \sum_{k=1}^n \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \left[\cos\left(\frac{k\pi y}{L} - \frac{k\pi x}{L}\right) \right] dy \\ &= \int_{-L}^L \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{L}(x - y)\right) \right] f(y) dy \end{aligned}$$

Definição 2.1.7. Definimos o núcleo de Dirichlet como

$$D_n(x) = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right] \quad (2.9)$$

Lema 2.1.1. Sobre $D_n(x)$ as seguintes afirmações são verdadeiras

1. $D_n(x)$ é par, ou seja, $D_n(x) = D_n(-x) \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-L}^L D_n(x) dx = 1 \quad \forall x$
3. $D_n(x)$ é uma função contínua

4. $D_n(0) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{L}$

5. A seguinte identidade é válida para $x \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$

$$D_n(x) = \frac{1}{2L} \frac{\text{sen} \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{L} \right)}{\text{sen} \left(\frac{\pi x}{2L} \right)}$$

Demonstração. De (1) a (4), segue devido a definição do núcleo de Dirichlet em termo de uma função cosseno e das propriedades da função cosseno.

Para provarmos (5), seja

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^n \cos(k\theta)$$

Pela fórmula de Euler temos

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \text{sen}(\theta)$$

então,

$$S_n(\theta) = \text{Re} \left(1 + \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right)$$

Ainda temos a seguinte identidade

$$1 + Z + \dots + Z^n = \frac{1 - Z^{n+1}}{1 - Z} \quad Z \neq 1$$

Logo,

$$S_n = \text{Re} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right) = \text{Re} \left(\frac{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})\theta}}{e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}} \right) \quad \theta \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$$

Disso segue que

$$S_n(\theta) = \frac{\text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) + \text{sen} \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \theta \right)}{2 \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right)}$$

e observando a definição de núcleo de Dirichlet, obtemos a identidade em (5).

□

Para a sequência de somas parciais S_n , com a mudança de variável $y = x - t$ obtemos

$$S_n = \int_{-L}^L D_n(x - y) f(y) dy = \int_{L+x}^{-L+x} D_n(t) f(x - t) dt$$

Como ambos, D_n e f , são periodicos de período $2L$, podemos reescrever

$$S_n(x) = \int_{-L}^L D_n(t) f(x - t) dt$$

Como $D_n(x)$ é uma função par

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \int_{-L}^0 D_n(t)f(x-t)dt + \int_0^L D_n f(x-t)dt \\ &= \int_0^L D_n(t)(f(x+t) + f(x-t))dt \end{aligned} \quad (2.10)$$

Queremos estimar $e_n(x)$. De (2.10) na definição de $e_n(x)$ na proposição (2) do núcleo de Dirichlet

$$\begin{aligned} e_n &= S_n - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \\ &= \int_0^L D_n(f(x+t) + f(x-t))dt - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \\ &= \int_0^L D_n(f(x+t) + f(x-t))dt - \left(\int_{-L}^L D_n(t)dt \right) \left(\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right) \\ &= \int_0^L D_n(t)(f(x+t) + f(x-t))dt - \int_{-L}^L D_n(t) \left(\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right) dt \\ &= \int_0^L D_n(t) \left[(f(x+t) - f(x^+)) + (f(x-t) - f(x^-)) \right] dt \end{aligned}$$

Seja

$$g(x, t) = (f(x+t) - f(x^+)) + (f(x-t) - f(x^-)) \quad (2.11)$$

então

$$e_n(x) = \int_0^L D_n(t)g(x, t)dt$$

Lema 2.1.2. (Lema de Riemann-Lebesgue) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função L^1 em um intervalo $[a, b]$. Então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)\cos(tx)dx = 0 \quad (2.12)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)\sen(tx)dx = 0 \quad (2.13)$$

Demonstração. Caso 1:

Suponhamos que f seja limitada, ou seja, $\exists k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k \quad \forall x \in [a, b]$. Para uma função limitado o conceito de integrabilidade é

Dado $\epsilon > 0$ existe uma partição Π do intervalo $[a, b]$, $\Pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, tal que

$$S(f, \Pi) - s(f, \Pi) < \epsilon$$

onde,

$$S(f, \Pi) = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) \quad M_j = \sup\{f(x); x_{j-1} \leq x \leq x_j\} \quad (2.14)$$

$$s(f, \Pi) = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) \quad m_j = \inf\{f(x); x_{j-1} \leq x \leq x_j\} \quad (2.15)$$

são as somas superiores e inferiores associadas a Π .

Seja a partição do intervalo $[a, b]$ dada por $x_j = a + j(b - a)$, $j = 0, 1, \dots, n$. Então,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx &= \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \operatorname{sen}(tx) dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx - \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx \right] \\ &= \sum_{j=1}^n f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx + \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} [f(x) - f(x_j)] \operatorname{sen}(tx) dx \quad (2.16) \end{aligned}$$

Integrando,

$$\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx \right| = \left| \frac{-\cos(tx)}{t} \right|_{x=x_{j-1}}^{x=x_j} \leq \frac{2}{t} \quad (2.17)$$

e ainda,

$$|f(x) - f(x_j)| \leq M_j - m_j \quad \text{para } x_{j-1} \leq x \leq x_j \quad (2.18)$$

De (2.17) e (2.18) em (2.16) e da limitação de f ,

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| \leq \frac{2nM}{t} + \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \quad (2.19)$$

e observamos que o somatório em (2.19) é a diferença entre $S(f, \Pi)$ e $s(f, \Pi)$. Portanto, dado $\epsilon > 0$, tome n tal que $|S(f, \Pi) - s(f, \Pi)| < \frac{\epsilon}{2}$. E a seguir, com este n fixado, tome t_0 tal que

$$\frac{2nM}{t_0} < \frac{\epsilon}{2}$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, para $t \geq t_0$ temos

$$\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \operatorname{sen}(tx) dx \right| < \epsilon$$

isto completa a demonstração do caso 1 para (2.13). A demonstração para (2.12) é análoga.

Caso 2:

Suponhamos que f seja uma função L^1 qualquer. Dado $\epsilon > 0$, tome uma função contínua $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx < \frac{\epsilon}{2}$$

Toda função contínua num compacto é integrável, podemos aplicar o caso 1 na demonstração, com isso concluímos que existe t_0 tal que $\forall \epsilon \geq t_0$, tem-se

$$\left| \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Então,

$$\int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx = \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx + \int_a^b [f(x) - \psi(x)] \operatorname{sen}(tx) dx$$

e, estimando, para $t > t_0$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \operatorname{sen}(tx) dx \right| &\leq \left| \int_a^b \psi(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| + \left| \int_a^b [f(x) - \psi(x)] \operatorname{sen}(tx) dx \right| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Concluimos que dado $\epsilon > 0$, existe t_0 tal que

$$\left| \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(tx) dx \right| < \epsilon$$

□

Teorema 2.1.2. (Teste de Dini) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, e L^1 em $[-L, L]$. Fixado $x \in [-L, L]$, suponha que $f(x^+)$ e $f(x^-)$, existam e que exista $\eta > 0$ tal que

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \infty \quad (2.20)$$

onde $g(x, t)$ é definido como em (2.11). Então, $e_n(x)$ tende a zero quando n tende ao infinito, ou seja,

$$s_n(x) \rightarrow \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

Demonstração. Através da proposição (5) do Lema 2.1.1, vamos escrever

$$e_n(x) = \int_0^\delta \frac{tD_n(t)g(x, t)}{t} dt + \int_\delta^L \operatorname{sen} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right) \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \left(\frac{\pi t}{2L} \right)} dt$$

Para a primeira integral, usaremos (2.20) e para a segunda integral, estimaremos através do lema de Riemann-Lebesgue.

$$|tD_n(t)| = \left| t \frac{1}{2L} \frac{\operatorname{sen} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi t}{2L} \right)} \right| \leq \frac{t}{2L \operatorname{sen} \left(\frac{\pi t}{2L} \right)} \quad (2.21)$$

Como a função em (2.21) é contínua e crescente em $[0, L]$,

$$|tD_n(t)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{para } t \in [0, L]$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \min(L, y)$ tal que

$$\left| \int_0^\delta t D_n(t) \frac{g(x, t)}{t} dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^\delta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \frac{\epsilon}{2}$$

que é possível devido a hipótese (2.20). Agora, temos este $\delta > 0$ fixado. Para aplicarmos o lema de Riemann-Lebesgue, basta verificar que a função

$$h(t) = \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2L}\right)} \quad t \in [\delta, L]$$

é integrável, o que é imediato, porque o denominador não se anula em $[\delta, L]$ e g é integrável. Logo, para n grande

$$\left| \int_\delta^L \operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi t}{L}\right) h(t) dt \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Assim provamos o teste de Dini. □

O teste de Dini pode ser utilizado para obter condições suficientes para convergência da série de Fourier.

Suponha que f seja seccionalmente contínua e que as razões incrementais

$$\frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} \quad \text{e} \quad \frac{f(x-t) - f(x^-)}{t}$$

sejam limitadas para $t > 0$ suficientemente pequeno. Em particular, isto é verdade se as derivadas laterais em x existem

$$f'_+(x) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t}$$

$$f'_-(x) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x-t) - f(x^-)}{t}$$

Nestas condições, o teste de Dini se aplica.

Teorema 2.1.3 (Teorema de Fourier). Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seccionalmente diferenciável com período $2L$. Então, para cada $x \in \mathbb{R}$, a série de Fourier de f converge pontualmente para $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$. Ou seja,

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (2.22)$$

em que $f(x^+) = \lim_{h \rightarrow x^+} f(h)$ e $f(x^-) = \lim_{h \rightarrow x^-} f(h)$.

Demonstração. Pelo Teste de Dini e observação acima, segue o Teorema de Fourier. □

Observamos que se uma função f for dada num intervalo $[0, L]$ ela pode ser representada por mais de uma série de Fourier. De fato, estendendo f ao intervalo $[-L, L]$ como uma função ímpar e depois estendendo a reta toda como uma função periódica de período $2L$, teremos que f será representada por uma série em senos. Fazendo o mesmo, mas estendendo em $[-L, L]$ de forma par, f será representada como uma série em cossenos. Agora, estendendo f a toda reta de modo periódico, nem par, nem ímpar, então a série de Fourier de f será em senos e cossenos.

Teorema 2.1.4. (Desigualdade de Bessel) Seja $f(x)$ uma função definida em $[-L, L]$. Suponha que

$$\int_{-L}^L [f(x)]^2 dx$$

exista e seja finita. Assuma que os coeficientes de Fourier a_n e b_n existam e $SF[f(x)]$ é definida formalmente (não necessariamente converge). Então vale a desigualdade de Bessel

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L [f(x)]^2 dx$$

Teorema 2.1.5. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente contínua, periódica de período $2L$ e a sua série de Fourier seja

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

então a série de Fourier pode ser integrada termo a termo e

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_a^b \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_a^b \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right)$$

Teorema 2.1.6. (Teste M de Weirstrass) Seja

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{2.23}$$

um série de funções $u_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida em um subconjunto $I \in \mathbb{R}$. Suponha que existam constantes $M_n \geq 0$ tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

convirja e $|u_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in I$. Então, a série de funções (2.23) converge uniformemente em I .

Vamos calcular o módulo de $f(x)$

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right) \right| \\
&\leq \left| \frac{a_0}{2} \right| + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right) \right| \\
&\leq \left| \frac{a_0}{2} \right| + \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right| + \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right| \\
&= \left| \frac{a_0}{2} \right| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \left| \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right| + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \left| \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right|
\end{aligned}$$

Como a_0 é uma constante, e

$$\left| \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right| \leq 1 \quad \left| \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right| \leq 1 \quad (2.24)$$

temos que

$$|f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| \quad (2.25)$$

Pelo lema de Riemann-Lebesgue sabemos que os termos a_n e b_n , tendem a zero quando n tende ao infinito. Porém isto não é suficiente para dizermos que a série converge, pois sabemos que a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

não converge, mesmo com o fato de que o termo $\frac{1}{n}$ tende a zero quando n tende ao infinito. Então devemos colocar algumas restrições sobre $f(x)$, afim de que a série de Fourier convirja para ela.

Vamos começar supondo que $f(x)$ seja integrável, absolutamente integrável e periódica de período $2L$. Então, nos valendo de (2.24), podemos estimar

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \left| \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right| = \int_{-L}^L |f(x)| \left| \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right| dx \\
&\leq \int_{-L}^L |f(x)| dx \quad (2.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|b_n| &= \left| \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right| = \int_{-L}^L |f(x)| \left| \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right| dx \\
&\leq \int_{-L}^L |f(x)| dx \quad (2.27)
\end{aligned}$$

Como $f(x)$ é integrável e absolutamente integrável, existe M tal que

$$\int_{-L}^L |f(x)| dx = M \quad (2.28)$$

logo

$$|a_n| \leq M \quad \text{e} \quad |b_n| \leq M \quad \forall n$$

Essa limitação não faz com que a série (2.25) convirja, pois uma série numérica constante não converge.

Vamos restringir mais a função $f(x)$, além das das restrições que já utilizamos, iremos supor ainda que a derivada $f'(x)$ seja integrável e absolutamente integrável. Integrando a_n e b_n por partes obtemos

$$\begin{aligned} La_n &= \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ La_n &= \left[f(x) \left(\frac{L}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \right] \Big|_{-L}^L - \int_{-L}^L f'(x) \left(\frac{L}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) dx \\ La_n &= \frac{L}{n\pi} \left[f(L) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi L}{L}\right) - f(-L) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi(-L)}{L}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ La_n &= \frac{L}{n\pi} [f(L)(0) - f(-L)(0)] - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ a_n &= -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \end{aligned} \quad (2.30)$$

Logo, nos valendo novamente de (2.24), temos

$$|a_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx$$

Como $f'(x)$ é integrável e absolutamente integrável

$$|a_n| \leq \frac{M}{n} \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.31)$$

Analogamente para b_n

$$\begin{aligned} Lb_n &= \frac{L}{n\pi} \left[f(L) \cos\left(\frac{n\pi L}{L}\right) - f(-L) \cos\left(\frac{n\pi(-L)}{L}\right) \right] + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ Lb_n &= \frac{L}{n\pi} [f(L)(1) - f(-L)(1)] + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

Como $f(x)$ é periódica de período $2L$, temos que $f(-L) = f(-L + 2L) = f(L)$, logo

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (2.32)$$

Do fato que $f'(x)$ é integrável e absolutamente integrável e (2.24) obtemos

$$|b_n| \leq \frac{M}{n} \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.33)$$

Isto ainda não garante a convergência, pois, como já vimos antes, a série harmônica não converge.

Agora vamos supor que a segunda derivada também é integrável a absulatente integrável. Integrando por partes (2.29)

$$\begin{aligned}
 a_n &= -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \\
 &= -\frac{1}{n\pi} \left\{ -\frac{L}{n\pi} \left[f'(L) \cos \left(\frac{n\pi L}{L} \right) - f'(-L) \cos \left(\frac{n\pi(-L)}{L} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f''(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right\} \\
 &= \frac{L}{n^2\pi^2} [f'(L)(1) - f'(-L)(1)] - \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L f''(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \\
 &= -\frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L f''(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx
 \end{aligned}$$

Como $f''(x)$ é integrável e absolutamente integrável

$$|a_n| = \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx \leq \frac{M}{n^2} \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

Analogamente para b_n

$$|b_n| = \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L |f''(x)| dx \leq \frac{M}{n^2} \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.35)$$

Sabemos que que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge. Então pelo Teste M de Weirstrass, a série de Fourier converge se $f(x)$ é periódica de período $2L$, com primeira e segunda derivadas integráveis e absolutamente intergráveis. Porém podemos mostrar que a série de Fourier converge com menos restrições em $f(x)$.

Teorema 2.1.7. Seja f uma função contínua e periódica de período $2L$, tal que a sua derivada é integrável e absolutamente integrável. Então a série de Fourier de f converge uniformemente para f .

Demonstração. Notemos que das relações (2.29) e (2.32) podemos concluir

$$\begin{aligned}
 a_n &= -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \\
 &= \frac{L}{L} \left(-\frac{1}{n\pi} \right) \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \\
 &= \left(-\frac{1}{n\pi} \frac{L}{1} \right) \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right] = -\frac{L}{n\pi} b'_n
 \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \\
 &= \frac{L}{L} \left(\frac{1}{n\pi} \right) \int_{-L}^L f'(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \\
 &= \left(\frac{1}{n\pi} \frac{L}{1} \right) \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right] = \frac{L}{n\pi} a'_n
 \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde a'_n e b'_n são os coeficientes da série de Fourier de $f'(x)$. De (2.25), (2.37) e (2.36) temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (|a_j| + |b_j|) &= \sum_{j=1}^n \left(\left| \frac{L}{j\pi} a'_j \right| + \left| -\frac{L}{j\pi} b'_j \right| \right) = \sum_{j=1}^n \left(\left| \frac{L}{\pi} \right| \left| \frac{a'_j}{j} \right| + \left| -\frac{L}{\pi} \right| \left| \frac{b'_j}{j} \right| \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{L}{\pi} \left(\left| \frac{1}{j} \right| |a'_j| + \left| \frac{1}{j} \right| |b'_j| \right) = \frac{L}{\pi} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} (|a'_j| + |b'_j|) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Agora vamos utilizar a desigualdade de Cauchy-Schwarz para vetores do \mathbb{R}^n , que está definida a seguir

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.39)$$

Aplicando (2.39) em (2.38)

$$\begin{aligned} \frac{L}{\pi} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} (|a'_j| + |b'_j|) &= \frac{L}{\pi} \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=1}^n (|a'_j| + |b'_j|)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{L}{\pi} \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=1}^n (|a'_j| + |b'_j|)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Usando em (2.40) a desigualdade $(|a| + |b|)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, que é a desigualdade de Cauchy-Schwarz em \mathbb{R}^2 , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{L}{\pi} \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=1}^n (|a'_j| + |b'_j|)^2 \right]^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{L}{\pi} \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=1}^n 2 (|a'_j|^2 + |b'_j|^2) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{L}{\pi} \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \left[\sum_{j=1}^n (|a'_j|^2 + |b'_j|^2) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{L\sqrt{2}}{\pi} \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=1}^n (|a'_j|^2 + |b'_j|^2) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Notemos que

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2}$$

converge, e

$$\sum_{j=1}^n (|a'_j|^2 + |b'_j|^2)$$

converge em virtude da Desigualdade de Bessel, logo a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

é majorada por

$$\frac{L\sqrt{2}}{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (|a'_n|^2 + |b'_n|^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Isso implica na demonstração do teorema. □

Teorema 2.1.8. Seja f uma função seccionalmente contínua e periódica de período $2L$, tal que a sua derivada é integrável e absolutamente integrável. Então a série de Fourier de f converge uniformemente para f em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de f .

Teorema 2.1.9. (Igualdade de Parseval) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a série de Fourier de f convirja uniformemente em $[-L, L]$, então

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L [f(x)]^2 dx$$

Onde a_0 , a_n e b_n são os coeficientes de Fourier.

Demonstração. Se a série de Fourier de $f(x)$ existe, então:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L [f(x)]^2 dx &= \int_{-L}^L \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]^2 dx \\ &= \int_{-L}^L \left[\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_0}{2}\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \right. \\ &\quad + \left(\frac{a_0}{2}\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \\ &\quad \left. + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)^2 \right] dx \\ &= \int_{-L}^L \left[\frac{a_0^2}{4} + \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right. \\ &\quad + \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &\quad + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)^2 \\ &\quad + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \\ &\quad \left. + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^L [f(x)]^2 dx &= \int_{-L}^L \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[\frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_0}{2} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \right] dx \\
&= \int_{-L}^L \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) [f(x)] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) [f(x)] + \frac{a_0}{2} [f(x)] \right] dx \\
&= \int_{-L}^L \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\
&\quad + \int_{-L}^L \sum_{n=1}^{\infty} b_n f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} f(x) dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L f(x) dx
\end{aligned}$$

Note que:

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = La_n \quad \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = Lb_n$$

$$\int_{-L}^L f(x) = La_0$$

Com isso temos

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^L [f(x)]^2 dx &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n [La_n] + \sum_{n=1}^{\infty} b_n [Lb_n] + \frac{a_0}{2} [La_0] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} L(a_n)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} L(b_n)^2 + L \frac{(a_0)^2}{2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} L(a_n^2 + b_n^2) + L \frac{1}{2} a_0^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{L} \int_{-L}^L [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)
\end{aligned}$$

□

2.2 Transformada de Fourier

Nesta seção, definiremos a transformada de Fourier e algumas de suas propriedades, utilizaremos o livro (IÓRIO, 2005).

Definição 2.2.1. Seja $f(x)$ uma função integrável real ou complexa, tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

A transformada da Fourier de $f(x)$, denotada $\hat{f}(\xi)$, é dada por:

$$\mathcal{F}[f(x)] = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx$$

Proposição 2.2.1. Sejam duas funções $f(x)$ e $g(x)$, tais que existam as suas transformadas de Fourier $\hat{f}(\xi)$ e $\hat{g}(\xi)$, respectivamente. Dados α e β constantes reais ou complexas, temos que:

$$\mathcal{F}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \mathcal{F}[f(x)] + \beta \mathcal{F}[g(x)] = \alpha \hat{f}(\xi) + \beta \hat{g}(\xi)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\alpha f(x) + \beta g(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)] e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(x)e^{-i\xi x} + \beta g(x)e^{-i\xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(x)e^{-i\xi x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \beta g(x)e^{-i\xi x} dx = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx \\ &\quad + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\xi x} dx \\ &= \alpha \mathcal{F}[f(x)] + \beta \mathcal{F}[g(x)] = \alpha \hat{f}(\xi) + \beta \hat{g}(\xi) \end{aligned}$$

□

Proposição 2.2.2. Seja $f(x)$ uma função diferenciável tal que a sua transformada de Fourier exista e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, então:

$$\mathcal{F}[f'(x)] = i\xi \hat{f}(\xi)$$

Demonstração.

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\xi x} dx$$

Utilizando a integração por partes, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f'(x)] &= \left[e^{-i\xi x} f(x) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i\xi)e^{-i\xi x} dx \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[e^{-i\xi x} f(x) \right] - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[e^{-i\xi x} f(x) \right] - (-i\xi) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{e^{i\xi x}} \right] - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{f(x)}{e^{i\xi x}} \right] + i\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx \end{aligned}$$

Como $|e^{-i\xi x}| \leq c \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ segue $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{f(x)}{e^{i\xi x}} \right] = 0$. Logo,

$$\mathcal{F}[f'(x)] = i\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx = i\xi \mathcal{F}[f(x)] = i\xi \hat{f}(\xi)$$

□

Observação 2.2.1. Para calcularmos a transformada de Fourier de derivadas de ordem $f^{(n)}(x)$, apenas repetimos o processo, porém todas as derivadas de ordem menor que n e a função $f(x)$ devem tender a zero quando x tende para $\pm\infty$.

De maneira geral, escrevemos esta proposição da seguinte maneira: seja $f(x)$ uma função n -vezes diferenciável. Se para cada $N \in \mathbb{N}$, tal que $N < n$, temos que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f^{(N)}(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, então:

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (i\xi)^n \hat{f}(\xi)$$

Proposição 2.2.3. Seja $f(x)$ uma função tal que a sua transformada de Fourier exista, e a uma constante, então:

$$\mathcal{F}[e^{ax} f(x)] = \hat{f}(\xi + ai)$$

Demonstração.

$$\mathcal{F}[e^{ax} f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax} f(x) e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x + ax} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{x(-i\xi + a)} dx$$

Note que $x(-i\xi + a) = x(\xi + ai)(-i)$, logo:

$$\mathcal{F}[e^{ax} f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{x(\xi + ai)(-i)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(\xi + ai)x} dx$$

ξ e ai são constantes em relação a x , logo podemos fazer $K = \xi + ai$, com isso obtemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(K)x} dx = \hat{f}(K) = \hat{f}(\xi + ai)$$

pois $K = \xi + ai$. □

Proposição 2.2.4. Sejam $f(x)$ uma função tal que a sua transformada de Fourier exista, e a uma constante, então:

$$\mathcal{F}[f(x - a)] = e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi)$$

Demonstração.

$$\mathcal{F}[f(x - a)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - a) e^{-i\xi x} dx$$

Façamos $s = x - a \Rightarrow x = s + a$ e $ds = dx$ com isso temos:

$$\mathcal{F}[f(x - a)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\xi(s+a)} ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\xi s - i\xi a} ds$$

$$\mathcal{F}[f(x - a)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\xi s} e^{-i\xi a} ds = e^{-i\xi a} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\xi s} ds$$

$$\mathcal{F}[f(x - a)] = e^{-i\xi a} \mathcal{F}[f(s)] = e^{-i\xi a} \hat{f}(\xi)$$

□

Proposição 2.2.5. Seja uma função $f(x)$ uma função integrável, tal que a sua transformada de Fourier exista e $\hat{f}(0) = 0$, então:

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^x f(r) dr \right] = \frac{1}{i\xi} \hat{f}(\xi)$$

Demonstração. Vamos definir a seguinte função:

$$g(x) = \int_{-\infty}^x f(r) dr$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que:

$$g'(x) = f(x) \tag{2.42}$$

Aplicando a Transformada de Fourier em ambos os lados da equação (2.42) obtemos:

$$\mathcal{F} [g'(x)] = \mathcal{F} [f(x)]$$

Se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$, podemos usar a propriedade 2.2.2. Note que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x f(r) dr = \int_{-\infty}^{\infty} f(r) dr = \int_{-\infty}^{\infty} f(r) e^{i(0)r} dr \\ &= \hat{f}(0) = 0 \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^x f(r) dr = \int_{-\infty}^{-\infty} f(r) dr = 0$$

Aplicando a propriedade 2.2.2, obtemos:

$$\mathcal{F} [g'(x)] = i\xi \mathcal{F} [g(x)]$$

Note que:

$$g(x) = \int_{-\infty}^x f(r) dr \quad \text{e} \quad g'(x) = f(x)$$

Com isso temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [f(x)] &= i\xi \mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^x f(r) dr \right] \Leftrightarrow \frac{1}{i\xi} \mathcal{F} [f(x)] = \mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^x f(r) dr \right] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^x f(r) dr \right] = \frac{1}{i\xi} \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

□

Definição 2.2.2. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções integráveis cujo produto também é integrável, denotamos $f * g$ a convolução de f e g , que é definida por:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r)g(x-r)dr$$

Proposição 2.2.6. Sejam duas funções $f(x)$ e $g(x)$, tais que as suas transformadas de Fourier existam, então valem:

$$\mathcal{F} [(f * g)(x)] = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) \quad (2.43)$$

$$(\hat{f} * \hat{g})(\xi) = 2\pi(F) [f(x)g(x)] \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}^{-1} [(\hat{f} * \hat{g})(\xi)] = 2\pi f(x)g(x) \quad (2.44)$$

Demonstração. Para (2.43) temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [(f * g)(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(r)g(x-r)dr \right] e^{-i\xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(r)g(x-r)e^{-i\xi x} dr dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(r)g(x-r)e^{-i\xi x} dx dr \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(r) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x-r)e^{-i\xi x} dx \right] dr = \int_{-\infty}^{\infty} f(r) \left[e^{-i\xi r} \hat{g}(\xi) \right] dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [(f * g)(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(r)e^{-i\xi r} \hat{g}(\xi) dr = \hat{g}(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} f(r)e^{-i\xi r} dr \\ &= \hat{g}(\xi) (\hat{f}(\xi)) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) \end{aligned}$$

Para (2.44) temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} [(\hat{f} * \hat{g})(\xi)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{f} * \hat{g})(\xi)e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v)\hat{g}(\xi-v)dv \right] e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v)\hat{g}(\xi-v)e^{i\xi x} dv d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v)\hat{g}(\xi-v)e^{i\xi x} d\xi dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi-v)e^{i\xi x} d\xi \right] dv \end{aligned}$$

Fazendo $u = \xi - v$ temos $\xi = u + v$ e $du = d\xi$ obtemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{-1}[(\hat{f} * \hat{g})(\xi)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(u) e^{i(u+v)x} du \right] dv \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(u) e^{iux} e^{ivx} du \right] dv \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) e^{ivx} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(u) e^{iux} du \right] dv \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) e^{ivx} g(x) dv \\
 &= g(x) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) e^{ivx} dv = g(x) \frac{2\pi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) e^{ivx} dv \\
 &= g(x) (2\pi) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(v) e^{ivx} dv = 2\pi g(x) f(x) = 2\pi f(x) g(x)
 \end{aligned}$$

□

Definição 2.2.3. Seja $\hat{f}(\xi)$ uma função real ou complexa. A transformada inversa de Fourier é definida como:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\xi)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

Teorema 2.2.1. (Igualdade de Parseval) Sejam $f(x)$, $\hat{f}(\xi)$ e $g(x)$ absolutamente integráveis em $(-\infty, \infty)$, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)| dx < \infty \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty.$$

Se $f(x)$ é C^1 por partes em $(-\infty, \infty)$, então:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi$$

3 Equação do Calor

Neste capítulo deduziremos a equação do calor homogênea e encontraremos a sua solução. Utilizaremos os livros (BLEECKER, 1995) e (BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 2001).

3.1 Dedução da Equação do Calor Homogênea dada pela Lei de Fourier

Nesta seção será deduzida a equação do calor homogênea. Usaremos como base a dedução que está no livro (BLEECKER, 1995).

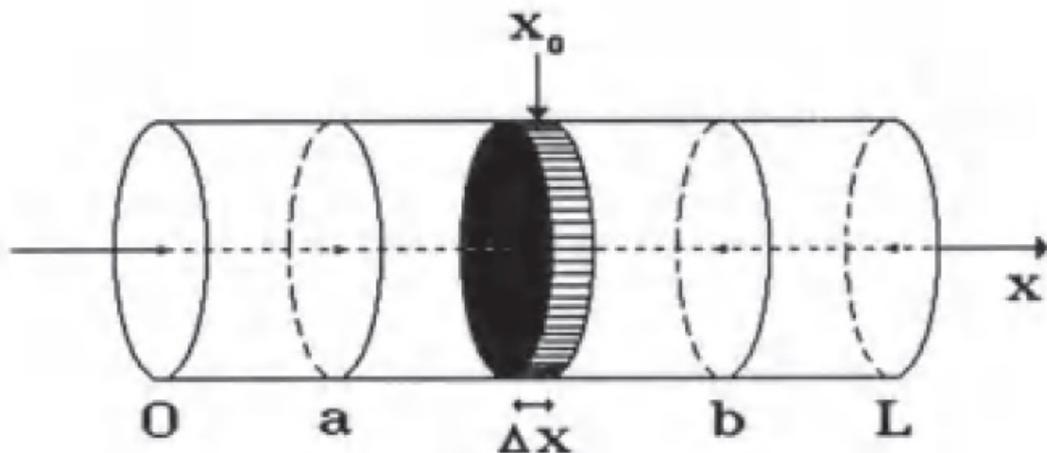


Figura 1 – Barra de comprimento L . Fonte: Página 122, (BLEECKER, 1995)

Bleecker diz que o fluxo de calor só ocorre ao longo da barra na direção do eixo x , onde está colocada esta barra (Figura 1). Nesse caso, dizemos que o fluxo de calor é unidimensional.

Suponhamos uma barra homogênea feita de um material condutor de calor de comprimento L , calor específico C (quantidade de calor necessária para elevar um grau uma unidade de massa) e densidade D . A área da seção transversal A deste cilindro, é uniforme e muito pequena em relação ao seu comprimento, de maneira que a temperatura é constante em A e será representada por $u(x, t)$, isto é, a função $u(x, t)$ representa a temperatura na barra na seção transversal x no instante de tempo t . Suponhamos também que este cilindro não troca calor com o ambiente, exceto em suas extremidades.

Suponhamos agora uma placa com comprimento pequeno Δx entrada em algum $x = x_0$. Pela Equação Fundamental de Calorimetria (1.1.1), sabemos que a energia para

aquecer uma placa até uma determinada temperatura é $Q = Cm\Delta T$. Queremos aquecer a placa de 0 até $u(x_0, t)$, então temos que $\Delta T = u(x_0, t) - 0 = u(x_0, t)$. Como $m = DA\Delta x$, então temos que

$$Q = C(DA\Delta x)u(x_0, t)$$

Agora vamos tomar um intervalo qualquer $[a, b]$ tal que $0 < a < b < L$. Fazendo Δx tender a zero e somando a energia de todas as placas entre a e b , ou seja:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [CDA\Delta x (u(x_1, t) + u(x_2, t) + \dots + u(x_n, t))] = CDA \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n u(x_i, t) \Delta x \right]$$

em que $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$

Como Δx tende a zero, temos uma soma de Riemman, logo:

$$CDA \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n u(x_i, t) \Delta x \right] = CDA \int_a^b u(x, t) dx = E(t) \quad (3.1)$$

onde $E(t)$ representa a energia térmica no instante t .

Pela Lei de Fourier (1.1.2) temos que a taxa que a energia térmica passa por uma seção transversal é $-KAu_x(x, t)$. Como assumimos que a barra é isolada, a única maneira em que o calor pode entrar no intervalo $[a, b]$ é através das seções transversais $x = a$ e $x = b$. Portanto, a taxa com que a energia entra no intervalo será a taxa com a qual a energia entra em $x = a$ menos a taxa com a qual a energia sai em $x = b$. Então temos que:

$$E'(t) = -KAu_x(a, t) - (-KAu_x(b, t)) = KA u_x(b, t) - KA u_x(a, t) = [KA u_x(x, t)]_a^b$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que:

$$E'(t) = [KA u_x(x, t)]_a^b = \int_a^b \frac{d}{dx} [KA u_x(x, t)] dx = \int_a^b KA u_{xx}(x, t) dx \quad (3.2)$$

Podemos calcular $E'(t)$ diretamente em (3.1)

$$E'(t) = \frac{d}{dt} \left[\int_a^b CDA u(x, t) dx \right]$$

Como a função $u(x, t)$ é contínua em $[a, b]$, pela Regra de Leibniz 1.2.3 temos que:

$$E'(t) = \frac{d}{dt} \left[\int_a^b CDA u(x, t) dx \right] = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} [CDA u(x, t)] dx = \int_a^b CDA u_t(x, t) dx \quad (3.3)$$

De (3.2) e (3.3) obtemos a seguinte igualdade:

$$\int_a^b CDA u_t(x, t) dx = \int_a^b KA u_{xx}(x, t) dx$$

Dividindo ambos os lados por CDA , obtemos que

$$\int_a^b u_t(x, t) dx = \int_a^b \frac{KA}{CDA} u_{xx}(x, t) dx = \int_a^b \frac{K}{CD} u_{xx}(x, t) dx = \int_a^b k u_{xx}(x, t) dx$$

onde $k = \frac{K}{CD}$:

Com isso obtemos

$$\int_a^b (u_t(x, t) - k u_{xx}(x, t)) dx = 0 \quad \forall [a, b] \subset [0, L] \quad \text{e} \quad \forall t > 0 \quad (3.4)$$

Como k é uma constante, e supomos u uma função tal que a integrando em (3.4) é contínua, segue que

$$u_t(x, t) - k u_{xx}(x, t) = 0 \quad \forall x \in [0, L] \quad \text{e} \quad \forall t > 0 \quad (3.5)$$

A equação (3.5) é chamada Equação Unidimensional do Calor dada pela Lei de Fourier. A constante k é calculada experimentalmente e depende do material, sabe-se que

Material	k (cm^2/s)
Prata	1,71
Cobre	1,14
Alumínio	0,86
Ferro Fundido	0,12
Granito	0,11
Argila	0,0038
Água	0,00144

Tabela 1 – Constante de Difusividade Térmica. Fonte: (REIS, 2014)

3.2 Solução do Problema Homogêneo

O modelo de Fourier da equação do calor homogênea é denotado por

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0 & x \in [0, L] & t \geq 0 \\ \text{Condições de Contorno} \\ \text{Condições Iniciais} \end{cases} \quad (3.6)$$

Para resolver esta equação, usaremos o Método de Separação de Variáveis. Esse método consiste em supomos que a solução do problema é da forma $u(x, t) = X(x)T(t)$. Substituindo a solução suposta na equação (3.6) obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [X(x)T(t)] - k \frac{\partial^2}{\partial x^2} [X(x)T(t)] &= 0, \text{ então} \\ X(x)T'(t) - kX''(x)T(t) &= 0 \end{aligned}$$

Separando as variáveis, obtemos que

$$\Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)k}$$

Como o lado esquerdo independe de t e o lado direito independe de x temos que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)k} = \alpha$$

com isso, temos as seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$X''(x) - \alpha X(x) = 0 \quad (3.7)$$

$$T'(t) = \alpha k T(t) \quad (3.8)$$

3.3 Caso 1: Condições de Contorno de Dirichlet

Suponha o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t(x, t) - k u_{xx}(x, t) = 0 & x \in (0, L) & t > 0 \\ u(0, t) = 0 & u(L, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) & x \in (0, L) \end{cases} \quad (3.9)$$

Supondo que a solução é da forma $u(x, t) = X(x)T(t)$, obtemos as duas equações diferenciais ordinárias em (3.7) e (3.8). Através das condições de contorno

$$u(0, t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \quad (3.10)$$

$$u(L, t) = 0 \Rightarrow X(L)T(t) = 0 \Rightarrow X(L) = 0 \quad (3.11)$$

Note que se $T(t)$ fosse igual a zero, isso implicaria na solução trivial, ou seja, $u(x, t) = 0$, pois $u(x, t) = X(x)T(t)$.

Agora iremos solucionar as EDOs, começando pela equação (3.7). Iremos resolver a equação para cada valor de α . Para $\alpha = 0$ temos:

$$X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = C_1 x + C_2$$

Para descobrir o valor de C_1 e C_2 , utilizaremos (3.10) e (3.11).

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_1(0) + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\begin{aligned} X(L) = 0 &\Rightarrow C_1(L) + C_2 = 0, \text{ porém } C_2 = 0, \text{ logo:} \\ &\Rightarrow C_1L + 0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \end{aligned}$$

Se C_1 e C_2 são nulos, isso implica que $X(x) = 0$, e isso resulta em $u(x, t) = 0$, porém a solução trivial não nos interessa. Se $\alpha > 0$ obteremos a seguinte equação:

$$X''(x) - \alpha X(x) = 0 \quad (3.12)$$

Para resolvermos esta equação iremos supor que a sua solução é da forma

$$X(x) = e^{\lambda x} \quad (3.13)$$

Agora, iremos substituir a solução (3.13) em (3.12)

$$\begin{aligned} X''(x) - \alpha X(x) = 0 &\Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} [e^{\lambda x}] - \alpha e^{\lambda x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} - \alpha e^{\lambda x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm \sqrt{\alpha} \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \sqrt{\alpha} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\sqrt{\alpha} \end{aligned}$$

Com isso temos duas soluções:

$$X_{\lambda_1}(x) = e^{\sqrt{\alpha}x} \quad (3.14)$$

$$X_{\lambda_2}(x) = e^{-\sqrt{\alpha}x} \quad (3.15)$$

Pelo Princípio da Superposição, de (3.14) e (3.15) obtemos que

$$X(x) = C_3 e^{\sqrt{\alpha}x} + C_4 e^{-\sqrt{\alpha}x}$$

Vamos usar novamente (3.10) e (3.11) para descobrir o valor das constantes.

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_3 e^{\sqrt{\alpha}(0)} + C_4 e^{-\sqrt{\alpha}(0)} = 0 \Rightarrow C_3 + C_4 = 0 \quad (3.16)$$

$$X(L) = 0 \Rightarrow C_3 e^{\sqrt{\alpha}L} + C_4 e^{-\sqrt{\alpha}L} = 0 \quad (3.17)$$

De (3.16) e (3.17) obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} C_3 + C_4 = 0 \\ C_3 e^{\sqrt{\alpha}L} + C_4 e^{-\sqrt{\alpha}L} = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Da primeira equação do sistema temos que $C_3 = -C_4$, substituindo este resultado na segunda equação obtemos:

$$\begin{aligned} -C_4 e^{\sqrt{\alpha}L} + C_4 e^{-\sqrt{\alpha}L} = 0 &\Leftrightarrow C_4 (e^{-\sqrt{\alpha}L} - e^{\sqrt{\alpha}L}) = 0 \\ &\Leftrightarrow C_4 = 0 \quad \text{ou} \quad e^{-\sqrt{\alpha}L} - e^{\sqrt{\alpha}L} = 0 \end{aligned}$$

Se C_4 for nulo, então C_3 será nulo também, e isso implicará em $X(x) = 0$ o que resultará na solução trivial. Vamos verificar se a outra alternativa é possível.

$$e^{-\sqrt{\alpha}L} - e^{\sqrt{\alpha}L} = 0 \Leftrightarrow e^{-\sqrt{\alpha}L} = e^{\sqrt{\alpha}L} \Leftrightarrow -\sqrt{\alpha}L = \sqrt{\alpha}L \Leftrightarrow -\sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha}$$

Isso só acontece somente se $\alpha = 0$, porém supomos que $\alpha > 0$, então, neste caso, também temos a solução trivial. Agora nos resta a última alternativa, se $\alpha < 0$, obtemos:

$$X''(x) - (-\alpha)X(x) = 0 \Leftrightarrow X''(x) + \alpha X(x) = 0 \quad (3.19)$$

Iremos utilizar o mesmo método que no caso anterior, vamos supor que a solução é da mesma forma que em (3.13). Com isso iremos obter a seguinte equação:

$$\lambda^2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -\alpha \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{-\alpha} \Rightarrow \lambda_1 = i\sqrt{\alpha} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -i\sqrt{\alpha}$$

Com isso temos as seguintes soluções:

$$X_{\lambda_1}(x) = e^{i\sqrt{\alpha}x} \quad X_{\lambda_2}(x) = e^{i(-\sqrt{\alpha}x)}$$

Utilizando a Fórmula de Euler, obtemos:

$$X_{\lambda_1}(x) = \cos(\sqrt{\alpha}x) + i\operatorname{sen}(\sqrt{\alpha}x) \quad X_{\lambda_2}(x) = \cos(-\sqrt{\alpha}x) + i\operatorname{sen}(-\sqrt{\alpha}x)$$

Notemos que $\cos(x)$ é uma função par e $\sen(x)$ é uma função ímpar, então podemos reescrever estas soluções como:

$$X_{\lambda_1}(x) = \cos(\sqrt{\alpha}x) + i\sen(\sqrt{\alpha}x) \quad (3.20)$$

$$X_{\lambda_2}(x) = \cos(\sqrt{\alpha}x) - i\sen(\sqrt{\alpha}x) \quad (3.21)$$

Queremos soluções reais, então temos que usar algum artifício para eliminar o termo complexo. Notemos que o conjunto solução é um espaço vetorial, então a soma (ou subtração) entre as soluções, ou ainda se multiplicarmos a solução por uma constante, elas continuarão sendo soluções. Usando desse fato, definiremos:

$$X_A(x) = \frac{X_{\lambda_1}(x) + X_{\lambda_2}(x)}{2} \quad X_B(x) = \frac{X_{\lambda_1}(x) - X_{\lambda_2}(x)}{2i} \quad (3.22)$$

Com isso obteremos:

$$\begin{aligned} X_A(x) &= \frac{\cos(\sqrt{\alpha}x) + i\sen(\sqrt{\alpha}x) + \cos(\sqrt{\alpha}x) - i\sen(\sqrt{\alpha}x)}{2} \\ &= \frac{2\cos(\sqrt{\alpha}x)}{2} = \cos(\sqrt{\alpha}x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_B(x) &= \frac{\cos(\sqrt{\alpha}x) + i\sen(\sqrt{\alpha}x) - \cos(\sqrt{\alpha}x) + i\sen(\sqrt{\alpha}x)}{2i} \\ &= \frac{2i\sen(\sqrt{\alpha}x)}{2i} = \sen(\sqrt{\alpha}x) \end{aligned}$$

Usando o Princípio da Superposição, obteremos a solução de (3.19):

$$X(x) = C_5\cos(\sqrt{\alpha}x) + C_6\sen(\sqrt{\alpha}x) \quad (3.23)$$

Agora utilizaremos as condições de contorno para determinar o valor das constantes:

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_5\cos(0) + C_6\sen(0) = 0 \Leftrightarrow C_5 + 0 = 0 \Leftrightarrow C_5 = 0$$

$$\begin{aligned} X(L) = 0 &\Rightarrow C_5\cos(\sqrt{\alpha}L) + C_6\sen(\sqrt{\alpha}L) = 0, \text{ porém } C_5 = 0, \text{ logo:} \\ &\Rightarrow 0 + C_6\sen(\sqrt{\alpha}L) = 0 \Leftrightarrow C_6\sen(\sqrt{\alpha}L) = 0 \\ &\Leftrightarrow C_6 = 0 \quad \text{ou} \quad \sen(\sqrt{\alpha}L) = 0 \end{aligned}$$

Se C_6 é nulo, então obteremos a solução trivial, por outro lado:

$$\text{sen}(\sqrt{\alpha}L) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha}L = n\pi \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} = \frac{n\pi}{L} \Leftrightarrow \alpha = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

Substituindo α e C_5 em (3.23):

$$X_n(x) = C_6 \text{sen} \left(\sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} x \right) = C_6 \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad (3.24)$$

Agora encontraremos a solução de (3.8) para $\alpha = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, note que supomos $\alpha < 0$ para resultar neste valor, logo:

$$T'(t) = -\alpha k T(t) \Rightarrow T'(t) = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 k T(t) \quad (3.25)$$

É fácil ver que a solução desta EDO é:

$$T_n(t) = C_7 e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \quad (3.26)$$

A solução do problema (3.9) é dada por $u(x, t) = X(x)T(t)$, substituindo (3.24) e (3.26) obtemos uma solução diferente para cada n .

$$u_n(x, t) = C_6 \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) C_7 e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \quad (3.27)$$

Aplicando o Princípio da Superposição obteremos:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \quad (3.28)$$

Nós agregamos as constantes que aparecem por causa do Princípio da Superposição e as constantes C_6 e C_7 em b_n . Agora só precisamos descobrir b_n , faremos isto utilizando a condição inicial.

Como $u(x, 0) = \phi(x)$

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 k(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad (3.29)$$

Da ortogonalidade da função seno 2.1.1 temos que

$$\int_0^L \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{L} \right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ \frac{L}{2}, & \text{se } n = m \end{cases} \quad (3.30)$$

Primeiramente iremos multiplicar ambos os lados da equação (3.29) por $\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$. Então, após isto, vamos integrar ambos os lados da equação em $[0, L]$.

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi(x) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^L \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &= b_n \left(\frac{L}{2}\right) \end{aligned}$$

O Teorema 2.1.5 nos permite integrar esta série termo a termo.

A integral vai resultar zero até n ser igual a m , neste caso a integral irá resultar $\frac{L}{2}$. Já que o único valor de m que não anulará o lado direito da equação é $m = n$, então poderemos trocar m por n no lado esquerdo da equação.

$$\int_0^L \phi(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = b_n \left(\frac{L}{2}\right) \Leftrightarrow b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (3.31)$$

A solução do problema (3.9) é

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}, \quad \text{onde} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (3.32)$$

3.4 Caso 2: Condições de Contorno de Neumann

Neste caso, as condições de contorno são sobre o fluxo de calor nas bordas da barra. Suponha o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0 & x \in (0, L) & t > 0 \\ u_x(0, t) = 0 & u_x(L, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in (0, L) \end{cases} \quad (3.33)$$

Supondo que a solução é da forma $u(x, t) = X(x)T(t)$, obtemos as duas EDOs em (3.7) e (3.8). Através das condições de contorno

$$u_x(0, t) = 0 \Rightarrow X'(0)T(t) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0 \quad (3.34)$$

$$u_x(L, t) = 0 \Rightarrow X'(L)T(t) = 0 \Rightarrow X'(L) = 0 \quad (3.35)$$

Como vimos anteriormente, se $T(t)$ fosse igual a zero, isso implicaria na solução trivial, ou seja, $u(x, t) = 0$, pois $u(x, t) = X(x)T(t)$.

Agora iremos solucionar as EDOs, começando pela (3.7). Para $\alpha = 0$ temos:

$$X''(x) = 0 \Rightarrow X'(x) = C_1 \Rightarrow X(x) = C_1x + C_2$$

Utilizando as condições de contorno obtemos:

$$X'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad X'(L) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

Com isso obtemos um solução constante, ou seja:

$$X(x) = C_2 \tag{3.36}$$

Para $\alpha > 0$ temos que:

$$X''(x) - \alpha X(x) = 0$$

Iremos resolver esta EDO da mesma maneira que resolvemos na seção anterior, supondo que a sua solução é da forma $X(x) = e^{\lambda x}$. Isso resultará em uma equação do segundo grau, na qual encontraremos os valores de λ . Esta EDO terá duas soluções, já vistas em (3.14) e (3.15), pelo Princípio da Superposição obtemos:

$$X(x) = C_3 e^{\sqrt{\alpha}x} + C_4 e^{-\sqrt{\alpha}x} \tag{3.37}$$

Agora, vamos derivar a equação (3.37), para podermos aplicar as condições de contorno.

$$X'(x) = C_3 \sqrt{\alpha} e^{\sqrt{\alpha}x} - C_4 \sqrt{\alpha} e^{-\sqrt{\alpha}x}$$

Aplicando as condições de contorno:

$$X'(0) = 0 \Rightarrow C_3 \sqrt{\alpha} - C_4 \sqrt{\alpha} = 0 \tag{3.38}$$

$$X'(L) = 0 \Rightarrow C_3 \sqrt{\alpha} e^{\sqrt{\alpha}L} - C_4 \sqrt{\alpha} e^{-\sqrt{\alpha}L} = 0 \tag{3.39}$$

De (3.38) e (3.39) obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} C_3 \sqrt{\alpha} - C_4 \sqrt{\alpha} = 0 \\ C_3 \sqrt{\alpha} e^{\sqrt{\alpha}L} - C_4 \sqrt{\alpha} e^{-\sqrt{\alpha}L} = 0 \end{cases} \tag{3.40}$$

Da equação (3.38) obtemos $C_3 = C_4$, substituindo isto na equação (3.39) obtemos:

$$\begin{aligned} C_4\sqrt{\alpha}e^{\sqrt{\alpha}L} - C_4\sqrt{\alpha}e^{-\sqrt{\alpha}L} = 0 &\Leftrightarrow C_4\left(\sqrt{\alpha}e^{\sqrt{\alpha}L} - \sqrt{\alpha}e^{-\sqrt{\alpha}L}\right) = 0 \\ &\Rightarrow C_4 = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{\alpha}e^{\sqrt{\alpha}L} - \sqrt{\alpha}e^{-\sqrt{\alpha}L} = 0 \end{aligned}$$

Se $C_4 = 0$, então obteremos a solução trivial, por outro lado:

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha}e^{\sqrt{\alpha}L} - \sqrt{\alpha}e^{-\sqrt{\alpha}L} = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{\alpha}e^{\sqrt{\alpha}L} = \sqrt{\alpha}e^{-\sqrt{\alpha}L} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\alpha} = -\sqrt{\alpha} \end{aligned}$$

Esta igualdade é verificada somente se $\alpha = 0$, porém supomos que $\alpha > 0$, logo $C_4 = 0$, o que implica a solução trivial. Faremos o mesmo procedimento para $\alpha < 0$, de onde obteremos as seguinte soluções:

$$X_{\lambda_1}(x) = e^{i\sqrt{\alpha}x} \quad X_{\lambda_2}(x) = e^{i(-\sqrt{\alpha}x)}$$

Utilizando a Fórmula de Euler, e o fato de que $\cos(x)$ é uma função par e $\sin(x)$ é uma função ímpar, podemos reescrever $X_{\lambda_1}(x)$ e $X_{\lambda_2}(x)$ como:

$$X_{\lambda_1}(x) = \cos(\sqrt{\alpha}x) + i\sin(\sqrt{\alpha}x) \quad (3.41)$$

$$X_{\lambda_2}(x) = \cos(\sqrt{\alpha}x) - i\sin(\sqrt{\alpha}x) \quad (3.42)$$

Como queremos soluções reais, utilizaremos o mesmo artifício utilizado na seção anterior, ou seja, iremos nos valer do fato de que o conjunto solução de uma EDO é um espaço vetorial. Utilizando a mesma fórmula utilizada em (3.22) e o Princípio da Superposição, obteremos a solução da EDO (3.8).

$$X(x) = C_5\cos(\sqrt{\alpha}x) + C_6\sin(\sqrt{\alpha}x) \quad (3.43)$$

Derivando (3.43), poderemos aplicar as condições de contorno.

$$X'(x) = C_6\sqrt{\alpha}\cos(\sqrt{\alpha}x) - C_5\sqrt{\alpha}\sin(\sqrt{\alpha}x) \quad (3.44)$$

Aplicando as condições de contorno em (3.44):

$$X'(0) = 0 \Rightarrow C_6\sqrt{\alpha} = 0 \Rightarrow C_6 = 0$$

$$\begin{aligned} X'(L) = 0 &\Rightarrow C_6\sqrt{\alpha}\cos(\sqrt{\alpha}L) - C_5\sqrt{\alpha}\sin(\sqrt{\alpha}L) \quad , \text{ porém } C_6 = 0 \quad \text{logo:} \\ &\Rightarrow -C_5\sqrt{\alpha}\sin(\sqrt{\alpha}L) = 0 \Rightarrow C_5 = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{\alpha}\sin(\sqrt{\alpha}L) = 0 \end{aligned}$$

Se $C_5 = 0$, então obteremos a solução nula, por outro lado:

$$\sqrt{\alpha}\sin(\sqrt{\alpha}L) = 0 \Leftrightarrow \sin(\sqrt{\alpha}L) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha}L = n\pi \Leftrightarrow \alpha = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

Substituindo C_4 e α em (3.43) obteremos:

$$X_n(x) = C_5 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.45)$$

Para a EDO (3.8), já sabemos que sua solução é da forma apresentada em (3.26)

$$T_n(t) = C_7 e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \quad (3.46)$$

A solução do problema (3.33) é dada por $u(x, t) = X(x)T(t)$, substituindo (3.45) e (3.46) obtemos uma solução diferente para cada n .

$$u_n(x, t) = C_5 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) C_7 e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \quad (3.47)$$

Aplicando o Princípio da Superposição obteremos:

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \quad (3.48)$$

Nos agregamos as constantes que aparecem por causa do Princípio da Superposição e as constantes C_5 e C_7 em a_n . Agora só precisamos descobrir a_n , faremos isto utilizando a condição inicial.

Como $u(x, 0) = \phi(x)$

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 k(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Da ortogonalidade da função cosseno 2.1.1 temos que

$$\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \end{cases} \quad (3.49)$$

Primeiramente iremos multiplicar ambos os lados da equação por $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$. Então, após isto, vamos integrar ambos os lados da equação em $[0, L]$.

$$\begin{aligned}
\int_0^L \phi(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\
&= a_n \left(\frac{L}{2}\right)
\end{aligned}$$

O Teorema 2.1.5 nos permite integrar esta série termo a termo.

A integral vai resultar zero até n ser igual a m , neste caso a integral irá resultar $\frac{L}{2}$. Já que o único valor de m que não anulará o lado direito da equação é $m = n$, então poderemos trocar m por n no lado esquerdo da equação.

$$\int_0^L \phi(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = a_n \left(\frac{L}{2}\right) \Leftrightarrow a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (3.50)$$

A solução do problema (3.33) é

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \quad (3.51)$$

$$\text{onde } a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad e \quad a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) dx$$

4 Equação do Calor Não Homogênea

4.1 Definindo a Equação do Calor não-homogênea

A equação do calor homogênea (3.6) não leva em conta que fatores internos ou externos possam interferir com a dinâmica do calor, ou seja, o calor apenas entra pelas extremidades e não há nada que altere o modo com que o calor se distribui. Nesta Seção definiremos a equação não-homogênea que leva em conta estes outros fatores, e abordaremos método de resolução.

A equação do calor não-homogênea dada por Fourier é definida como:

$$\begin{cases} u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) = f(x, t) & x \in (0, L) & t > 0 \\ \text{Condições de Contorno} \\ \text{Condições Iniciais} \end{cases} \quad (4.1)$$

O método de solução para este problema consiste em supormos que

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t)$$

onde $v(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$ e $w(x, t)$ satisfaz as condições de contorno, ou seja, para as condições de contorno de Dirichlet

$$\begin{cases} u(0, t) = a(t) \\ u(L, t) = b(t) \end{cases} \Rightarrow w(0, t) = a(t) \quad \text{e} \quad w(L, t) = b(t)$$

ou, para as condições de Neumann

$$\begin{cases} u_x(0, t) = a(t) \\ u_x(L, t) = b(t) \end{cases} \Rightarrow w_x(0, t) = a(t) \quad \text{e} \quad w_x(L, t) = b(t)$$

Ao substituir a $u(x, t)$ que supomos em (4.1) obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [w(x, t) + v(x, t)] - k \frac{\partial^2}{\partial x^2} [w(x, t) + v(x, t)] \\ &= v_t(x, t) - kv_{xx}(x, t) + w_t(x, t) - kw_{xx}(x, t) \\ &= v_t(x, t) - kv_{xx}(x, t) = f(x, t) - (w_t(x, t) - kw_{xx}(x, t)) \end{aligned}$$

Fazendo $h(x, t) = f(x, t) - (w_t(x, t) - kw_{xx}(x, t))$, obtemos o seguinte problema:

$$v_t(x, t) - kv_{xx}(x, t) = h(x, t)$$

Notemos que $v(x, t) = u(x, t) - w(x, t)$, então, como $w(x, t)$ satisfaz as condições de contorno de (4.1), obteremos um problema em $v(x, t)$, cujo suas condições de contorno serão homogêneas. Nós ainda não conseguimos resolver o problema em $v(x, t)$, então para encontramos a solução da equação iremos nos valer do fato que $v(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$, ou seja:

$$(u_1)_t(x, t) - k(u_1)_{xx}(x, t) + (u_2)_t(x, t) - k(u_2)_{xx}(x, t) = h(x, t)$$

Podemos dividir este problema em duas partes apenas supondo que $(u_1)_t(x, t) - k(u_1)_{xx}(x, t) = 0$, com isso obtemos as seguintes equações:

$$(u_1)_t(x, t) - k(u_1)_{xx}(x, t) = 0 \tag{4.2}$$

$$(u_2)_t(x, t) - k(u_2)_{xx}(x, t) = h(x, t) \tag{4.3}$$

A equação (4.2) sabemos como resolver, e a equação (4.3) iremos solucionar pelo Princípio de Duhamel 4.2.1. Faremos a condição inicial de (4.3) ser homogênea, e isso nos permitirá aplicar o Princípio de Duhamel.

A solução do problema (4.1) será dada por

$$u(x, t) = w(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

4.2 O Princípio de Duhamel

Lema 4.2.1. Sejam $f(t, s)$ e $f_t(t, s)$ funções contínuas, então

$$\frac{d}{dt} \left[\int_0^t f(t, s) ds \right] = f(t, t) + \int_0^t f_t(t, s) ds$$

Demonstração. Vamos definir uma função $H(t, y)$, tal que:

$$H(t, y) = \int_0^y f(t, s) ds$$

Notemos que

$$\frac{d}{dt}[H(t, t)] = \frac{d}{dt} \left[\int_0^t f(t, s) ds \right]$$

Pela Regra da Cadeia, tomando $y(t) = t$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[H(t, y(t))] &= \frac{d}{dt}[H(t, t)] \frac{d}{dt}[t] + \frac{d}{dy}[H(t, t)] \frac{d}{dt}[y(t)] \\ &= H_t(t, t) + H_y(t, t) \end{aligned}$$

Pela Regra de Leibniz temos

$$H_t(t, y) = \frac{d}{dt} \left[\int_0^y f(t, s) ds \right] = \int_0^y f_t(t, s) ds$$

Também temos $H_y(t, y) = f(t, y)$, pois estamos derivando em y , que é o limite superior da integral em f . Então como

$$H_t(t, y) = \frac{d}{dt} \left[\int_0^y f(t, s) ds \right] \quad \text{e} \quad H_y(t, t) = f(t, t)$$

temos que

$$\frac{d}{dt} \left[\int_0^t f(t, s) ds \right] = f(t, t) + \int_0^t f_t(t, s) ds$$

□

Teorema 4.2.1. (Princípio de Duhamel) Suponha $h(x, t)$ uma função C^2 para $0 \leq x \leq L$ e $t \geq 0$. Assuma que para cada $s \geq 0$, o problema

$$\begin{cases} v_t - kv_{xx} = 0 & x \in (0, L) & t > s \\ v(0, t) = 0 & v(L, t) = 0 & t > 0 \\ v(x, 0) = h(x, s) & x \in (0, L) \end{cases}$$

possui uma solução $v(x, t) \in C^2$, onde $v(x, t)$, $v_t(x, t)$ são contínuas em (x, t) e para $t = s$ também. Então a solução única do problema

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = h(x, t) & x \in (0, L) & t > 0 \\ u(0, t) = 0 & u(L, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & x \in (0, L) \end{cases}$$

é dada por

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t - s) ds$$

Demonstração. Notemos que, a função

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t) ds$$

satisfaz as condições iniciais, ou seja:

$$u(x, 0) = \int_0^0 v(x, 0) ds = 0.$$

A função $u(x, t)$ também satisfaz ambas as condições do contorno, ou seja:

$$u(0, t) = \int_0^t v(0, t) ds = \int_0^t 0 ds = 0$$

$$u(L, t) = \int_0^t v(L, t) ds = \int_0^t 0 ds = 0$$

lembrando que por hipótese $v(0, t) = 0$ e $v(L, t) = 0$.

Pelo Lema 4.2.1 sabemos que

$$u_t(x, t) = \frac{d}{dt} \left[\int_0^t v(x, t) ds \right] = v(x, t) + \int_0^t v_t(x, t) ds$$

Também sabemos, por hipótese que $v(x, s) = h(x, s)$ e $v_t - kv_{xx} = 0$, logo $v(x, t) = h(x, t)$ e $v_t(x, t) = kv_{xx}(x, t)$. Com isso temos que

$$u_t(x, t) = h(x, t) + \int_0^t kv_{xx}(x, t) ds = h(x, t) + \int_0^t k \frac{\partial^2}{\partial x^2} [v(x, t)] ds.$$

Utilizando a Regra de Leibniz (1.2.3), obtemos

$$u_t(x, t) = h(x, t) + k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\int_0^t v(x, t) ds \right],$$

porém

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t) ds,$$

logo

$$u_t(x, t) = h(x, t) + k \frac{\partial^2}{\partial x^2} [u(x, t)] \Rightarrow u_t(x, t) = h(x, t) + ku_{xx}(x, t)$$

$$\Rightarrow u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) = h(x, t)$$

□

4.3 Caso 1: Condições de Contorno de Dirichlet

Suponhamos uma barra de comprimento L , cuja temperatura nas extremidades é dada por $a(t)$ quando $x = 0$ e $b(t)$ quando $x = L$. Suponhamos também que no instante $t = 0$, a dinâmica do calor é dada pela função $\phi(x)$.

$$\begin{cases} u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) = f(x, t) & x \in (0, L) & t > 0 \\ u(0, t) = a(t) & u(L, t) = b(t) & t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) & x \in (0, L) \end{cases} \quad (4.4)$$

onde $a(t)$ e $b(t)$ são funções contínuas.

Vamos definir uma função

$$w(x, t) = \left[\frac{b(t) - a(t)}{L} \right] x + a(t) \quad (4.5)$$

Notemos que (4.5) satisfaz as condições de contorno.

$$\begin{aligned} w(0, t) &= \left[\frac{b(t) - a(t)}{L} \right] (0) + a(t) = a(t) = u(0, t) \\ w(L, t) &= \left[\frac{b(t) - a(t)}{L} \right] (L) + a(t) = b(t) - a(t) + a(t) = b(t) = u(L, t) \end{aligned}$$

Iremos utilizar o método visto em (4.1), então vamos supor que a solução é do problema é da forma $u(x, t) = w(x, t) + v(x, t)$, onde $v(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$. Substituindo $u(x, t)$ suposto em (4.4), obteremos um novo problema em v . Nos valendo do fato de que $v(x, t) = u(x, t) - w(x, t)$, temos que:

$$\begin{aligned} v(0, t) &= u(0, t) - w(0, t) = a(t) - a(t) = 0 \\ v(L, t) &= u(L, t) - w(L, t) = b(t) - b(t) = 0 \\ v(x, 0) &= u(x, 0) - w(x, 0) = g(x) \\ h(x, t) &= f(x, t) - (w_t(x, t) - kw_{xx}(x, t)) \end{aligned}$$

Isto resulta no seguinte problema:

$$\begin{cases} v_t(x, t) - kv_{xx}(x, t) = h(x, t) & x \in (0, L) & t > 0 \\ v(0, t) = 0 & v(L, t) = 0 & t > 0 \\ v(x, 0) = g(x) & x \in (0, L) \end{cases} \quad (4.6)$$

Sabendo que $v(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$, iremos dividir (4.6) em duas EDPs.

$$\begin{cases} (u_1)_t(x, t) - k(u_1)_{xx}(x, t) + (u_2)_t(x, t) - k(u_2)_{xx}(x, t) = h(x, t) & x \in (0, L) & t > 0 \\ v(0, t) = u_1(0, t) + u_2(0, t) = 0 & v(L, t) = u_1(L, t) + u_2(L, t) = 0 & t > 0 \\ v(x, 0) = u_1(x, 0) + u_2(x, 0) = g(x) & x \in (0, L) \end{cases}$$

Supondo:

$$\begin{aligned} (u_1)_t(x, t) + (u_1)_{xx}(x, t) = 0 &\Rightarrow (u_2)_t(x, t) + (u_2)_{xx}(x, t) = h(x, t) \\ u_1(0, t) = 0 &\Rightarrow u_2(0, t) = 0 \\ u_1(L, t) = 0 &\Rightarrow u_2(L, t) = 0 \\ u_1(x, 0) = g(x) &\Rightarrow u_2(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

obteremos os seguintes problemas:

$$\begin{cases} (u_1)_t(x, t) - k(u_1)_{xx}(x, t) = 0 & x \in (0, L) & t > 0 \\ u_1(0, t) = 0 & u_1(L, t) = 0 & t > 0 \\ u_1(x, 0) = g(x) & x \in (0, L) \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} (u_2)_t(x, t) - k(u_2)_{xx}(x, t) = h(x, t) & x \in (0, L) & t > 0 \\ u_2(0, t) = 0 & u_2(L, t) = 0 & t > 0 \\ u_2(x, 0) = 0 & x \in (0, L) \end{cases} \quad (4.8)$$

Como (4.7) é uma equação homogêneas, de acordo com o que foi feito no capítulo 3 segue que

$$(u_1)(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}, \quad \text{onde} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad (4.9)$$

Para a equação (4.8), utilizaremos o Princípio de Duhamel, ou seja, a solução será da forma

$$u_2(x, t) = \int_0^t z(x, t-s) ds$$

onde $z(x, t)$ é a solução do problema:

$$\begin{cases} z_t(x, t) - kz_{xx}(x, t) = 0 & x \in (0, L) & t > 0 \\ z(0, t) = 0 & z(L, t) = 0 & t > 0 \\ z(x, 0) = h(x, s) & x \in (0, L) \end{cases} \quad (4.10)$$

Utilizaremos novamente o método do capítulo 3 para resolver (4.10), então

$$z_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(s) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} d_n(s) = \frac{2}{L} \int_0^L h(x, s) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

onde

$$d_n(s) = \frac{2}{L} \int_0^L h(x, s) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

Com isso, temos que a solução de (4.8) é dada por

$$u_2(x, t) = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} d_n(s) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 k(t-s)} ds \quad (4.11)$$

A solução da equação (4.4) é dada por $u(x, t) = w(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t)$, então de (4.5), (4.9) e (4.11) temos que:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & w(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} + \\ & + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} d_n(s) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 k(t-s)} ds \end{aligned} \quad (4.12)$$

Onde:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad d_n(s) = \frac{2}{L} \int_0^L h(x, s) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

$$g(x) = u(x, 0) - w(x, 0) \quad h(x, t) = f(x, t) - (w_t(x, t) - kw_{xx}(x, t))$$

$$w(x, t) = \left[\frac{b(t) - a(t)}{L} \right] x + a(t)$$

4.4 Caso 2: Condições de Contorno de Neumann

Suponhamos uma barra de comprimento L , cujo fluxo de calor nas extremidades é dado por $a(t)$ quando $x = 0$ e $b(t)$ quando $x = L$. Suponhamos também que no instante $t = 0$, a dinâmica do calor é dada pela função $\phi(x)$.

$$\begin{cases} u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) = f(x, t) & x \in (0, L) & t > 0 \\ u_x(0, t) = a(t) & u_x(L, t) = b(t) & t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) & x \in (0, L) & \end{cases} \quad (4.13)$$

onde $a(t)$ e $b(t)$ são funções contínuas

Vamos definir uma função

$$w(x, t) = \left[\frac{b(t) - a(t)}{L} \right] \left(\frac{x^2}{2} \right) + a(t)x \quad (4.14)$$

Notemos que (4.14) satisfaz as condições de contorno.

$$\begin{aligned} w_x(0, t) &= \frac{d}{dx} \left[\left[\frac{b(t) - a(t)}{L} \right] \left(\frac{x^2}{2} \right) + a(t)x \right]_{x=0} = \left[\left[\frac{b(t) - a(t)}{L} \right] x + a(t) \right]_{x=0} \\ &= \left[\frac{b(t) - a(t)}{L} \right] (0) + a(t) = a(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_x(L, t) &= \frac{d}{dx} \left[\left[\frac{b(t) - a(t)}{L} \right] \left(\frac{x^2}{2} \right) + a(t)x \right]_{x=L} = \left[\left[\frac{b(t) - a(t)}{L} \right] x + a(t) \right]_{x=L} \\ &= \left[\frac{b(t) - a(t)}{L} \right] (L) + a(t) = b(t) - a(t) + a(t) = b(t) \end{aligned}$$

Iremos utilizar o método visto em na seção 4.1, então vamos supor que a solução é do problema é da forma $u(x, t) = w(x, t) + v(x, t)$, onde $v(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$. Substituindo $u(x, t)$ suposto em (4.13), obteremos um novo problema em v . Nos valendo do fato de que $v(x, t) = u(x, t) - w(x, t)$, temos que

$$\begin{aligned} v_x(0, t) &= u_x(0, t) - w_x(0, t) = a(t) - a(t) = 0 \\ v_x(L, t) &= u_x(L, t) - w_x(L, t) = b(t) - b(t) = 0 \\ v(x, 0) &= u(x, 0) - w(x, 0) = g(x) \\ h(x) &= f(x, t) - (w_t - kw_{xx}) \end{aligned}$$

Isto resulta no seguinte problema

$$\begin{cases} v_t(x, t) - kv_{xx}(x, t) = h(x, t) & x \in (0, L) & t > 0 \\ v_x(0, t) = 0 & v_x(L, t) = 0 & t > 0 \\ v(x, 0) = g(x) & x \in (0, L) \end{cases} \quad (4.15)$$

Sabendo que $v(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$, iremos dividir (4.15) em duas EDPs.

$$\begin{cases} (u_1)_t(x, t) - k(u_1)_{xx}(x, t) + (u_2)_t(x, t) - k(u_2)_{xx}(x, t) = h(x, t) & x \in (0, L) & t > 0 \\ v_x(0, t) = (u_1)_x(0, t) + (u_2)_x(0, t) = 0 & v_x(L, t) = (u_1)_x(L, t) + (u_2)_x(L, t) = 0 & t > 0 \\ v(x, 0) = u_1(x, 0) + u_2(x, 0) = g(x) & x \in (0, L) \end{cases}$$

Supondo:

$$\begin{aligned}(u_1)_t(x, t) + (u_1)_{xx}(x, t) &= 0 \Rightarrow (u_2)_t(x, t) + (u_2)_{xx}(x, t) = h(x, t) \\ (u_1)_x(0, t) &= 0 \Rightarrow (u_2)_x(0, t) = 0 \\ (u_1)_x(L, t) &= 0 \Rightarrow (u_2)_x(L, t) = 0 \\ u_1(x, 0) &= g(x) \Rightarrow u_2(x, 0) = 0\end{aligned}$$

obteremos os seguintes problemas:

$$\begin{cases} (u_1)_t(x, t) - k(u_1)_{xx}(x, t) = 0 & x \in (0, L) & t > 0 \\ (u_1)_x(0, t) = 0 & (u_1)_x(L, t) = 0 & t > 0 \\ u_1(x, 0) = g(x) & x \in (0, L) \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\begin{cases} (u_2)_t(x, t) - k(u_2)_{xx}(x, t) = h(x, t) & x \in (0, L) & t > 0 \\ (u_2)_x(0, t) = 0 & (u_2)_x(L, t) = 0 & t > 0 \\ u_2(x, 0) = 0 & x \in (0, L) \end{cases} \quad (4.17)$$

Como (4.16) é uma equação homogênea, de acordo com o que foi feito no capítulo 3 segue que

$$(u_1)_n(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} \quad (4.18)$$

$$\text{onde } a_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) dx$$

Para a equação (4.17), utilizaremos o Princípio de Duhamel, ou seja, a solução será da forma

$$u_2(x, t) = \int_0^t z(x, t-s) ds$$

onde $z(x, t)$ é a solução do problema:

$$\begin{cases} z_t(x, t) - kz_{xx}(x, t) = 0 & x \in (0, L) & t > 0 \\ z_x(0, t) = 0 & z_x(L, t) = 0 & t > 0 \\ z(x, 0) = h(x, s) & x \in (0, L) \end{cases} \quad (4.19)$$

Iremos resolver (4.19) pelo método do capítulo 3, logo

$$z_n(x, t) = c_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(s) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}$$

$$\text{onde } c_n(s) = \frac{2}{L} \int_0^L h(x, s) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad c_0(s) = \frac{2}{L} \int_0^L h(x, s) dx$$

Com isso, temos que a solução de (4.17) é dada por

$$u_2(x, t) = \int_0^t c_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(s) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 k(t-s)} ds \quad (4.20)$$

A solução da equação (4.13) é dada por $u(x, t) = w(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t)$, então de (4.14), (4.18) e (4.20) temos que:

$$\begin{aligned} u(x, t) = w(x, t) + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} & \\ + \int_0^t c_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(s) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 k(t-s)} ds & \end{aligned} \quad (4.21)$$

Onde:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad c_n(s) = \frac{2}{L} \int_0^L h(x, s) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) dx \quad c_0(s) = \frac{2}{L} \int_0^L h(x, s) dx$$

$$g(x) = u(x, 0) - w(x, 0) \quad h(x, t) = f(x, t) - (w_t(x, t) - kw_{xx}(x, t))$$

$$w(x, t) = \left[\frac{b(t) - a(t)}{L} \right] \left(\frac{x^2}{2} \right) + a(t)x$$

5 A Equação de Cattaneo

Neste capítulo abordaremos sobre o modelo hiperbólico da equação do calor e vamos mostrar a existência de solução clássica. Utilizaremos aqui (LENARCZY, 2019), (MARÍN, 2011), (SARE; RACKE, 2009), (LUPA, 2007).

O modelo de Cattaneo é definido a seguir

$$\begin{cases} u_t(x, t) + \alpha u_{tt}(x, t) - \beta u_{xx}(x, t) = 0 & x \in (0, L) \quad t > 0 \\ \text{Condições de Contorno} \\ \text{Condições Iniciais} \end{cases} \quad (5.1)$$

onde β é a constante de difusividade térmica, e α é o tempo de relaxamento, um parâmetro que leva em conta a velocidade finita de uma onda térmica.

Vamos supor que a solução de 5.1 é da forma $u(x, t) = X(x)T(t)$, substituindo esta solução em 5.1 obtemos:

$$\begin{aligned} X(x)T'(t) + \alpha X(x)T''(t) - \beta X''(x)T(t) = 0 &\Leftrightarrow \frac{T'(t)}{\beta T(t)} + \frac{\alpha T''(t)}{\beta T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \\ &\Leftrightarrow \frac{T'(t) + \alpha T''(t)}{\beta T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = K \end{aligned}$$

Com isso obtemos duas EDOs para resolver:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = K \Leftrightarrow X''(x) - KX(x) = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{T'(t) + \alpha T''(t)}{\beta T(t)} = K \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} T''(t) + \frac{1}{\beta} T'(t) - KT(t) = 0 \quad (5.3)$$

Analisaremos as EDOs para os possíveis valores de K , ou seja, para K positivo, negativo e nulo.

5.1 Caso 1: Condições de Contorno de Dirichlet

Suponhamos uma barra de comprimento L , cuja temperatura nas extremidades é igual a zero. No momento $t = 0$, a temperatura da barra é u_0 .

$$\begin{cases} u_t(x, t) + \alpha u_{tt}(x, t) - \beta u_{xx}(x, t) = 0 & x \in (0, L) & t > 0 \\ u(0, t) = 0 & u(L, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0 & u_t(x, 0) = 0 & x \in (0, L) \end{cases} \quad (5.4)$$

Notemos que a EDO (5.2) é igual a EDO (3.7), então sabemos que a solução de (5.2) é a mesma apresentada em (3.24), e que $K = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$. Note que só obtemos solução para o caso $K < 0$.

$$X_n(x) = C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (5.5)$$

Agora para solucionarmos 5.3, iremos supor que sua solução é da forma $T(t) = e^{\lambda t}$, como fizemos no capítulo 3.

$$\frac{\alpha}{\beta} \lambda^2 + \frac{1}{\beta} \lambda + K = 0, \text{ onde } K = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad (5.6)$$

Podemos resolver (5.6) utilizando a Fórmula de Bhaskara.

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-\frac{1}{\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 - 4\frac{\alpha}{\beta}K}}{2\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{-\frac{1}{\beta} \pm \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - 4\frac{\alpha}{\beta}K}}{2\frac{\alpha}{\beta}} \\ \lambda &= \frac{-\frac{1}{\beta} \pm \sqrt{\frac{1}{\beta^2} - 4\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}}{2\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{-\frac{1}{\beta} \pm \sqrt{\frac{L^2}{L^2}\left(\frac{1}{\beta^2}\right) - \frac{\beta}{\beta}\left(4\frac{\alpha}{\beta}\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)}}{2\frac{\alpha}{\beta}} \\ \lambda &= \frac{-\frac{1}{\beta} \pm \sqrt{\frac{L^2 - 4\alpha n^2 \pi^2 \beta}{\beta^2 L^2}}}{2\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{-\frac{1}{\beta} \pm \sqrt{\frac{1}{\beta^2 L^2} (L^2 - 4\alpha n^2 \pi^2 \beta)}}{2\frac{\alpha}{\beta}} \\ \lambda &= \frac{-\frac{1}{\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\beta L}\right)^2 (L^2 - 4\alpha n^2 \pi^2 \beta)}}{2\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{-\frac{1}{\beta} \pm \left(\frac{1}{\beta L}\right) \sqrt{L^2 - 4\alpha n^2 \pi^2 \beta}}{2\frac{\alpha}{\beta}} \\ \lambda &= \frac{\beta L \left(\frac{-\frac{1}{\beta} \pm \frac{1}{\beta L} \sqrt{L^2 - 4\alpha n^2 \pi^2 \beta}}{2\frac{\alpha}{\beta}} \right)}{\beta L} = \frac{-L \pm 1 \sqrt{L^2 - 4\alpha n^2 \pi^2 \beta}}{2\alpha L} \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \frac{-L + \sqrt{L^2 - 4\alpha n^2 \pi^2 \beta}}{2\alpha L} & \lambda_2 &= \frac{-L - \sqrt{L^2 - 4\alpha n^2 \pi^2 \beta}}{2\alpha L} \end{aligned}$$

Se $L^2 - 4\alpha n^2 \pi^2 \beta > 0$, temos que:

$$T_n(t) = C_2 e^{\lambda_1 t} + C_3 e^{\lambda_2 t} \quad (5.7)$$

Notemos que:

$$\lambda_1 = \frac{-L + \sqrt{L^2 - 4\alpha n^2 \pi^2 \beta}}{2\alpha L} = \frac{-1}{2\alpha} + \frac{\sqrt{L^2 - 4\alpha n^2 \pi^2 \beta}}{2\alpha L}$$

$$\lambda_2 = \frac{-L - \sqrt{L^2 - 4\alpha n^2 \pi^2 \beta}}{2\alpha L} = \frac{-1}{2\alpha} - \frac{\sqrt{L^2 - 4\alpha n^2 \pi^2 \beta}}{2\alpha L}$$

Como isso podemos reescrever $T_n(t)$ como:

$$T_n(t) = e^{\frac{-t}{2\alpha}} \left[C_2 e^{\left(\frac{\sqrt{L^2 - 4\alpha n^2 \pi^2 \beta}}{2\alpha L}\right)t} + C_3 e^{-\left(\frac{\sqrt{L^2 - 4\alpha n^2 \pi^2 \beta}}{2\alpha L}\right)t} \right] \quad (5.8)$$

De (5.5) e (5.8) obtemos:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{\frac{-t}{2\alpha}} \left[C_2 e^{\left(\frac{\sqrt{L^2 - 4\alpha n^2 \pi^2 \beta}}{2\alpha L}\right)t} + C_3 e^{-\left(\frac{\sqrt{L^2 - 4\alpha n^2 \pi^2 \beta}}{2\alpha L}\right)t} \right]$$

Pelo Princípio da Superposição, temos que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-t}{2\alpha}} \left[A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{\gamma_n t} + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\gamma_n t} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-t}{2\alpha}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) [A_n e^{\gamma_n t} + B_n e^{-\gamma_n t}] \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde

$$\gamma_n = \frac{\sqrt{L^2 - 4\alpha n^2 \pi^2 \beta}}{2\alpha L}$$

Das condições iniciais temos que

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} e^0 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) [A_n e^0 + B_n e^0] = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) [A_n + B_n] = u_0 \quad (5.10)$$

e

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} [u(x, t)] \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[\left(\frac{-1}{2\alpha} - \gamma_n\right) A_n + \left(\frac{-1}{2\alpha} + \gamma_n\right) B_n \right] = 0 \quad (5.11)$$

Para o intervalo $[-L, L]$, $u(x, 0)$ pode ser escrita como uma função definida por partes

$$\bar{u}(x, 0) = \begin{cases} 0, & x = -L \\ -u_0, & x = (-L, 0) \\ 0, & x = 0 \\ u_0, & x = (0, L) \\ 0, & x = L \end{cases} \quad (5.12)$$

Agora iremos isolar o termo $A_n + B_n$ em (5.10), utilizando o mesmo método que usamos no capítulo 3.

$$\begin{aligned} [A_n + B_n] \left(\frac{L}{2}\right) dx &= \int_0^L u_0 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2u_0}{L} \int_0^L \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2u_0}{n\pi} [1 - (-1)^n] \end{aligned} \quad (5.13)$$

Da equação (5.11) obtemos

$$\left(\frac{-1}{2\alpha} - \gamma_n\right) A_n + \left(\frac{-1}{2\alpha} + \gamma_n\right) B_n = 0 \quad (5.14)$$

De (5.13) e (5.14) obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} A_n + B_n = \frac{2u_0}{n\pi} [1 - (-1)^n] \\ \left(\frac{-1}{2\alpha} - \gamma_n\right) A_n + \left(\frac{-1}{2\alpha} + \gamma_n\right) B_n = 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

A solução do sistema (5.15) é

$$A_n = \frac{u_0}{n\pi} [1 - (-1)^n] \frac{-1 + 2\gamma_n\alpha}{2\gamma_n\alpha} \quad (5.16)$$

$$B_n = \frac{u_0}{n\pi} [1 - (-1)^n] \frac{1 + 2\gamma_n\alpha}{2\gamma_n\alpha} \quad (5.17)$$

Substituindo (5.16) e (5.17) em (5.9)

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-t}{2\alpha}} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \left[\frac{u_0}{n\pi} [1 - (-1)^n] \frac{-1 + 2\gamma_n \alpha}{2\gamma_n \alpha} e^{\gamma_n t} \right. \\
&\quad \left. + \frac{u_0}{n\pi} [1 - (-1)^n] \frac{1 + 2\gamma_n \alpha}{2\gamma_n \alpha} e^{-\gamma_n t} \right] \\
&= e^{\frac{-t}{2\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \left[\frac{u_0}{2\pi\alpha} \frac{[1 - (-1)^n]}{n} \frac{-1 + 2\gamma_n \alpha}{\gamma_n} e^{\gamma_n t} \right. \\
&\quad \left. + \frac{u_0}{2\alpha\pi} \frac{[1 - (-1)^n]}{n} \frac{1 + 2\gamma_n \alpha}{\gamma_n} e^{-\gamma_n t} \right] \\
&= e^{\frac{-t}{2\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \left[\frac{u_0}{2\pi\alpha} \frac{[1 - (-1)^n]}{n} \left(\frac{-1 + 2\gamma_n \alpha}{\gamma_n} e^{\gamma_n t} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1 + 2\gamma_n \alpha}{\gamma_n} e^{-\gamma_n t} \right) \right] \\
u(x, t) &= e^{\frac{-t}{2\alpha}} \frac{u_0}{2\pi\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n] \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right)}{n} \left(\frac{-1 + 2\gamma_n \alpha}{\gamma_n} e^{\gamma_n t} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1 + 2\gamma_n \alpha}{\gamma_n} e^{-\gamma_n t} \right) \tag{5.18}
\end{aligned}$$

5.2 Caso 2

$$\begin{cases} u_t(x, t) + \alpha u_{tt}(x, t) - \beta u_{xx}(x, t) = 0 & x \in (0, L) & t > 0 \\ u_x(0, t) = 0 & u_x(L, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0 & u_t(x, 0) = 0 & x \in (0, L) \end{cases} \tag{5.19}$$

Note que a EDO (5.2) é igual a EDO (3.7), então sabemos que a solução de (5.2) é a mesma apresentada em (3.45), e que $K = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$.

$$X_n(x) = C_1 \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \tag{5.20}$$

Agora para solucionarmos (5.3), iremos supor que sua solução é da forma $T(t) = e^{\lambda t}$, como fizemos no caso anterior. Já resolvemos está EDO no caso anterior, sua solução é dada por:

$$T_n(t) = e^{\frac{-t}{2\alpha}} [C_2 e^{\gamma_n t} + C_3 e^{-\gamma_n t}] \tag{5.21}$$

onde

$$\gamma_n = \frac{\sqrt{L^2 - 4\alpha n^2 \pi^2 \beta}}{2\alpha L}$$

onde $L^2 - 4\alpha n^2 \pi^2 \beta > 0$.

De (5.20) e (5.21) obtemos:

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = C_1 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{\frac{-t}{2\alpha}} [C_2 e^{\gamma n t} + C_3 e^{-\gamma n t}]$$

Pelo Princípio da Superposição, temos que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-t}{2\alpha}} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{\gamma n t} + B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\gamma n t} \right]$$

Aplicando as condições iniciais obtemos

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) [A_n + B_n] = u_0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

e

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} [u(x, t)] \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[\left(\frac{-1}{2\alpha} - \gamma_n\right) A_n + \left(\frac{-1}{2\alpha} + \gamma_n\right) B_n \right] = 0 \quad (5.23)$$

Agora iremos isolar o termo $A_n + B_n$ em (5.22), utilizando o mesmo método que usamos no capítulo 3.

$$\begin{aligned} [A_n + B_n] \left(\frac{L}{2}\right) dx &= \int_0^L u_0 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2u_0}{L} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2u_0}{n\pi} [\text{sen}(n\pi) - \text{sen}(0)] = 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Da equação (5.23) obtemos

$$\left(\frac{-1}{2\alpha} - \gamma_n\right) A_n + \left(\frac{-1}{2\alpha} + \gamma_n\right) B_n = 0 \quad (5.25)$$

De (5.24) e (5.25) obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} A_n + B_n = 0 \\ \left(\frac{-1}{2\alpha} - \gamma_n\right) A_n + \left(\frac{-1}{2\alpha} + \gamma_n\right) B_n = 0 \end{cases} \quad (5.26)$$

A solução deste sistema é $A_n = 0$ e $B_n = 0$, isso implica a solução trivial, ou seja $u(x, t) = 0$.

6 A Equação do Calor na Reta

Neste capítulo vamos estudar o problema de condução do calor em uma barra infinita (uma idealização para barras muito longas), ou seja, vamos considerar o seguinte problema

$$\begin{aligned} u &\in C^2(\mathbb{R} \times (0, \infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, \infty)) \\ u_t + u_{xx} &= 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Vamos supor que a função f seja limitada. Esta é uma condição de contorno no infinito e como temos $u(x, 0) = f(x)$ esperamos que a solução u também seja limitada. Nosso objetivo agora é construir o candidato a solução de (6.1) e provar que de fato este candidato é a solução e para tal usaremos ferramentas como a Transformada de Fourier (na reta) e o núcleo do calor.

Vamos aplicar o método de separação de variáveis em (6.1), ou seja, vamos supor que a solução é dada na forma $u(x, t) = T(t)\phi(x)$. Derivando em relação a variável t e duas vezes em relação a x , substituindo em (6.1), obtemos as seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \phi \in C^2(\mathbb{R}) \\ \phi'' + \lambda\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{6.2}$$

e

$$T' + \lambda T = 0, \quad t > 0, \tag{6.3}$$

onde λ é a constante de separação. Como sabemos da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias, a solução de (6.3) é dada por $T_\lambda(t) = ce^{-\lambda t}$ e a solução de (6.2) é dada por $\phi_\lambda(x) = A_\lambda e^{\sqrt{-\lambda}x} + B_\lambda e^{-\sqrt{-\lambda}x}$, onde c, A_λ, B_λ são constantes arbitrárias. Não temos condições de fronteira para impor sobre ϕ . Para atender que $u(x, t)$ seja limitada, é preciso que ϕ seja limitada e, então, λ deve ser real e não negativo. Escrevendo $\lambda = \delta^2$ com $\delta \geq 0$,

$$\phi_\delta(x) = A(\delta)e^{i\delta x} + B(\delta)e^{-i\delta x} \quad e \quad T_\delta(t) = ce^{-\delta^2 t}$$

onde $t \in [0, \infty)$ e $x \in \mathbb{R}$.

Observamos aqui a principal diferença em relação aos capítulos anteriores. Como $\lambda \in [0, \infty)$, temos uma coleção não enumerável de soluções de (6.1) da forma

$$u(x, t) = u_\delta(x, t) = [A(\delta)e^{i\delta x} + B(\delta)e^{-i\delta x}] e^{-\delta^2 t}$$

Assim, como as auto-funções ϕ_δ são indexadas por um índice contínuo é natural formar uma superposição na forma de uma integral, ou seja, a solução forma de (6.1) é dada na forma

$$u(x, t) = \int_0^\infty [A(\delta)e^{i\delta x} + B(\delta)e^{-i\delta x}] e^{-\delta^2 t} d\delta \quad (6.4)$$

Vamos fazer a mudança de variável $\eta = -\delta$ na parte que contém $e^{-i\delta x}$ da integral acima, obtemos que

$$\int_0^\infty B(\delta)e^{-i\delta x} \cdot e^{-\delta^2 t} d\delta = - \int_0^{-\infty} B(-\eta)e^{i\eta x} \cdot e^{-\eta^2 t} d\eta = \int_{-\infty}^0 B(-\delta)e^{i\delta x} \cdot e^{-\delta^2 t}(-1) d\delta$$

Vamos chamar

$$g(\delta) = \begin{cases} A(\delta) \cdot \sqrt{2\pi} & \text{se } \delta \geq 0 \\ B(-\delta) \cdot \sqrt{2\pi} & \text{se } \delta \leq 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

Substituímos (6.5) em (6.4) e obtemos que

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty g(\delta)e^{i\delta x} \cdot e^{-\delta^2 t} d\delta \quad (6.6)$$

Notamos que se g é limitada, então $u(x, t)$ na identidade acima, pelo menos para $t > 0$ está bem definida. Aliás, $u \in C^\infty(\Omega)$ onde $\Omega = (-\infty, +\infty) \times (0, \infty)$.

Ainda precisamos que $f(x) = u(x, 0)$. Então,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\delta) \cdot e^{i\delta x} d\delta \quad (6.7)$$

O objetivo é responder a seguinte pergunta: Dada f , existe função $g(\delta)$ tal que a igualdade em (6.7) seja válida? Caso sim, quem é e como podemos encontrar a função $g(\delta)$? A ideia é que g deve ser a projeção de f na direção de $e^{i\delta x}$, ou seja, a equação (6.7) pode ser interpretada como a expansão da função f em autofunções do operador diferencial $-\frac{d^2}{dx^2}$ com autovalores dados por δ^2 um vez que $\phi_\delta(x)$ satisfaz a identidade $-\phi_\delta''(x) = \delta^2 \phi_\delta(x)$.

Considerando f uma função em que podemos fazer o produto interno com $\phi_\delta(x)$,

pra cada δ fixo temos que

$$\begin{aligned}
(f, \phi_\delta)_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\phi_\delta(x)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\delta x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(y) e^{iyx} dy \right) e^{-i\delta x} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{iyx} dy \right) e^{-i\delta x} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left(\int_{-r}^r e^{ix(y-\delta)} dx \right) dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left[\frac{e^{ix(y-\delta)}}{i(y-\delta)} \right]_{x=-r}^{x=r} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left[\frac{e^{ir(y-\delta)} - e^{-ir(y-\delta)}}{i(y-\delta)} \right] dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \frac{2\text{sen}(r(y-\delta))}{y-\delta} dy
\end{aligned}$$

Fazemos a mudança de variável $z = r(y - \delta)$, substituindo na identidade acima

$$\begin{aligned}
(f, \phi_\delta)_{L^2(\mathbb{R})} &= \frac{1}{\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\delta + \frac{z}{r}\right) \frac{r \text{sen}(z)}{z} \frac{dz}{r} \\
&= \frac{1}{\pi} g(\delta) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(z)}{z} dz = \frac{1}{\pi} g(\delta) \pi = g(\delta)
\end{aligned}$$

onde usamos que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(z)}{z} dz = \pi$.

Resumindo, os coeficientes da expansão de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(\delta) e^{i\delta x} d\delta$$

por autofunções ϕ_δ são dados por

$$g(\delta) = (f, \phi_\delta)_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\delta x} dx \quad (6.8)$$

para cada $\delta \in \mathbb{R}$.

Lembramos que a função $g(\delta)$ obtida acima é a Transformada de Fourier de f , ou seja, $g(\delta) = \hat{f}(\delta) = \mathcal{F}(f)$ (2.2.3).

Podemos concluir que

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\delta) e^{i\delta x} \cdot e^{-\delta^2 t} dx$$

é a solução formal de (6.1) na barra infinita. Isto é, de (6.8), segue que

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\delta y} dy \right) e^{i\delta x} \cdot e^{-\delta^2 t} d\delta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\delta y} \cdot e^{i\delta x} \cdot e^{-\delta^2 t} d\delta \right) dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\delta(x-y)} \cdot e^{-\delta^2 t} d\delta \right) dy \quad (6.9)
\end{aligned}$$

Lema 6.0.1. São válidas as seguintes identidades:

$$(i) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\delta^2 t} d\delta = \sqrt{\frac{\pi}{t}}, \quad t > 0.$$

$$(ii) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\delta x} \cdot e^{-\delta^2 t} d\delta = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad t > 0 \text{ e } x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração Para provar (i), seja $I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\delta^2 t} d\delta$,

$$I(t)^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\delta^2 t} d\delta \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2 t} d\eta \right) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\delta^2 + \eta^2)t} d\eta d\delta$$

Usando coordenadas polares,

$$I(t)^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2 t} d\theta dr = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2 t} r dr = \frac{\pi}{t}$$

o que implica na igualdade da primeira parte do Lema.

Para mostrarmos a segunda parte, vamos derivar sob o sinal da integral (isso é possível se temos uma função $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 tal que $k(y) = \sup_x \left| \frac{\partial}{\partial x} h(y, x) \right|$ é integrável em \mathbb{R} e se $p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y, x) dy$, p é diferenciável e $p'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h(y, x)}{\partial x} dy$). Seja $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\delta x} \cdot e^{-\delta^2 t} d\delta$

$$\varphi'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} i\delta e^{i\delta x} \cdot e^{-\delta^2 t} d\delta = -\frac{i}{2t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\delta x} (-2\delta t) e^{-\delta^2 t} d\delta$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{-i}{2t} \left[e^{i\delta x} e^{-\delta^2 t} \right]_{\delta=-\infty}^{\delta=+\infty} + \frac{i}{2t} \int_{-\infty}^{+\infty} ix e^{i\delta x} \cdot e^{-\delta^2 t} d\delta \\ &= \frac{-i}{2t} \cdot (-ix) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\delta x} \cdot e^{-\delta^2 t} d\delta = \frac{-x}{2t} \varphi(x). \end{aligned}$$

Ou seja, pelo item (i) e a identidade acima, φ satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária

$$\begin{cases} \varphi'(x) + \frac{x}{2t} \varphi(x) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0. \\ \varphi(0) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \end{cases}$$

e resolvendo esta EDO com o fator integrante dado por $e^{-\frac{x^2}{4t}}$, ela tem solução única dada por $\varphi(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}$. \square

Devido ao Lema 6.0.1, a solução $u(x, t)$ em (6.4) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\sqrt{\frac{\pi}{t}} \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \right) dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \cdot K(x-y, t) dy \end{aligned} \quad (6.10)$$

onde $K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$, $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, é chamado de núcleo de Poisson para a equação do calor.

Por enquanto, a função $u(x, t)$ em (6.10) é uma candidata a solução do problema (6.1). Vamos mostrar que de fato esta função é solução do problema de condução do calor em barras muito longas. Antes disso, precisamos dos seguintes Lemas.

Lema 6.0.2. O núcleo do calor $K(\cdot, \cdot)$ satisfaz:

- (i) $K(x, t) > 0$ para $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$.
- (ii) $K \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ e

$$K_t = K_{xx}, \quad x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0. \quad (6.11)$$

- (iii) $\int_{-\infty}^{\infty} K(x - y, t) dy = 1$, $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$.

Demonstração Os itens (i) e (ii) e a identidade em (6.11) são imediatas. Para (iii),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right)^2} dx$$

Fazemos a mudança de variável $y = \frac{x}{\sqrt{4t}}$, então segue que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-y^2 \sqrt{4t}} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = 1$$

onde obtemos a última igualdade através do Lema 6.0.1. \square

Lema 6.0.3. Suponhamos que $f \in C(\mathbb{R})$ é limitada. Então, para $t > 0$,

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - y, t) f(y) dy \quad (6.12)$$

uniformemente em relação a x em subconjuntos compactos da reta.

Demonstração Pelo item (iii) do Lema 6.0.2, para $x \in \mathbb{R}$ fixo,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - y, t) f(y) dy - f(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - y, t) f(y) dy - f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - y, t) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - y, t) (f(y) - f(x)) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} (f(y) - f(x)) dy \end{aligned}$$

Seja $z = \frac{y-x}{\sqrt{4t}}$. Então, $y = x + z\sqrt{4t}$. Substituímos na igualdade acima,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-z^2} [f(x + z\sqrt{4t}) - f(x)] \sqrt{4t} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} [f(x + z\sqrt{4t}) - f(x)] dz \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \end{aligned}$$

onde, para $N > 0$,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^{+N} e^{-z^2} [f(x + z\sqrt{4t}) - f(x)] dz \\ I_2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-N} e^{-z^2} f(x + z\sqrt{4t}) dz \\ I_3 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_N^{+\infty} e^{-z^2} f(x + z\sqrt{4t}) dz \\ I_4 &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-N} e^{-z^2} f(x) dz - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_N^{+\infty} e^{-z^2} f(x) dz \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade triangular, obtemos que

$$|I| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| + |I_4| \quad (6.13)$$

Vamos estimar cada $|I_j|$, $j = 1 : 4$. Como f é limitada seja $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C, \forall x \in \mathbb{R}$. Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$, seja $N_o = N_o(\varepsilon)$ tal que

$$|I_2| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-N} e^{-z^2} |f(x + z\sqrt{4t})| dz \leq \frac{C}{\pi} \int_N^{+\infty} e^{-z^2} dz < \varepsilon, \forall N \geq N_o. \quad (6.14)$$

Agora, para $N \geq N_o$,

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^{+N} e^{-z^2} [f(x + z\sqrt{4t}) - f(x)] dz \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^{+N} e^{-z^2} |f(x + z\sqrt{4t}) - f(x)| dz \end{aligned} \quad (6.15)$$

Como $[-N, N]$ é um conjunto compacto da reta e f é contínua, segue que existe $\delta = \delta(N_o, \varepsilon)$ tal que

$$|f(x + z\sqrt{4t}) - f(x)| < \varepsilon, \forall z \in [-N, N] \text{ e } 0 < t < \delta. \quad (6.16)$$

Substituimos a desigualdade (6.16) em (6.15), obtemos que, se $0 < t < \delta$,

$$|I_1| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^N e^{-z^2} \varepsilon dz < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \varepsilon \quad (6.17)$$

Também para $N = N_o$,

$$|I_3| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_N^{+\infty} e^{-z^2} |f(x + z\sqrt{4t})| dz < \varepsilon \quad (6.18)$$

Ainda, para $N = N_o$,

$$|I_4| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-N} e^{-z^2} |f(x)| dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_N^{+\infty} e^{-z^2} |f(x)| dz < 2\varepsilon \quad (6.19)$$

Substituímos (6.14), (6.17), (6.18), (6.19) em (6.13) e temos que, se dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, se $0 < t < \delta$

$$|I| = \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy - f(x) \right| < \varepsilon,$$

isso diz que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $u(x, t) \rightarrow f(x)$ quando $t \rightarrow 0^+$. \square

Podemos enunciar o seguinte Teorema.

Teorema 6.0.1. Seja $f \in C(\mathbb{R})$ limitada. Então a função

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy, & \text{se } t > 0 \text{ e } x \in \mathbb{R} \\ f(x) & \text{se } t = 0 \text{ e } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

é tal que $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty)) \cap C(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ e u satisfaz a equação $u_t + u_{xx} = 0$ para $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$.

Observação 6.0.1. Considere o problema (6.1). Aplicando a transformada de Fourier 2.2.1 em x , ou seja, $u(x, t) \mapsto \hat{u}(\xi, t)$,

$$\begin{aligned} \hat{u}_t + \xi^2 \hat{u} &= 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ \hat{u}(\xi, 0) &= \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

Implica que a transformada de Fourier de u é dada por $\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-\xi^2 t}$. Para resgatar a função u , precisamos aplicar a transformada de Fourier Inversa 2.2.3

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\cdot) e^{-|\cdot|^2 t})(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-|\xi|^2 t} e^{ix \cdot \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i\xi y} dy \right) e^{-|\xi|^2 t} e^{ix \cdot \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi(x-y)} e^{-\xi^2 t} d\xi \right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) \left[\sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \right] dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy \end{aligned}$$

6.1 Equação do calor não homogênea na reta

Consideramos agora o seguinte problema de condução do calor não-homogêneo

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= q(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned} \tag{6.20}$$

A solução de (6.20) é dada por $u = v + w$ com v a solução do problema homogêneo associado, isto é, quando $q = 0$ e w solução de

$$\begin{aligned} w_t - w_{xx} &= q(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \\ w(x, 0) &= 0 \end{aligned} \tag{6.21}$$

Aplicando a Transformada de Fourier em x em (6.21), obtemos que

$$\begin{aligned}\hat{w}_t + \xi^2 \hat{w} &= \hat{q}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \\ \hat{w}(\xi) &= 0,\end{aligned}$$

ou seja, uma equação diferencial ordinária na variável ξ . O fator integrante é dado por $e^{\xi^2 t}$, então,

$$\frac{d}{dt} (\hat{w} e^{\xi^2 t}) = \hat{q}(\xi, t) e^{\xi^2 t}$$

Integrando a igualdade acima de 0 a t ,

$$\hat{w}(\xi, t) e^{\xi^2 t} - \hat{w}(\xi, 0) = \int_0^t \hat{q}(\xi, s) e^{\xi^2 s} ds.$$

A Transformada de Fourier de w é dada por

$$\hat{w}(\xi, t) = e^{-\xi^2 t} \int_0^t \hat{q}(\xi, s) e^{\xi^2 s} ds = \int_0^t \hat{q}(\xi, s) e^{\xi^2 (t-s)} ds$$

Aplicando a fórmula da inversão,

$$\begin{aligned}w(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_0^t \hat{q}(\xi, s) e^{-\xi^2 (t-s)} ds \right] e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{q}(\xi, s) e^{-\xi^2 (t-s)} e^{i\xi x} d\xi \right) ds \\ &= \int_0^t \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} q(y, s) e^{i\xi y} dy \right) e^{-\xi^2 (t-s)} e^{i\xi x} d\xi \right] ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} q(y, s) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2 (t-s)} e^{i\xi (x-y)} d\xi \right) dy ds\end{aligned}$$

Pelo 6.0.1, segue que, para $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ e $0 < s < t$,

$$\begin{aligned}w(x, t) &= \int_0^t \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} q(y, s) \sqrt{\frac{\pi}{t-s}} e^{\frac{-(x-y)^2}{4(t-s)}} dy ds \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} q(y, s) \frac{e^{\frac{-(x-y)^2}{4(t-s)}}}{\sqrt{4\pi(t-s)}} dy ds\end{aligned}$$

Fazemos a mudança de variável $\tau = t - s$, então

$$w(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} q(y, t - \tau) \frac{e^{\frac{-(x-y)^2}{4\tau}}}{\sqrt{4\pi\tau}} dy, d\tau$$

Observamos que podemos escrever w como

$$w(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} q(y, s) K(x - y, t - s) dy ds$$

onde $K(x, t) = e^{\frac{-x^2}{4t}} (4\pi t)^{-1/2}$.

7 Solução Numérica

7.1 Equação do Calor Homogênea pela Lei de Fourier

Suponhamos uma barra de comprimento L , cuja temperatura em suas extremidades, $x = 0$ e $x = L$, é igual a zero. Suponhamos também que no instante $t = 0$, a temperatura da barra é 20.

$$\begin{cases} u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) = 0 & x \in (0, L) & t > 0 \\ u(0, t) = 0 & u(L, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = 20 & x \in (0, L) \end{cases} \quad (7.1)$$

onde usamos $k = 0.12$ e $L = 1$.

Abaixo está o código para as condições de contorno de Dirichlet

```
%CALCULA A EQUAÇÃO DO CALOR HOMOGENEA (CASO 1)
```

```
%L--->Comprimento da Barra
%k--->Constante
%N--->Número de Iterações
%NI-->Número de Intevalos de Integração
function Resultado = Homogenea1(x,t,L,k,N,NI)
    %Condição Inicial: Função phi(x)
    phi=@(x) 20;
    %Inicializando a variável U1
    U1=0;
    for n=1:N
        Bn=calcBN(n,L,NI,phi);
        C=(n*pi)/L;
        Exp=1/(exp((C^2)*k*t));
        U1=sin(C*x)*Exp*Bn+U1;
    endfor
    Resultado=U1;
endfunction
```

o código da função calcBN

```
%CALCULAR TERMO bn DA SÉRIE DE FOURIER
```

```

%L----->Comprimento da Barra
%ni---->Número de Intervalos de Integração (Mínimo 2 e deve ser par)
%n----->Iteração Atual
%phi--->Função phi(x)
function bn = calcBN(n, L, ni, phi);
    %Intervalo de Integração
    a = 0; b = L;
    %Constante alpha
    alpha = ( n * pi ) / L;
    %Definindo h
    h = ( b - a ) / ( ni * 2 );
    %Função a ser integrada
    funcao = @(x) sin(alpha*x)*phi(x);
    %Definindo variáveis para integração
    PNT=a;
    Is=0;
    for i=1:ni
        I=(h/3)*(funcao(PNT)+4*funcao(PNT+h)+funcao(PNT+2*h));
        Is=I+Is;
        PNT=PNT+2*h;
    endfor
    bn=(2/L)*Is;
endfunction

```

t/x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
1	2.40765	6.30296	7.79061	6.30296	2.40765
2	0.73656	1.92833	2.38355	1.92833	0.73656
3	0.22535	0.58996	0.72923	0.58996	0.22535
4	0.068943195	0.180495629	0.223104867	0.180495629	0.068943195
5	0.02109277	0.055221592	0.068257641	0.055221592	0.021092771
6	0.006453211	0.016894726	0.020883030	0.016894726	0.006453211
7	0.001974323	0.005168844	0.006389042	0.005168844	0.001974323
8	0.000604033	0.001581378	0.001954690	0.001581378	0.000604033
9	0.000184800	0.000483813	0.000598026	0.000483813	0.000184800
10	0.000056539	0.000148020	0.000182963	0.000148020	0.000056539

Tabela 2 – Resultados o modelo homogêneo de Fourier com as condições de Dirichlet

Suponhamos agora uma barra de comprimento L , cuja as extremidades, $x = 0$ e $x = L$, estão isoladas, ou seja, o fluxo de calor nas extremidades é igual a zero. Suponhamos também que no instante $t = 0$, a temperatura da barra é 20.

$$\begin{cases} u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) = 0 & x \in [0, L] & t \geq 0 \\ u_x(0, t) = 0 & u_x(L, t) & t > 0 \\ u(x, 0) = 30x & 0 < x < L \end{cases}$$

onde usamos $k = 0.12$ e $L = 1$.

Abaixo está o código para as condições de contorno de Neumann

`%CALCULA A EQUAÇÃO DO CALOR HOMOGENEA (CASO 2)`

```
%L--->Comprimento da Barra
%k--->Constante
%N--->Número de Iterações
%NI-->Número de Intevalos de Integração
function Resultado = Homogenea2(x,t,L,k,N,NI)
    %Condição Inicial: Função phi(x)
    phi=@(x) 30*x;
    %Inicializando a variável U1
    U2=0;
    for n=1:N
        An=calcAN(n,L,NI,phi);
        C=(n*pi)/L;
        Exp=1/(exp((C^2)*k*t));
        U2=cos(C*x)*Exp*An+U2;
    endfor
    Resultado= calcA0(L,NI,phi)+U2;
endfunction
```

o código da função calcAN

`%CALCULAR TERMO an DA SÉRIE DE FOURIER`

```
%L----->Comprimento da Barra
%ni----->Número de Intervalos de Integração (Mínimo 2 e deve ser par)
%n----->Iteração Atual
%phi---->Função phi(x)
function an = calcAN(n, L, ni, phi);
    %Intervalo de Integração
    a = 0; b = L;
    %Constante alpha
```

```

alpha = ( n * pi ) / L;
%Definindo h
h = ( b - a ) / ( ni * 2 );
%Função a ser integrada
funcao = @(x) cos(alpha*x)*phi(x);
%Definindo variáveis para integração
PNT=a;
Is=0;
for i=1:ni
    I=(h/3)*(funcao(PNT)+4*funcao(PNT+h)+funcao(PNT+2*h));
    Is=I+Is;
    PNT=PNT+2*h;
endfor
an=(2/L)*Is;
endfunction

```

o código da função calcA0

```

%CALCULAR TERMO a0 DA SÉRIE DE FOURIER

%L----->Comprimento da Barra
%ni---->Número de Intervalos de Integração (Mínimo 2 e deve ser par)
%phi--->Função phi(x)
function a0 = calcA0(L, ni, phi);
    %Intervalo de Integração
    a = 0; b = L;
    %Definindo h
    h = ( b - a ) / ( ni * 2 );
    %Função a ser integrada
    funcao = @(x) phi(x);
    %Definindo variáveis para integração
    PNT=a;
    Is=0;
    for i=1:ni
        I=(h/3)*(funcao(PNT)+4*funcao(PNT+h)+funcao(PNT+2*h));
        Is=I+Is;
        PNT=PNT+2*h;
    endfor
    a0=(2/L)*Is;
endfunction

```

t/x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
1	26.462	27.814	30.000	32.186	33.538
2	28.918	29.331	30.000	30.669	31.082
3	29.669	29.795	30.000	30.205	30.331
4	29.899	29.937	30.000	30.063	30.101
5	29.969	29.981	30.000	30.019	30.031
6	29.991	29.994	30.000	30.006	30.009
7	29.997	29.998	30.000	30.002	30.003
8	29.999	29.999	30.000	30.001	30.001
9	30.000	30.000	30.000	30.000	30.000

Tabela 3 – Resultados o modelo homogêneo de Fourier com as condições de Neumann

7.2 Equação do Calor Não Homogênea pela Lei de Fourier

Suponhamos uma barra de comprimento L , cuja temperatura nas extremidades é dada por $\frac{10}{2t+1}$ quando $x = 0$ e $\frac{10}{t+1}$ quando $x = L$. Suponhamos também que no instante $t = 0$, a temperatura da barra é 20.

$$\begin{cases} u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) = \frac{x+1}{(t+1)^2} & x \in [0, L] & t \geq 0 \\ u(0, t) = \frac{10}{2t+1} & u(L, t) = \frac{10}{t+1} & t > 0 \\ u(x, 0) = 20 & x \in (0, L] \end{cases} \quad (7.2)$$

onde usamos $k = 0.12$ e $L = 1$.

$$w(x, t) = \left(\frac{10}{(t+1)L} - \frac{10}{(2t+1)L} \right) x + \frac{10}{(2t+1)} \quad (7.3)$$

$$w_t(x, t) = \frac{-10x}{(t+1)^2L} + \frac{20(x-L)}{(2t+1)^2L} \quad (7.4)$$

$$w_{xx} = 0 \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} h(x, t) &= \frac{x+1}{(t+1)^2} + \frac{10x}{(t+1)^2L} - \frac{20(x-L)}{(2t+1)^2L} \\ &= \frac{L(x+1) + 10x}{(t+1)^2L} - \frac{20(x-L)}{(2t+1)^2L} \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} d_n(s) &= \frac{2}{L} \left[\frac{1}{(s+1)^2L} \int_0^L [L(x+1) + 10x] \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{20}{(2s+1)^2L} \int_0^L (x-L) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right] \end{aligned} \quad (7.7)$$

Abaixo se encontra o código utilizado para a resolução deste modelo

```
%CALCULAR EQUAÇÃO DO CALOR (CASO 1)

%L--->Comprimento da Barra
%k--->Constante
%N--->Número de Iterações
%NI1-->Número de Intervalos de Integração de U1
%NI2-->Número de Intervalos de Integração de U2 (Integral no Tempo)
function Resultado = EqCalor1(x,t,L,k,N,NI1,NI2)
    %Condições de Contorno: Funções a(t) e b(t)
    a=@(t) 10/(t+1);
    b=@(t) 10/(2*t+1);
    %Condição Inicial: Função phi(x)
    phi=@(x) 20;
    %Função w(x,t)
    w=@(x,t) ((b(t)-a(t))/L)*x+a(t);
    %Função g(x)
    g=@(x) phi(x)-w(x,0);
    %u1(x,t)
    u1=H1(x,t,L,k,N,NI1,g);
    u2=0;
    %Calcular u2
    for n=1:N
        u2=u21(x,t,L,k,n,NI1,NI2)+u2;
    endfor
    %Solução
    Resultado=w(x,t)+u1+u2;
endfunction
```

Código da função u21:

```
%CALCULAR U2 (Caso 1)

%L----->Comprimento da Barra
%ni----->Número de Intervalos de Integração em s (Mínimo 2 e deve ser par)
%ni2---->Número de Intervalos de Integração em t (Mínimo 2 e deve ser par)
%n----->Iteração Atual
function Resultado=u21(x,t,L,k,n,ni,ni2)
    %INTEGRAL EM dn(s)
```

```

%Intervalo de Integração
a = 0; b = L;
%Constante alpha
alpha = ( n * pi ) / L;
%Definindo h
h = ( b - a ) / ( ni * 2 );
%Função a ser integrada
funcao1 = @(x) (L*(x+1)+10*x)*sin(alpha*x);
funcao2 = @(x) (x-L)*sin(alpha*x);
%Definindo variáveis para integração
PNT=a;
Is1=0; Is2=0;
for i=1:ni
    I1=(h/3)*(funcao1(PNT)+4*funcao1(PNT+h)+funcao1(PNT+2*h));
    I2=(h/3)*(funcao2(PNT)+4*funcao2(PNT+h)+funcao2(PNT+2*h));
    Is1=I1+Is1;
    Is2=I2+Is2;
    PNT=PNT+2*h;
endfor
%Dn(s)
UI=@(s) (2/L)*(1/(((s+1)^(2))*L)*Is1 - 20/(((2*s+1)^(2))*L)*Is2);
%INTEGRAL EM U2
%Função a ser integrada
funcaoU = @(s) (UI(s))*(1/(exp((alpha^(2))*k*(t-s))));
%Intervalo de Integração
a=0; b=t;
%Definindo h
h = ( b - a ) / ( ni2 * 2 );
%Definindo variáveis para integração
PNT=a;
IUs1=0;
for i2=1:ni2
    IU1=(h/3)*(funcaoU(PNT)+4*funcaoU(PNT+h)+funcaoU(PNT+2*h));
    IUs1=IU1+IUs1;
    PNT=PNT+2*h;
endfor
Resultado = sin(alpha*x)*IUs1;
endfunction

```

Código da função H1:

```
%CALCULA A EQUAÇÃO DO CALOR HOMOGENEA (CASO 1)

%L--->Comprimento da Barra
%k--->Constante
%N--->Número de Iterações
%NI-->Número de Intervalos de Integração
%phi(x)--->Condição Inicial
function Resultado = H1(x,t,L,k,N,NI,phi)
    %Inicializando a variável U1
    U1=0;
    for n=1:N
        Bn=calcBN(n,L,NI,phi);
        C=(n*pi)/L;
        Exp=1/(exp((C^2)*k*t));
        U1=sin(C*x)*Exp*Bn+U1;
    endfor
    Resultado=U1;
endfunction
```

t/x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
1	7.4267	10.9955	12.0865	10.3577	6.1254
2	4.3571	5.8681	6.2783	5.3881	3.3354
3	2.9302	3.5389	3.6419	3.1461	2.1031
5	1.7475	1.8310	1.7719	1.5456	1.1562
10	0.89759	0.85758	0.78980	0.68995	0.55597
15	0.60859	0.56828	0.51601	0.44997	0.36892
30	0.31014	0.28339	0.25371	0.22065	0.18384

Tabela 4 – Resultados o modelo não-homogêneo de Fourier com as condições de Dirichlet

Suponhamos uma barra de comprimento L , cuja fluxo de calor nas extremidades é dado por $\frac{10}{2t+1}$ quando $x = 0$ e $\frac{10}{t+1}$ quando $x = L$. Suponhamos também que no instante $t = 0$, a temperatura da barra é 20.

$$\begin{cases} u_t(x, t) - ku_{xx}(x, t) = \frac{x+1}{(t+1)^2} & x \in [0, L] & t \geq 0 \\ u_x(0, t) = \frac{10}{2t+1} & u_x(L, t) = \frac{10}{t+1} & t > 0 \\ u(x, 0) = 20 & x \in (0, L] \end{cases} \quad (7.8)$$

onde usamos $k = 0.12$ e $L = 1$.

$$w(x, t) = \left(\frac{10}{(t+1)L} - \frac{10}{(2t+1)L} \right) \frac{x^2}{2} + \frac{10}{(2t+1)}x \quad (7.9)$$

$$w_t(x, t) = \frac{-5x^2}{(t+1)^2L} + \frac{10(x^2 - xL)}{(2t+1)^2L} \quad (7.10)$$

$$w_{xx} = \frac{10}{(t+1)L} - \frac{10}{(2t+1)L} \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} h(x, t) &= \frac{x+1}{(t+1)^2} + \frac{5x^2}{(t+1)^2L} - \frac{10(x^2 - xL)}{(2t+1)^2L} - \frac{10}{(t+1)L} + \frac{10}{(2t+1)L} \\ &= \frac{L(x+1) + 5x^2}{(t+1)^2L} - \frac{10(x^2 - xL)}{(2t+1)^2L} - \frac{10}{(t+1)L} + \frac{10}{(2t+1)L} \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} c_n(s) &= \frac{2}{L} \left[\frac{1}{(s+1)^2L} \int_0^L [L(x+1) + 5x^2] \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right. \\ &\quad - \frac{10}{(2s+1)^2L} \int_0^L (x^2 - xL) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \\ &\quad \left. + \left(-\frac{10}{(t+1)L} + \frac{10}{(2t+1)L} \right) \int_0^L \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx \right] \end{aligned} \quad (7.13)$$

Faremos um proceso análogo para $c_0(s)$

Abaixo se encontra o código utilizado para a resolução deste modelo

```
%CALCULAR EQUAÇÃO DO CALOR (CASO 2)
```

```
%L--->Comprimento da Barra
```

```
%k--->Constante
```

```
%N--->Número de Iterações
```

```
%NI1-->Número de Intervalos de Integração de U1
```

```
%NI2-->Número de Intervalos de Integração de U2 (Integral no Tempo)
```

```
function EqC2 = EqCalor2(x,t,L,k,N,NI1,NI2)
```

```
  %Condições de Contorno: Funções a(t) e b(t)
```

```
  a=@(t) 10/(t+1);
```

```
  b=@(t) 10/(2*t+1);
```

```
  %Condição Inicial: Função phi(x)
```

```
  phi=@(x) 20;
```

```
  %Função w(x,t)
```

```
  w=@(x,t) ((b(t)-a(t))/L)*((x^2)/2)+a(t)*x;
```

```
  %Função g(x)
```

```
  g=@(x) phi(x)-w(x,0);
```

```
  %u1(x,t)
```

```

u1=H2(x,t,L,k,N,NI1,g);
u2=0;
%Calcular u2
for n=1:N
    u2=u22(x,t,L,k,n,NI1,NI2)+u2;
endfor
%Calcular a0
a0=u22_a0(x,t,L,k,NI1,NI2);
%Solução
A=w(x,t)+u1+u2+a0;
EqC2 = A;
endfunction

```

Código da função H2:

```
%CALCULA A EQUAÇÃO DO CALOR HOMOGENEA (CASO 2)
```

```

%L--->Comprimento da Barra
%k--->Constante
%N--->Número de Iterações
%NI-->Número de Intervalos de Integração
%phi(x)--->Condição Inicial
function Resultado = H2(x,t,L,k,N,NI,phi)
    %Inicializando a variável U2
    U2=0;
    for n=1:N
        An=calcAN(n,L,NI,phi);
        C=(n*pi)/L;
        Exp=1/(exp((C^2)*k*t));
        U2=cos(C*x)*Exp*An+U2;
    endfor
    Resultado=U2+calca0(L,NI,phi);
endfunction

```

Código da função u22:

```
%CALCULAR U2 (Caso 2)
```

```

%L----->Comprimento da Barra
%ni---->Número de Intervalos de Integração em s (Mínimo 2 e deve ser par)

```

```

%ni2--->Número de Intervalos de Integração em t (Mínimo 2 e deve ser par)
%n----->Iteração Atual
function Resultado=u22(x,t,L,k,n,ni,ni2)
    %INTEGRAL EM dn(s)
    %Intervalo de Integração
    a = 0; b = L;
    %Constante alpha
    alpha = ( n * pi ) / L;
    %Definindo h
    h = ( b - a ) / ( ni * 2 );
    %Função a ser integrada
    funcao1 = @(x) (L*(x+1)+5*(x^(2)))*cos(alpha*x);
    funcao2 = @(x) (x^(2)-x*L)*cos(alpha*x);
    funcao3 = @(x) cos(alpha*x);
    %Definindo variáveis para integração
    PNT=a;
    Is1=0; Is2=0; Is3=0;
    for i=1:ni
        I1=(h/3)*(funcao1(PNT)+4*funcao1(PNT+h)+funcao1(PNT+2*h));
        I2=(h/3)*(funcao2(PNT)+4*funcao2(PNT+h)+funcao2(PNT+2*h));
        I3=(h/3)*(funcao3(PNT)+4*funcao3(PNT+h)+funcao3(PNT+2*h));
        Is1=I1+Is1;
        Is2=I2+Is2;
        Is3=I3+Is3;
        PNT=PNT+2*h;
    endfor
    %Dn(s)
    UI=@(s) (2/L)*(1/(((s+1)^(2))*L)*Is1 - 10/(((2*s+1)^(2))*L)*Is2+
    ((10/(2*t+1))-(10/(t+1)))*Is3);
    %INTEGRAL EM U2
    %Função a ser integrada
    funcaoU = @(s) (UI(s))*(1/(exp((alpha^(2))*k*(t-s))));
    %Intervalo de Integração
    a=0; b=t;
    %Definindo h
    h = ( b - a ) / ( ni2 * 2 );
    %Definindo variáveis para integração
    PNT=a;
    IUs1=0;

```

```

for i2=1:ni2
    IU1=(h/3)*(funcaoU(PNT)+4*funcaoU(PNT+h)+funcaoU(PNT+2*h));
    IUs1=IU1+IUs1;
    PNT=PNT+2*h;
endfor
Resultado = cos(alpha*x)*IUs1;
endfunction

```

Código da função u22_a0:

%CALCULAR a0 em U2 (Caso 2)

%L----->Comprimento da Barra

%ni---->Número de Intervalos de Integração em s (Mínimo 2 e deve ser par)

%ni2--->Número de Intervalos de Integração em t (Mínimo 2 e deve ser par)

function Resultado=u22_a0(x,t,L,k,ni,ni2)

%INTEGRAL EM dn(s)

%Intervalo de Integração

a = 0; b = L;

%Definindo h

h = (b - a) / (ni * 2);

%Função a ser integrada

funcao1 = @(x) (L*(x+1)+5*(x^(2)));

funcao2 = @(x) (x^(2)-x*L);

%Definindo variáveis para integração

PNT=a;

Is1=0; Is2=0;

for i=1:ni

I1=(h/3)*(funcao1(PNT)+4*funcao1(PNT+h)+funcao1(PNT+2*h));

I2=(h/3)*(funcao2(PNT)+4*funcao2(PNT+h)+funcao2(PNT+2*h));

Is1=I1+Is1;

Is2=I2+Is2;

PNT=PNT+2*h;

endfor

%C0(s)

UI=@(s) (2/L)*(1/(((s+1)^(2))*L)*Is1 - 10/(((2*s+1)^(2))*L)*Is2+ ((10/(2*t+1))-(1

%INTEGRAL EM U2

%Função a ser integrada

funcaoU = @(s) UI(s);

%Intervalo de Integração

```

a=0; b=t;
%Definindo h
h = ( b - a ) / ( ni2 * 2 );
%Definindo variáveis para integração
PNT=a;
IUs1=0;
for i2=1:ni2
    IU1=(h/3)*(funcaoU(PNT)+4*funcaoU(PNT+h)+funcaoU(PNT+2*h));
    IUs1=IU1+IUs1;
    PNT=PNT+2*h;
endfor
Resultado = IUs1;
endfunction

```

t/x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
1	32.019	32.739	33.237	33.667	34.186
2	30.521	31.146	31.719	32.243	32.716
3	29.880	30.381	30.864	31.307	31.685
5	29.306	29.637	29.955	30.243	30.486
10	28.756	28.928	29.087	29.229	29.350
15	28.530	28.646	28.752	28.846	28.927
30	28.279	28.338	28.391	28.438	28.478

Tabela 5 – Resultados o modelo não-homogêneo de Fourier com as condições de Neumann

7.3 Equação do Calor Homogênea de Cattaneo

Suponhamos o seguinte problema

$$\begin{cases}
 u_t(x, t) + \alpha u_{tt}(x, t) - \beta u_{xx}(x, t) = 0 & x \in [0, L] & t \geq 0 \\
 u(0, t) = 0 & u(L, t) = 0 & t > 0 \\
 u(x, 0) = u_0 & u_t(x, 0) = 0 & x \in (0, L)
 \end{cases} \quad (7.14)$$

onde usamos $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.000000265$, $L = 0.01$ e $u_0 = 37$

Abaixo está o código utilizado para a solução numérica desta equação

```
%CALCULAR EQUAÇÃO DO CALOR DE CATTANEO (CASO 1)
```

```
%L----->Comprimento da Barra
```

```
%alpha-->Constante de amortecimento no tempo
```

```
%beta--->Constante de difusividade térmica
```

```

%N----->Número de Iterações
%u0----->Condição Inicial 1
function Resultado = cattaneo1(x,t,L,alpha,beta,u0,N);
    %Iniciando a variável
    c1=0;
    for n=1:N
        %Gamma
        gamma=sqrt((L^(2))-4*(n^(2))*(pi^(2))*beta*alpha)/(2*L*alpha);
        %Parte 2 da solução (parte do seno)
        B=((1-((-1)^(n)))/n)*sin((n*pi*x)/L);
        %Verifica a solução é complexa
        if((((L^(2))-4*(n^(2))*(pi^(2))*beta*alpha)<0)&&(B~=0))
            "Complexa"
            n
            break;
        endif
        %Parte 3 da solução (exponencial negativa)
        C=((2*gamma*alpha-1)/gamma)*(1/exp(gamma*t));
        %Parte 4 da solução (exponencial positiva)
        D=((1+2*gamma*alpha)/gamma)*(exp(gamma*t));
        c1=B*(C+D)+c1;
    endfor
    %Parte 1 da solução (não está no somatório)
    A1=(u0/(2*pi*alpha))*(1/(exp(t/(2*alpha))));
    Resultado=c1*A1;
endfunction

```

t/x	0.001	0.003	0.005	0.007	0.009
1	30.907	37.000	36.999	37.000	30.907
2	24.730	36.924	37.000	36.924	24.730
3	21.146	36.440	36.999	36.440	21.146
5	17.033	34.643	36.876	34.643	17.033
10	12.417	29.812	34.847	29.812	12.417
15	10.203	25.903	31.402	25.903	10.203
30	6.6545	17.3991	21.4892	17.3991	6.6545

Tabela 6 – Resultados para o modelo homogêneo de Cattaneo

8 Conclusões

A equação do calor é muito importante, tanto para os problemas que ela modela quanto para história da matemática, afinal foi partindo do problema da propagação do calor que foi desenvolvida a série de Fourier. Verificamos a convergência da série de Fourier o que nos possibilitou encontrar as soluções clássicas das equações estudadas, a saber, o modelo de Fourier da equação do calor homogênea e não homogênea, a equação do calor na Reta e o modelo da equação do calor de Cattaneo. Apresentamos o caso onde o modelo de Fourier não produz bons resultados e o motivo disso acontecer. Também vimos o modelo hiperbólico da equação do calor desenvolvido por Cattaneo, que leva em conta a propagação finita do calor e respeita a teoria da relatividade. Por fim, verificamos as soluções obtidas analiticamente através das soluções numéricas.

Os algoritmos utilizados neste trabalho não foram perfeitamente otimizados, por causa disso não conseguimos trazer gráficos das soluções, ou imagens simuladas da barra. Ainda há muito o que estudar, pois apenas vimos os modelos clássicos e a solução através da série de Fourier e, no caso da equação do calor na reta, da transformada de Fourier. Ainda não estudamos o Método Chebyshev-Espectral, que utiliza os polinômios de Chebyshev em vez da série de Fourier. Também não vimos o modelo da equação do calor de ordem fracionária.

Referências

- BLEECKER, D. *Basic Partial Differential Equations*. [S.l.]: Chapman and Hall, 1995. Citado 4 vezes nas páginas 5, 6, 8 e 30.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Loose-Leaf Print Companion*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 30.
- FIGUEIREDO, D. G. de. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. Rio de Janeiro: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, 1988. Citado na página 8.
- IÓRIO, V. *EDP: Um Curso de Graduação*. Brasília: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 6, 8 e 25.
- JR., V. I. R. J. I. *Equações diferenciais parciais: uma introdução*. 1. ed. Brasília: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 5.
- LENARCZY, R. D. M. Investigation of non-fourier thermal waves interaction in a solid material. *Polska Akademia Nauk*, v. 40, n. 1, p. 115–126, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 53.
- LUPA, M. Analytical solution of cattaneo equation. *Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science*, v. 6, p. 127–132, 2007. Citado na página 53.
- MARÍN, E. Does fourier’s law of heat conduction contradict the theory of relativity? *Latin-American Journal of Physics Education*, v. 5, n. 2, p. 402–405, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 53.
- NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor*. [S.l.]: Editora Blucher, 2002. v. 2. Citado na página 6.
- REIS, F. das Chagas Azevedo dos. Modelagem matemática e computacional da contaminação de aquíferos com uso de métodos numéricos sem malha. 2014. Disponível em: <<http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/11410>>. Acesso em: 15 nov. 2019. Citado na página 32.
- SARE, H. D. F.; RACKE, R. On the stability of damped timoshenko systems: Cattaneo versus fourier law. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, v. 194, p. 221–251, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 53.
- YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. *Física II*. [S.l.]: Pearson Educación, 2008. Citado na página 6.