



Universidade Federal do Rio Grande  
Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Estudo preliminar à correspondência  
AdS/CFT:  
Teoria de Cordas, Relatividade Geral e  
Teorias de Gauge

Matheus da Luz Cravo

Rio Grande - RS, 9 de dezembro de 2019

Universidade Federal do Rio Grande  
Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Estudo preliminar à correspondência  
AdS/CFT:  
Teoria de Cordas, Relatividade Geral e  
Teorias de Gauge

Discente: Matheus da Luz Cravo  
Orientador: Prof. Dr. Otavio Socolowski Jr.

Monografia orientada pelo Prof. Dr. Otavio Socolowski Jr. com discente Matheus da Luz Cravo e apresentada na Universidade Federal do Rio Grande, como parte dos requisitos necessários para a conclusão do curso de Física, modalidade: bacharelado.

Rio Grande - RS, 9 de dezembro de 2019

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer:

- aos meus pais, por sempre terem me apoiado durante essa jornada;
- a todos os colegas que de alguma forma contribuíram para a minha formação;
- a todos os meus professores, que a cada disciplina ministrada me deram a oportunidade de aprender e me apaixonar cada vez mais pela física;
- a FURG, pelo espaço e a estrutura que permitiu a realização deste trabalho;
- ao meu orientador, Prof. Dr. Otavio Socolowski Jr, por todos os ensinamentos, oportunidades e conversas que tivemos. Levarei esses aprendizados comigo durante a carreira acadêmica e a vida.

*"Estude muito o que mais lhe interessa, da maneira mais indisciplinada, irreverente e original possível."*  
- Richard Feynman

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>I</b>	<b>Introdução à Teoria de Cordas</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Corda Livre Relativística</b>	<b>12</b>
2.1	Partícula Livre Relativística . . . . .	12
2.1.1	Parametrização da Linha-Mundo . . . . .	14
2.2	Ação de Nambu Goto . . . . .	14
2.3	Equações de Movimento e Condições de Contorno . . . . .	18
2.4	Reparametrização . . . . .	20
2.5	<i>Gauge Estático</i> . . . . .	21
2.5.1	Parâmetro de Inclinação e Unidades Naturais . . . . .	23
2.6	Conclusão . . . . .	24
<b>3</b>	<b><i>Gauge</i> do Cone de Luz</b>	<b>25</b>
3.1	Solução das Equações de Movimento para Cordas Abertas . . . . .	29
3.2	<i>Gauge</i> do Cone de Luz . . . . .	32
3.2.1	Modos de Virasoro . . . . .	35
3.3	Equações de Movimento da Corda Fechada . . . . .	38
3.4	Conclusão . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Quantização da Corda Livre Relativística</b>	<b>44</b>
4.1	Quantização Canônica da Corda Aberta . . . . .	44
4.1.1	Relações de Comutação . . . . .	45
4.1.2	Operadores Criação e Aniquilação . . . . .	47
4.1.3	Operador $\hat{M}^2$ e os modos de Virasoro . . . . .	50
4.1.4	Relações de Comutação Envolvendo os Operadores de Virasoro . . . . .	53
4.1.5	Hamiltoniano e Reparametrização . . . . .	55
4.1.6	Base de Estados . . . . .	57
4.2	Quantização da Corda Fechada Relativística . . . . .	59
4.2.1	Base de estados . . . . .	61
4.3	Conclusão . . . . .	64
<b>II</b>	<b>Introdução à Relatividade Geral</b>	<b>65</b>
<b>5</b>	<b>Princípio da Equivalência</b>	<b>66</b>
5.1	Galileu e Newton: os primeiros estudos sobre a gravidade . . . . .	66

5.2	Princípio da Equivalência . . . . .	68
5.3	Conclusão . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Elementos de Geometria Diferencial</b>	<b>70</b>
6.1	Geometria Diferencial . . . . .	70
6.1.1	Vetores e Covetores . . . . .	71
6.1.2	Tensores do tipo $(r, s)$ . . . . .	75
6.1.3	Métrica . . . . .	76
6.2	Derivada Covariante . . . . .	77
6.3	Curvatura . . . . .	82
6.4	Conclusão . . . . .	83
<b>7</b>	<b>Equações de Einstein</b>	<b>85</b>
7.1	Equações de campo de Einstein . . . . .	85
7.1.1	Tensor momento-energia . . . . .	86
7.2	Solução de Schwarzschild . . . . .	86
7.2.1	Espaços com curvatura constante . . . . .	88
7.3	O espaço-tempo anti-de Sitter . . . . .	89
7.3.1	Coordenadas de Poincaré e Simetria Conforme . . . . .	91
7.4	Conclusão . . . . .	92
<b>III</b>	<b>Teorias de Gauge</b>	<b>93</b>
<b>8</b>	<b>Mecânica Quântica Relativística</b>	<b>94</b>
8.1	Equação de Klein-Gordon . . . . .	94
8.2	Equação de Dirac . . . . .	96
8.3	Espinores de Dirac . . . . .	99
8.3.1	Soluções Livres de Dirac . . . . .	100
8.4	Conclusão . . . . .	101
<b>9</b>	<b>Simetrias de Gauge</b>	<b>103</b>
9.1	Formalismo lagrangiano das teorias quânticas relativísticas . . . . .	103
9.1.1	Lagrangiana de Klein-Gordon . . . . .	103
9.1.2	Lagrangiana de Dirac . . . . .	104
9.1.3	Lagrangiana de Proca . . . . .	105
9.2	Lagrangiana de Dirac e a Eletrodinâmica . . . . .	106
9.2.1	Diagramas de Feynman na QED . . . . .	109
9.3	Lagrangiana de Yang-Mills . . . . .	111
9.4	Cromodinâmica Quântica . . . . .	113
9.4.1	Diagramas de Feynman na QCD . . . . .	116
9.5	Conclusão . . . . .	117
<b>10</b>	<b>Conclusão</b>	<b>119</b>
<b>A</b>	<b>Mecânica Lagrangiana</b>	<b>121</b>
<b>B</b>	<b>Propriedades de Transformações Unitárias e Matrizes Hermitianas</b>	<b>123</b>
<b>C</b>	<b>Transformações de Lorentz para Espinores de Dirac</b>	<b>125</b>

<b>D Equações de Continuidade na Mecânica Quântica Relativística</b>	<b>127</b>
D.1 Equação de Klein-Gordon . . . . .	127

# Capítulo 1

## Introdução

A teoria de cordas é um dos principais tópicos de pesquisa da física teórica atual, em especial por ser matematicamente consistente com a mecânica quântica e ao mesmo tempo incorporar a interação gravitacional. Em razão disso, ela é tida como a principal candidata à teoria de unificação entre as forças fundamentais. Todavia, a primeira formulação da teoria de cordas era, de fato, uma teoria para a interação forte. Em 1959, Regge verificou a existência de uma relação linear entre o momento angular total de mésons leves e o quadrado de suas respectivas massas. Este resultado é mostrado na Figura 1.1.

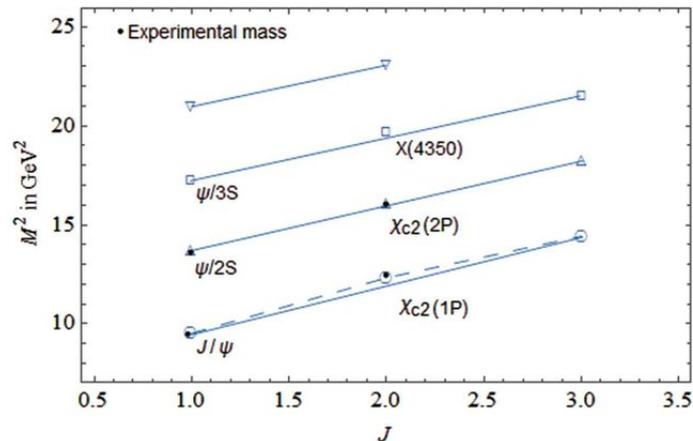


Figura 1.1: Dados experimentais contendo as trajetórias de Regge para alguns mésons leves. Fonte: [1].

Essa relação linear, conhecida como *trajetória de Regge*, pode ser reproduzida se considerarmos os mésons como uma corda rígida em rotação. Mesmo classicamente, este tipo de objeto satisfaz a relação de proporcionalidade:

$$J \propto M^2. \quad (1.1)$$

A quantização deste modelo levou à formulação da teoria bosônica de cordas: uma teoria que demonstrou-se incompleta por não contemplar a existência dos férmions e exigir um espaço-tempo com dimensões extras a fim de manter sua invariância de Lorentz. Por causa disso, e frente ao sucesso da teoria quântica de campos em descrever as forças fundamentais, a hipótese das cordas foi parcialmente abandonada como uma opção viável para descrever a interação forte. Posteriormente, férmions foram incluídos na teoria, dando origem à teoria das supercordas [2].

Em 1998, Maldacena [3] conjecturou uma dualidade entre uma teoria de gauge conforme supersimétrica em um espaço-tempo quadridimensional e uma teoria de cordas formulada em um espaço-tempo *anti-de Sitter* de cinco dimensões. Dessa dualidade — hoje chamada de *correspondência AdS/CFT* — se obtém que a função partição de ambas as teorias são equivalentes:

$$Z_{\text{CFT}} = Z_{\text{AdS}_5}. \quad (1.2)$$

Para uma teoria de gauge com número de cores  $N \gg 1$ , é suficiente usar a gravitação clássica para calcular  $Z_{\text{AdS}_5}$ .

Atualmente, a cromodinâmica quântica é a teoria utilizada para descrever a interação forte. Nela, os bárions e mésons são constituídos de partículas elementares chamadas de quarks, que interagem por causa da sua carga de cor mediante a troca de glúons. Há duas propriedades marcantes dessa teoria: o confinamento e a liberdade assintótica. A primeira diz respeito ao fato de que os quarks nunca são encontrados livres na natureza, mas aparecem sempre em singletos de cor. Já a liberdade assintótica significa que em altas energias, os quarks se comportam como partículas livres [4].

Em condições extremas de temperatura, verificou-se que a matéria hadrônica sofre uma transição de fase para um novo estado da matéria — denominado *plasma de quarks e glúons* — onde os quarks estão desconfinados. Este estado, descoberto experimentalmente em colisões de íons pesados a velocidades ultrarelativísticas [5], comporta-se como um fluido quase perfeito. Supõe-se que o mesmo também pode existir no interior de estrelas de nêutrons e esteve presente nos instantes iniciais do universo.

Por se tratar de um fluido fortemente acoplado, não é possível empregar métodos perturbativos para descrever as propriedades do plasma de quarks e glúons. Neste contexto, a correspondência AdS/CFT tem se mostrado uma ferramenta útil no estudo de sistemas caracterizados pela interação forte, pois provê um ‘dicionário’ entre parâmetros de uma teoria fortemente acoplada e uma teoria gravitacional em um espaço-tempo de dimensão elevada, cujo acoplamento é fraco. Algumas aplicações no estudo do plasma de quarks e glúons e da interação forte são: cálculo do potencial quark-antiquark [6], cálculo da força de arrasto experimentada por quarks pesados [7] e a determinação do limite inferior para a razão entre a viscosidade de cisalhamento e a densidade de entropia [8].

É importante citar que a correspondência AdS/CFT também tem sido aplicada em outras áreas, como a física da matéria condensada [9, 10, 11] e cosmologia [12, 13, 14].

Neste trabalho, propomos um estudo preliminar dos tópicos considerados essenciais para o entendimento da correspondência AdS/CFT, a saber: teoria de cordas, relatividade geral e teorias de gauge. Procuramos estabelecer uma abordagem independente entre cada parte deste trabalho.

Na Parte I, *Introdução à Teoria de Cordas*, começamos estudando a física da corda livre relativística clássica, traçando um paralelo com a partícula livre. Usando o fato de que a ação que a descreve é invariante sob reparametrização, simplificamos as equações de movimento, obtendo o conjunto mínimo de variáveis necessárias para descrever a sua dinâmica. Em seguida, seguindo o procedimento de quantização canônica, transformamos as variáveis dinâmicas em operadores quânticos e, através de suas relações de comutação, descrevemos o espectro de massa da teoria bosônica de cordas abertas e fechadas.

Na Parte II, *Introdução à Relatividade Geral*, começamos abordando algumas definições matemáticas da geometria diferencial, como variedades topológicas, derivada covariante, transporte paralelo e tensor de curvatura. O principal foco não está em uma formulação matematicamente rigorosa, mas sim em desenvolver a intuição necessária que nos permitirá

relacionar a matemática que descreve espaços curvos com a física descrita pelas equações de Einstein, o que culminará em nosso entendimento da gravitação clássica. Enunciaremos algumas soluções das equações de Einstein, como o buraco negro de Schwarzschild e o espaço-tempo anti-de Sitter.

Por fim, na Parte III, *Introdução à Teorias de Gauge*, tratamos da formulação relativística da mecânica quântica, obtendo a equação de Dirac. Ao aplicar o formalismo lagrangiano às equações de Klein-Gordon, Proca e Dirac, mostramos como se originam as interações fundamentais entre partículas e campos, obtendo as lagrangianas da eletrodinâmica, de Yang-Mills e da cromodinâmica quântica. Por fim, realizamos uma abordagem qualitativa do método perturbativo na descrição das interações fundamentais, fazendo uso dos diagramas de Feynman.

# Parte I

## Introdução à Teoria de Cordas

# Capítulo 2

## Corda Livre Relativística

Antes de estudar a dinâmica da corda livre relativística, vamos primeiramente considerar um sistema físico mais simples e bem conhecido: a partícula livre. Após isso, iremos propor a ação de *Nambu-Goto* — que descreve uma corda livre sujeita às condições de contorno de Neumann e Dirichlet. Verificaremos a invariância dessa ação sob reparametrização e nos valendo disso, veremos como a escolha de *gauge estático* pode nos ajudar a intuir propriedades importantes da corda.

### 2.1 Partícula Livre Relativística

A ação de uma partícula livre relativística é dada por

$$S_{PL} = -mc \int_{\mathcal{P}} ds, \quad (2.1)$$

onde  $\mathcal{P}$  é a trajetória da partícula no espaço-tempo, chamada de *linha-mundo*, e  $ds$  é um elemento infinitesimal desta trajetória. Vamos verificar que (2.1) de fato gera as equações de movimento esperadas. Seja  $ds$  um intervalo infinitesimal no espaço-tempo de Minkowski e  $\eta_{\mu\nu}$  a métrica com assinatura  $(-, +, +, +)$ , temos

$$\begin{aligned} -ds^2 &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= -c^2 dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &= -c^2 dt^2 \left[ 1 - \left( \frac{1}{c} \frac{dx^1}{dt} \right)^2 + \left( \frac{1}{c} \frac{dx^2}{dt} \right)^2 + \left( \frac{1}{c} \frac{dx^3}{dt} \right)^2 \right] \\ &= -c^2 dt^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

sendo  $v$  a velocidade da partícula. O sinal negativo em  $-ds^2$  é inserido por convenção, para que  $ds^2 > 0$  represente um intervalo tipo-tempo. Simplificando (2.2)

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (2.3)$$

reescrevemos (2.1) como

$$S_{PL} = \int_{t_i}^{t_f} dt \left( -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right), \quad (2.4)$$

onde identificamos o integrando da ação como a Lagrangiana da partícula livre:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (2.5)$$

Expandindo (2.5) e considerando  $v \ll c$ , temos

$$L \approx -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2. \quad (2.6)$$

Como os termos constantes na Lagrangiana não afetam as equações de movimento, resta apenas o termo que corresponde a energia cinética:

$$L \approx \frac{1}{2}mv^2, \quad (2.7)$$

como esperado para uma partícula livre no regime onde  $v \ll c$ . Além disso, derivando (2.5) em relação a velocidade obtemos o momento canônico relativístico já conhecido:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L}{\partial v^i} \\ &= -mc^2 \frac{\partial}{\partial v^i} \left( \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \\ &= -mc^2 \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dv^i} \left( -\frac{v^2}{c^2} \right) \right] \\ &= m \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dv^i} (\delta_{ij} v^i v^j) \right] \\ &= m \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \delta_{ij} \left( v^j \frac{dv^i}{dv^i} + v^i \frac{dv^j}{dv^i} \right) \right] \\ &= m \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \delta_{ij} (v^j + v^i \delta_i^j) \right] \\ &= m \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} 2\delta_{ij} v^j \right] \\ &= \frac{mv_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Em termos vetoriais:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.9)$$

Estes resultados encerram a nossa análise de que a ação (2.1) gera as equações de movimento corretas para uma partícula livre relativística. Ainda mais, essa ação carrega uma informação importante: a ação da partícula relativística é proporcional ao comprimento de sua linha-mundo. É com base nisso que, na próxima seção, vamos propor uma ação para a corda relativística.

### 2.1.1 Parametrização da Linha-Mundo

É útil escrever as coordenadas  $x^\mu$  em função de um parâmetro real  $\tau$ :

$$x^\mu = x^\mu(\tau) \equiv (x^0(\tau), x^1(\tau), x^2(\tau), x^3(\tau)), \quad \tau \in [\tau_i, \tau_f], \quad (2.10)$$

e pela regra da cadeia, expressar  $ds^2$  em termos dessa parametrização:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= -\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} (d\tau)^2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

e com isso reescrever (2.1)

$$S_{PL} = -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau}}. \quad (2.12)$$

Considere uma reparametrização  $\tau \rightarrow \tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\tau)$ . Usando novamente a regra da cadeia

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{\tau}} \frac{d\tilde{\tau}}{d\tau}, \quad (2.13)$$

e substituindo este resultado em (2.12):

$$S_{PL} = -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{\tau}} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{\tau}} \frac{d\tilde{\tau}}{d\tau}} d\tau \quad (2.14)$$

$$= -mc \int_{\tilde{\tau}_i}^{\tilde{\tau}_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{\tau}} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{\tau}}} d\tilde{\tau}. \quad (2.15)$$

Ao comparar (2.12) e (2.15), fica evidente que a ação da partícula livre tem a mesma forma, não importa qual seja a parametrização escolhida. Por isso, dizemos que (2.12) é *invariante sob reparametrização*.

## 2.2 Ação de Nambu Goto

Aprendemos na seção anterior que

- a ação de uma partícula livre relativística é proporcional ao comprimento da sua linha-mundo;
- podemos parametrizar a linha-mundo e expressar a ação em termos da parametrização;
- a ação da partícula livre é invariante sob reparametrização.

Agora veremos como generalizar estes resultados para encontrar uma ação que descreva a dinâmica de uma corda livre. Enquanto uma partícula tem dimensão zero e a sua trajetória no espaço-tempo descreve uma linha, uma corda é um objeto de uma dimensão (comprimento), que varre uma superfície bidimensional no espaço-tempo. Portanto, é natural propor que a ação da corda livre relativística seja proporcional a área desta superfície, chamada de *folha-mundo* da corda.

Sejam  $X^\mu$  as coordenadas de um ponto pertencente à folha-mundo, imersa em um espaço-tempo de dimensão  $D$ . Análogo à parametrização (2.10), podemos escrever  $X^\mu$  em função de dois parâmetros:

$$X^\mu = X^\mu(\tau, \sigma) \equiv (X^0(\tau, \sigma), X^1(\tau, \sigma), X^2(\tau, \sigma), \dots, X^{D-1}(\tau, \sigma)), \quad (2.16)$$

A Figura 2.1 mostra como cada ponto da folha-mundo está associado de maneira única a um ponto no espaço de parâmetros.

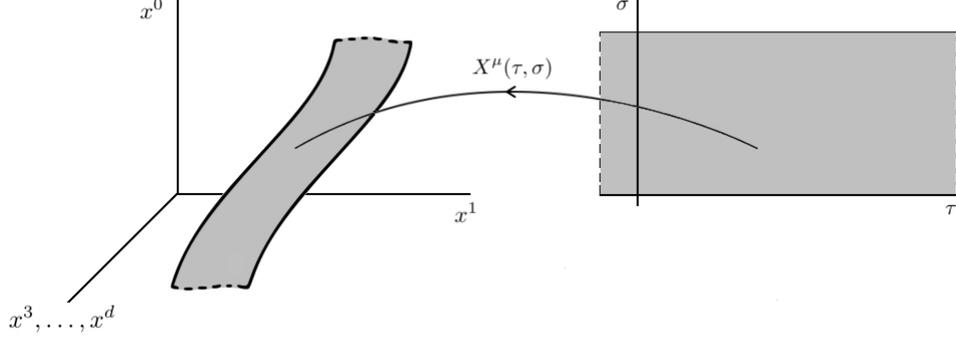


Figura 2.1: Folha-mundo de uma corda livre e o espaço de parâmetros.

Vamos convencionar que o parâmetro  $\tau$  está associado com a passagem do tempo, enquanto  $\sigma$  é um parâmetro que distingue os pontos sobre a corda. Com isso, definimos os intervalos:

$$-\infty < \tau < \infty, \quad 0 \leq \sigma \leq \sigma_1, \quad (2.17)$$

onde

$$\sigma_1 \equiv \begin{cases} \pi & , \text{ se a corda é aberta;} \\ 2\pi & , \text{ se a corda é fechada.} \end{cases} \quad (2.18)$$

Note que  $X^\mu(\tau, 0)$  e  $X^\mu(\tau, \pi)$  são as linhas-mundo dos extremos de uma corda aberta, como mostra a Figura 2.2. Já no caso de cordas fechadas (que não possuem ‘pontas soltas’), há a periodicidade do parâmetro  $\sigma$ :

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi), \quad (2.19)$$

de modo que podemos escolher arbitrariamente qualquer ponto sobre uma corda fechada e associá-lo simultaneamente a  $\sigma = 0$  e  $\sigma = 2\pi$ .

Agora, desejamos calcular a área da folha-mundo como função dos parâmetros  $\tau$  e  $\sigma$ . Para desenvolver a nossa intuição de como fazer isso, considere primeiro uma superfície bidimensional imersa no espaço euclidiano, convenientemente parametrizada por  $\tau$  e  $\sigma$ :

$$\vec{r}(\tau, \sigma) = (x(\tau, \sigma), y(\tau, \sigma), z(\tau, \sigma)). \quad (2.20)$$

Se  $d\vec{v}_1$  e  $d\vec{v}_2$  são vetores infinitesimais tangentes a essa superfície em um ponto  $P$ , podemos escrever

$$d\vec{v}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} d\tau, \quad d\vec{v}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} d\sigma, \quad (2.21)$$

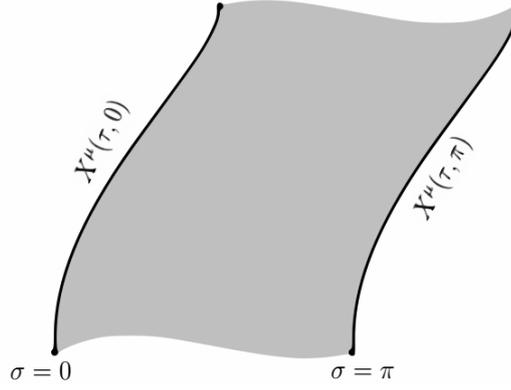


Figura 2.2: Representação da linha-mundo dos extremos da corda.

de modo que o elemento infinitesimal de área pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 dA &= |d\vec{v}_1 \times d\vec{v}_2| \\
 &= |d\vec{v}_1| |d\vec{v}_2| |\sin \theta| \\
 &= |d\vec{v}_1| |d\vec{v}_2| \sqrt{\sin^2 \theta} \\
 &= |d\vec{v}_1| |d\vec{v}_2| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\
 &= \sqrt{|d\vec{v}_1|^2 |d\vec{v}_2|^2 - |d\vec{v}_1|^2 |d\vec{v}_2|^2 \cos^2 \theta} \\
 &= \sqrt{(d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_1)(d\vec{v}_2 \cdot d\vec{v}_2) - (d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_2)^2} \\
 &= d\tau d\sigma \sqrt{\left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} \right) \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} \right) - \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} \right)^2}. \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

Assim, a área total é dada pela integral de  $dA$  sobre o espaço de parâmetros:

$$A[\vec{r}(\tau, \sigma)] = \int d\tau \int d\sigma \sqrt{\left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} \right) \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} \right) - \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} \right)^2}. \tag{2.23}$$

É natural tentar generalizar este resultado e propor que o funcional de área da folha-mundo possa ser escrito como:

$$A[X^\mu(\tau, \sigma)] \stackrel{?}{=} \int d\tau \int d\sigma \sqrt{\left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} \right) \left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \right) - \left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \right)^2}, \tag{2.24}$$

onde apenas fizemos a substituição  $\vec{r} \rightarrow X^\mu$  e generalizamos o produto escalar euclidiano para o espaço de Minkowski. De fato, essa generalização é válida salvo por uma mudança de sinal no argumento da raiz quadrada, pois, como iremos demonstrar a seguir:

$$\left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} \right) \left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \right) - \left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \right)^2 < 0, \tag{2.25}$$

e a área da folha-mundo deve resultar em um valor real positivo.

Para mostrar (2.25), considere um subespaço vetorial formado por todos os vetores tangentes à folha-mundo em um dado ponto  $P$ , que possuem a seguinte forma:

$$V^\mu(\lambda) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} + \lambda \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}, \tag{2.26}$$

onde  $\lambda \in (-\infty, \infty)$ . Para verificar se, para um dado  $\lambda$ ,  $V^\mu(\lambda)$  é um vetor do tipo-tempo ou tipo-espaço, calculamos  $V^2$ :

$$V^2 = V^\mu V_\mu = \left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \right)^2 + \lambda^2 \left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \right)^2 + 2\lambda \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}. \quad (2.27)$$

Note que (2.27) é uma equação de segundo grau na variável  $\lambda$ , cujas raízes são dadas por

$$\lambda = \left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \right)^{-2} \left[ - \left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \right)^2 - \left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \right)^2 \left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \right)^2} \right]. \quad (2.28)$$

Uma vez que  $V^2$  pode assumir valores negativos e positivos, essa equação deve possuir duas raízes reais distintas. Logo:

$$\left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \right)^2 - \left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \right)^2 \left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \right)^2 > 0. \quad (2.29)$$

Desse modo, o funcional de área que gera o resultado correto no caso relativístico deve ser:

$$A[X^\mu(\tau, \sigma)] = \int d\tau \int d\sigma \sqrt{\left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma} \right)^2 - \left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \right)^2 \left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \right)^2}. \quad (2.30)$$

Essa equação pode ser reescrita introduzindo a *métrica induzida*  $h$ , cujas componentes são

$$h_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta}, \quad \xi^1 = \tau, \quad \xi^2 = \sigma, \quad (2.31)$$

ou, na forma matricial:

$$h = \begin{pmatrix} \dot{X}^\mu \dot{X}_\mu & \dot{X}^\mu X'_\mu \\ \dot{X}^\mu X'_\mu & X'^\mu X'_\mu \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

onde definimos a notação

$$\dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \quad \text{e} \quad X'^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}. \quad (2.33)$$

Com essas definições, (2.30) fica:

$$\begin{aligned} A[X^\mu(\tau, \sigma)] &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} \\ &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{-\det h}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Usando a prescrição inicial que aprendemos com a partícula livre, vamos propor que a ação da corda livre relativística — denominada *ação de Nambu-Goto* — seja proporcional a (2.34):

$$S_{NG} = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}. \quad (2.35)$$

onde  $-\frac{T_0}{c}$  é a constante de proporcionalidade, sendo  $T_0$  a tensão intrínseca da corda. Neste caso, podemos definir uma densidade Lagrangiana, dada por

$$\mathcal{L}(\dot{X}, X') = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}. \quad (2.36)$$

## 2.3 Equações de Movimento e Condições de Contorno

Considere uma variação infinitesimal em cada ponto da folha-mundo

$$X^\mu(\tau, \sigma) \longrightarrow X^\mu(\tau, \sigma) + \delta X^\mu(\tau, \sigma) \quad (2.37)$$

que satisfaz a seguinte condição:

$$\delta X^\mu(\tau, \sigma) \Big|_{\tau_i} = \delta X^\mu(\tau, \sigma) \Big|_{\tau_f} = 0. \quad (2.38)$$

Essa variação pode ser visualizada na Figura 2.3.

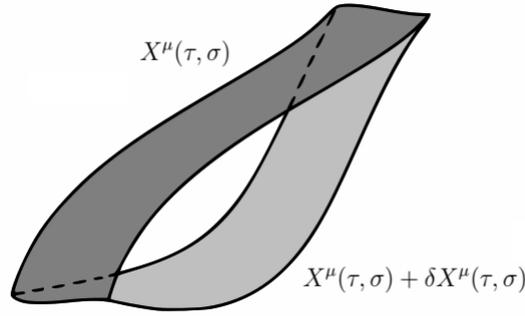


Figura 2.3: Variação infinitesimal na folha-mundo, mantendo os extremos fixos.

Aplicando (2.37) na ação de Nambu-Goto, temos

$$S[\dot{X} + \delta\dot{X}, X' + \delta X'] = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}^\mu + \delta\dot{X}^\mu, X'^\mu + \delta X'^\mu). \quad (2.39)$$

Expandindo o integrando até primeira ordem e definindo a variação infinitesimal  $\delta S = S[\dot{X} + \delta\dot{X}, X' + \delta X'] - S[\dot{X}, X']$ , obtemos

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \delta \dot{X}^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} \delta X'^\mu \right]. \quad (2.40)$$

Simplificando a notação

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \equiv \mathcal{P}_\mu^\tau = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}, \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} \equiv \mathcal{P}_\mu^\sigma = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}, \quad (2.42)$$

e usando a seguinte propriedade

$$\delta \left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau}, \quad \delta \left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \right) = \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma}, \quad (2.43)$$

podemos reescrever (2.40):

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[ \mathcal{P}_\mu^\tau \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial\tau} + \mathcal{P}_\mu^\sigma \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial\sigma} \right] \\
 &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[ \frac{\partial}{\partial\tau} (\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\tau) + \frac{\partial}{\partial\sigma} (\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma) - \delta X^\mu \left( \frac{\partial\mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial\tau} + \frac{\partial\mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial\sigma} \right) \right] \\
 &= \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left( \delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\tau \Big|_{\tau_i}^{\tau_f} \right) + \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left( \delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma \Big|_0^{\sigma_1} \right) \\
 &\quad - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[ \delta X^\mu \left( \frac{\partial\mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial\tau} + \frac{\partial\mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial\sigma} \right) \right]. \tag{2.44}
 \end{aligned}$$

O primeiro termo em (2.44) é nulo devido a condição (2.38). Pelo princípio da mínima ação, obtemos as equações de movimento impondo que a ação seja estacionária, isto é,  $\delta S = 0$  para qualquer  $\delta X^\mu$ :

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left( \delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma \right) \Big|_0^{\sigma_1} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[ \delta X^\mu \left( \frac{\partial\mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial\tau} + \frac{\partial\mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial\sigma} \right) \right] = 0. \tag{2.45}$$

Do segundo termo obtemos as equações de movimento:

$$\frac{\partial\mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial\tau} + \frac{\partial\mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial\sigma} = 0. \tag{2.46}$$

Para cordas fechadas, temos que  $\sigma = \sigma_1$  e  $\sigma = 0$  representam o mesmo ponto sobre a corda, de modo que o primeiro termo em (2.45) é nulo. No entanto, este termo requer mais atenção no caso de cordas abertas, pois é calculado nos extremos do intervalo do parâmetro  $\sigma$  e portanto está relacionado com as condições de contorno. Vamos começar pela condição de contorno de Dirichlet, definida como:

$$\frac{\partial X^\mu(\tau, 0)}{\partial\tau} = \frac{\partial X^\mu(\tau, \pi)}{\partial\tau} = 0, \quad \mu \neq 0. \tag{2.47}$$

Excluimos a componente  $\mu = 0$  uma vez que  $\dot{X}^0$  jamais terá valor nulo — lembre-se que  $\tau$  está de alguma forma associado a passagem do tempo. A equação (2.47) impõe que os extremos da cordas são fixos. Com isso:

$$\delta X^\mu(\tau, 0) = \delta X^\mu(\tau, \pi) = 0, \quad \mu \neq 0. \tag{2.48}$$

Podemos também impor a *condição dos extremos livres*:

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, 0) = \mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, \pi) = 0. \tag{2.49}$$

Como o próprio nome sugere, essa condição de contorno não impõe nenhuma limitação física ao movimento dos extremos da corda, desde que (2.49) seja satisfeita. A componente  $\mu = 0$  sempre satisfaz (2.49), enquanto para as demais componentes podemos misturar ambas as condições de contorno. Como consequência, o primeiro termo em (2.45) é sempre nulo para cordas abertas e fechadas.

Certamente resolver a equação (2.46) não é uma tarefa trivial. Felizmente, a escolha correta de parametrização na ação de Nambu-Goto torna essa tarefa mais simples.

## 2.4 Reparametrização

Considere a seguinte transformação de parâmetros:

$$\tau \longrightarrow \tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\tau, \sigma), \quad (2.50)$$

$$\sigma \longrightarrow \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\tau, \sigma). \quad (2.51)$$

Escrevendo a métrica induzida para os novos parâmetros:

$$\tilde{h}_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \tilde{\xi}^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \tilde{\xi}^\beta}, \quad \tilde{\xi}^1 = \tilde{\tau}, \quad \tilde{\xi}^2 = \tilde{\sigma}. \quad (2.52)$$

Podemos usar as matrizes jacobianas  $M$  e  $\tilde{M}$  para estabelecer uma relação entre ambas as parametrizações:

$$d\xi^\alpha d\xi^\beta = |\det M| d\tilde{\xi}^\alpha d\tilde{\xi}^\beta, \quad (2.53)$$

$$d\tilde{\xi}^\alpha d\tilde{\xi}^\beta = |\det \tilde{M}| d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad (2.54)$$

onde as componentes de  $M$  e  $\tilde{M}$  são dadas por:

$$M^\alpha{}_\beta \equiv \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \tilde{\xi}^\beta}, \quad \tilde{M}^\alpha{}_\beta \equiv \frac{\partial \tilde{\xi}^\alpha}{\partial \xi^\beta}. \quad (2.55)$$

Isolando  $d\xi^\alpha d\xi^\beta$  em (2.54) e substituindo em (2.53), descobrimos que

$$|\det M| |\det \tilde{M}| = 1. \quad (2.56)$$

Considere um vetor infinitesimal arbitrário tangente a folha-mundo, cujo módulo pode ser escrito em termos da métrica induzida:

$$\begin{aligned} dX^2 &= \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \\ &= h_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Como  $dX^2$  deve ser invariante sob reparametrização, vale a igualdade:

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta &= \tilde{h}_{qp} d\tilde{\xi}^q d\tilde{\xi}^p \\ &= \tilde{h}_{qp} \frac{\partial \tilde{\xi}^q}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \tilde{\xi}^p}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Temos então

$$h_{\alpha\beta} = \tilde{h}_{qp} \frac{\partial \tilde{\xi}^q}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \tilde{\xi}^p}{\partial \xi^\beta}. \quad (2.59)$$

Pela definição (2.55), a equação (2.59) fica:

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta} &= \tilde{h}_{qp} \tilde{M}^q{}_\alpha \tilde{M}^p{}_\beta \\ &= (\tilde{M}^T)_\alpha{}^q \tilde{h}_{qp} \tilde{M}^p{}_\beta. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Reescrevendo (2.60) na notação matricial e tomando o determinante:

$$\det h = (\det \tilde{M}^T) (\det \tilde{h}) (\det \tilde{M}). \quad (2.61)$$

Usando a propriedade  $\det \tilde{M}^T = \det \tilde{M}$ , temos:

$$\det h = (\det \tilde{h})(\det \tilde{M})^2. \quad (2.62)$$

Substituindo (2.53), (2.56) e (2.62) no funcional de área (2.34):

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\tau}_i}^{\tilde{\tau}_f} d\tilde{\tau} \int_0^{\tilde{\sigma}_1} d\tilde{\sigma} \sqrt{-\det \tilde{h}} &= \int_{\tilde{\tau}_i}^{\tilde{\tau}_f} d\tilde{\tau} \int_0^{\tilde{\sigma}_1} d\tilde{\sigma} |\det \tilde{M}| \sqrt{-(\det \tilde{h})(\det M)^2} \\ &= \int_{\tilde{\tau}_i}^{\tilde{\tau}_f} d\tilde{\tau} \int_0^{\tilde{\sigma}_1} d\tilde{\sigma} |\det \tilde{M}| |\det M| \sqrt{-\det \tilde{h}} \\ &= \int_{\tilde{\tau}_i}^{\tilde{\tau}_f} d\tilde{\tau} \int_0^{\tilde{\sigma}_1} d\tilde{\sigma} \sqrt{-\det \tilde{h}}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Como resultado de (2.63), concluímos que o funcional de área da folha-mundo é invariante sob reparametrização — assim como a ação de Nambu-Goto, por consequência. Uma vez que diferentes parametrizações geram as mesmas equações de movimento, ao escolher uma parametrização específica estamos fundamentalmente realizando uma escolha de *gauge*, que se feita convenientemente, pode simplificar consideravelmente as equações de movimento.

## 2.5 Gauge Estático

Para desenvolver a nossa intuição sobre a física envolvida na dinâmica de cordas relativísticas, vamos explorar uma parametrização particular para  $\tau$ , onde:

$$\tau = t. \quad (2.64)$$

Com essa escolha, as linhas sobre a folha-mundo onde  $\tau$  é constante representam a corda vista em repouso por um observador inercial. Por esse motivo, essa parametrização recebe o nome de *Gauge Estático*. Em termos das coordenadas da corda:

$$X^\mu(t, \sigma) = (ct, \vec{X}(t, \sigma)). \quad (2.65)$$

A escolha do gauge estático fixa a parametrização de  $\tau$ , fazendo com que o movimento da corda seja mapeado por  $\vec{X}(t, \sigma)$ : uma superfície espacial que representa a corda em todos os instantes. A fim de escolher uma parametrização útil para  $\sigma$  de modo a simplificar as equações de movimento, vamos primeiro definir um vetor tangente à corda em um dado ponto associado a um  $\sigma$  arbitrário. Para isso, definimos um novo parâmetro  $s(\sigma)$  associado à medida de comprimento ao longo da corda, isto é,

$$s(\sigma_0) = 0 \quad \text{e} \quad s(\sigma_1) = l, \quad (2.66)$$

sendo  $l$  o comprimento total da corda. Note que  $ds$  é o comprimento de um vetor  $d\vec{X}$  que surge ao variar infinitesimalmente o parâmetro  $\sigma$ , mantendo  $t$  constante:

$$ds = |d\vec{X}| = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right| d\sigma. \quad (2.67)$$

O vetor

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{ds} \quad (2.68)$$

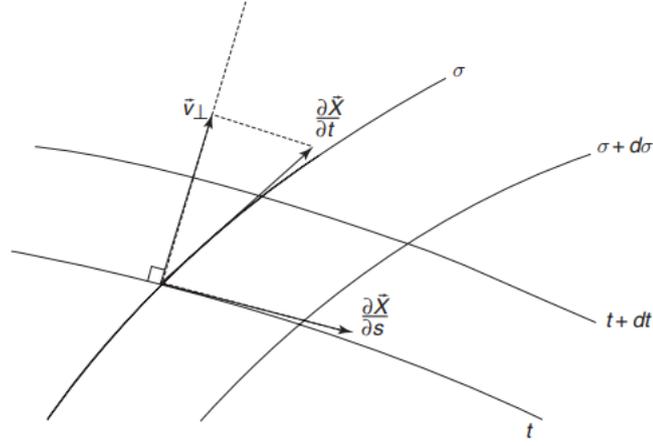


Figura 2.4: Ao variar os parâmetros  $\tau$  e  $\sigma$  infinitesimalmente, podemos escrever a velocidade transversal em termos de  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$  e  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ . Fonte: [15].

é, por construção, unitário:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 \left( \frac{d\sigma}{ds} \right)^2 = 1, \quad (2.69)$$

onde usamos (2.67).

Vamos definir a velocidade transversal da corda,  $\vec{v}_\perp$ , como sendo a projeção do vetor  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$  na direção perpendicular à corda, ou seja, ortogonal a  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ , como mostra a Figura 2.4. Assim:

$$\vec{v}_\perp \equiv \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}. \quad (2.70)$$

Mantendo a escolha de gauge estático, vamos escrever a ação de Nambu-Goto em termos da velocidade transversal, começando pelo argumento da raiz quadrada:

$$\begin{aligned} (\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2 &= \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 - \left[ -c^2 + \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right] \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 \\ &= \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2 \left( \frac{ds}{d\sigma} \right)^2 + \left[ c^2 - \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right] \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2 \left( \frac{ds}{d\sigma} \right)^2 \\ &= \left( \frac{ds}{d\sigma} \right)^2 \left[ c^2 + \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2 - \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Note que o quadrado do módulo da velocidade transversal condiz com o termo que aparece na equação (2.71):

$$\begin{aligned}
 |\vec{v}_\perp|^2 &= v_\perp^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}\right)^2 \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}\right)^2}_{=1} - 2 \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}\right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \\
 &= \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}\right)^2.
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

Logo:

$$(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2 = \left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 (c^2 - v_\perp^2). \tag{2.73}$$

Usando estes resultados para reescrever a ação de Nambu-Goto, obtemos

$$S_{NG} = -\frac{T_0}{c} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{\sigma_i} d\sigma \left( c \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \right) \tag{2.74}$$

$$= -T_0 \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{\sigma_i} d\sigma \left( \frac{ds}{d\sigma} \right) \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}. \tag{2.75}$$

Com essa escolha de parametrização, a Lagrangiana da corda livre escrita em termos da velocidade transversal fica:

$$L = -T_0 \int ds \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}, \tag{2.76}$$

que é a generalização natural da Lagrangiana da partícula livre, vista em (2.5). Por comparação, vemos que  $T_0 ds$  é o termo associado à energia de repouso de um elemento infinitesimal da corda. Podemos intuir que a massa de repouso da corda livre relativística é proporcional à energia potencial armazenada na mesma, devido a sua tensão.

### 2.5.1 Parâmetro de Inclinação e Unidades Naturais

Como citado no Capítulo 1, o momento angular de uma corda clássica rígida em rotação é proporcional ao quadrado de sua energia:

$$J = \alpha' E^2, \tag{2.77}$$

sendo  $\alpha'$  a constante de proporcionalidade, chamada *parâmetro de inclinação*:

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi T_0 c}. \tag{2.78}$$

Este nome se deve à tentativa de usar o modelo de cordas para explicar as trajetórias de Regge para mésons leves:

$$J = \alpha_0 + \alpha' E^2, \tag{2.79}$$

onde neste caso,  $\alpha'$  é o parâmetro que determina a inclinação da curva dada por (2.79). Por razões históricas, costuma-se escrever  $T_0$  em termos do parâmetro  $\alpha'$  usando (2.78):

$$T_0 = \frac{1}{2\pi\alpha'c}. \tag{2.80}$$

Convenciona-se escrever a ação de Nambu-Goto e todas as quantidades físicas associadas à corda em função de  $\alpha'$ . Substituindo (2.80) em (2.35):

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'c^2} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}. \quad (2.81)$$

Para fins de simplificação, é usual adotar unidades naturais, onde  $\hbar = c = 1$ . Vamos demandar que os parâmetros  $\tau$  e  $\sigma$  sejam adimensionais, mantendo a sua interpretação física previamente estabelecida. A ação de Nambu-Goto pode então ser escrita como:

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}. \quad (2.82)$$

As densidades de momento (2.41) e (2.42) tornam-se:

$$\mathcal{P}_\mu^\tau(\tau, \sigma) = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X')X'_\mu - (X')^2\dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}}, \quad (2.83)$$

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, \sigma) = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X')\dot{X}_\mu - (\dot{X})^2X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}}. \quad (2.84)$$

## 2.6 Conclusão

Ao estudar a ação da partícula livre, verificamos que a mesma é proporcional à linha-mundo da partícula e invariante sob reparametrização. Com base nisso, intuímos que a ação da corda livre relativística deve ser proporcional à área da folha-mundo da corda, e isso nos levou à formulação da ação de Nambu-Goto. Usando o princípio da mínima ação, encontramos as equações de movimento e analisamos as condições de contorno no contexto das cordas abertas e fechadas. Com a parametrização do *Gauge Estático*, vimos que a massa de repouso da corda está relacionada à tensão intrínseca da corda. Por fim, reescrevemos a ação de Nambu-Goto em termos do parâmetro de inclinação  $\alpha'$  usando unidades naturais.

O próximo passo é continuar explorando a invariância sob reparametrização da ação de Nambu-Goto para então resolver as equações de movimento (2.46).

## Capítulo 3

### Gauge do Cone de Luz

Baseando-se em nossa liberdade de procurar por uma parametrização que simplifique as equações de movimento (2.46), vamos definir uma classe de parametrizações caracterizadas pela seguinte condição:

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \lambda\tau, \quad \lambda \neq 0, \quad (3.1)$$

onde  $\lambda$  é uma constante. A escolha das componentes de  $n_\mu$  define uma parametrização onde  $\tau$  é combinação linear das coordenadas da corda. Note que a escolha de gauge estático (2.65) equivale a tomar

$$n_\mu = (1, 0, \dots, 0) \quad \text{e} \quad \lambda = c. \quad (3.2)$$

Se o momento total da corda,  $p^\mu$ , é conservado, então a quantidade  $n^\mu p_\mu$  é uma constante. Isso nos permite redefinir  $\lambda = \tilde{\lambda}(n^\mu p_\mu)$  e escrever

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \tilde{\lambda}(n^\mu p_\mu)\tau. \quad (3.3)$$

O vetor  $n_\mu$  aparece explicitamente em ambos os lados de (3.3), o que torna a sua unidade irrelevante para os nossos propósitos. Com a análise dimensional dos termos restantes, podemos mostrar que  $\tilde{\lambda}$  é proporcional ao parâmetro de inclinação  $\alpha'$ . Vamos definir:

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) \equiv \begin{cases} 2\alpha'(n_\mu p^\mu)\tau & , \text{ para cordas abertas;} \\ \alpha'(n_\mu p^\mu)\tau & , \text{ para cordas fechadas.} \end{cases} \quad (3.4)$$

Uma vez escolhida a classe de parametrização para  $\tau$ , devemos encontrar a parametrização de  $\sigma$  associada. Considere o efeito de uma reparametrização  $\sigma \rightarrow \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\sigma)$ . Usando a regra da cadeia

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tilde{\sigma}} \frac{d\tilde{\sigma}}{d\sigma} \quad (3.5)$$

e inserindo  $n_\mu$  na definição de  $\mathcal{P}^{\tau\mu}$  em (2.83), obtemos

$$n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \sigma) = \left( \frac{d\tilde{\sigma}}{d\sigma} \right)^2 \left| \frac{d\tilde{\sigma}}{d\sigma} \right|^{-1} n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \tilde{\sigma}). \quad (3.6)$$

É possível encontrar uma parametrização tal que  $n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \sigma)$  não dependa explicitamente de  $\sigma$ . Em outras palavras, existe um  $\tilde{\sigma}$  que satisfaz a equação diferencial

$$\left( \frac{d\tilde{\sigma}}{d\sigma} \right)^2 \left| \frac{d\tilde{\sigma}}{d\sigma} \right|^{-1} n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \tilde{\sigma}) = a(\tau). \quad (3.7)$$

Assumindo este resultado, temos que

$$n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \sigma) = a(\tau). \quad (3.8)$$

Integrando ambos os lados em relação a  $\sigma \in [0, \sigma_1]$ , obtemos

$$n_\mu \int_0^{\sigma_1} d\sigma \mathcal{P}^{\tau\mu} = a(\tau) \int_0^{\sigma_1} d\sigma. \quad (3.9)$$

O lado esquerdo de (3.9) é o momento total  $p^\mu$ , multiplicado por  $n_\mu$ . Fazendo a integral no lado direito, chegamos ao seguinte resultado:

$$n_\mu p^\mu = a(\tau) \sigma_1. \quad (3.10)$$

Como  $n_\mu p^\mu$  e  $\sigma_1$  são constantes, concluímos que  $a(\tau)$  é uma constante:

$$a = \frac{n_\mu p^\mu}{\sigma_1}. \quad (3.11)$$

Substituindo (3.11) em (3.9), obtemos

$$n_\mu p^\mu = n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu} \sigma_1. \quad (3.12)$$

Usando a definição (2.18), podemos resumir as equações (3.4) e (3.12) da seguinte forma:

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \beta \alpha' (n_\mu p^\mu) \tau, \quad (3.13)$$

$$n_\mu p^\mu = \frac{2\pi}{\beta} n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu}, \quad (3.14)$$

onde

$$\beta \equiv \begin{cases} 2 & , \text{ para cordas abertas;} \\ 1 & , \text{ para cordas fechadas.} \end{cases} \quad (3.15)$$

Vamos agora analisar o que ocorre com  $\mathcal{P}^{\sigma\mu}(\tau, \sigma)$ . Primeiro, multiplicamos as equações de movimento (2.46) por  $n_\mu$ :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu}) = -\frac{\partial}{\partial \sigma} (n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu}). \quad (3.16)$$

Ao substituir (3.12) em (3.16), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} (n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu}) = 0. \quad (3.17)$$

Isso implica que a quantidade  $n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu}$  independe do parâmetro  $\sigma$ . Considere uma corda aberta que satisfaz a condição de contorno dos extremos livres. Inserindo  $n_\mu$  em (2.49), temos:

$$n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu}(\tau, 0) = n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu}(\tau, \pi) = 0. \quad (3.18)$$

Em geral, o momento total  $p^\mu$  não é conservado se a corda satisfaz a condição de Dirichlet (2.47). Isto não é surpreendente — o mesmo ocorre para uma corda não-relativística presa em uma parede, por exemplo. Para este caso, escolhemos as componentes de  $n_\mu$  de tal

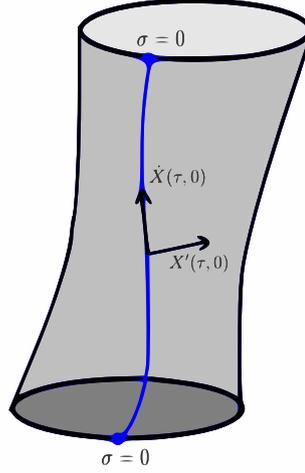


Figura 3.1: Podemos construir uma linha  $X^\mu(\tau, 0)$  (em azul) sobre a folha-mundo de uma corda aberta impondo que, em cada ponto dessa linha, a equação (3.22) seja satisfeita.

maneira que a quantidade  $n_\mu p^\mu$  seja conservada e  $n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu}$  também satisfaça a condição (3.18).

Ora, se  $n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu}$  não depende explicitamente de  $\sigma$  e simultaneamente é nulo nos extremos da corda aberta, então  $n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu}$  deve ser nulo para qualquer  $\sigma$ :

$$n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0, \quad \forall \sigma \in [0, \pi]. \quad (3.19)$$

Substituindo (2.84) e (3.14) em (3.19), com  $\beta = 2$ , temos

$$\begin{aligned} n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu} &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') \partial_\tau (n \cdot X) - (\dot{X})^2 \partial_\sigma (n \cdot X)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') (2\alpha' n \cdot p)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Uma vez que  $2\alpha' n_\mu p^\mu$  é uma constante, concluímos que

$$\dot{X} \cdot X' = 0, \quad \text{para cordas abertas.} \quad (3.21)$$

O que podemos dizer a respeito da quantidade  $\dot{X} \cdot X'$  para cordas fechadas? Pela condição de periodicidade (2.19), temos que  $\sigma = 0$  e  $\sigma = 2\pi$  representam o mesmo ponto sobre a corda. Em princípio, podemos escolher este ponto arbitrariamente. Essa ambiguidade nos permite definir uma curva  $X^\mu(\tau, 0)$ , tal que:

$$\dot{X}(\tau, 0) \cdot X'(\tau, 0) = 0, \quad (3.22)$$

como mostra a Figura 3.1. Uma vez fixado um ponto  $P$  associado a  $\sigma = 0$  para um dado valor de  $\tau$ , usamos a curva  $X^\mu(\tau, 0)$  para encontrar todos os demais pontos com  $\sigma = 0$ , que satisfazem a nossa escolha (3.22).

Vamos agora calcular a quantidade  $n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu}(\tau, 0)$ , usando as equações (2.84), (3.22), (3.14) e  $\beta = 1$ :

$$n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu}(\tau, 0) = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') (\alpha' n \cdot p)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} = 0. \quad (3.23)$$

Como  $n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu}$  é zero para  $\sigma = 0$  e a equação (3.17) também é válida para cordas abertas, então  $n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu}$  deve ser zero para qualquer valor de  $\sigma$ :

$$n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0, \quad \forall \sigma \in [0, 2\pi]. \quad (3.24)$$

Olhando novamente para a equação (3.23), agora válida para  $\sigma \in [0, 2\pi]$ , concluímos que:

$$\dot{X} \cdot X' = 0, \quad \text{para cordas abertas.} \quad (3.25)$$

Resumindo (3.21) e (3.25):

$$\dot{X} \cdot X' = 0 \quad \text{para cordas abertas e fechadas.} \quad (3.26)$$

O resultado (3.26) tem implicações importantes na teoria clássica de cordas. Podemos usá-lo para simplificar a equação (2.41):

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(X')^2 \dot{X}^\mu}{\sqrt{-(\dot{X})^2 (X')^2}}. \quad (3.27)$$

Ao inserir (3.27) em (3.14), obtemos

$$\begin{aligned} n_\mu p^\mu &= \frac{2\pi}{\beta} n_\mu \left( \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(X')^2 \dot{X}^\mu}{\sqrt{-(\dot{X})^2 (X')^2}} \right) \\ &= \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{(X')^2 \partial_\tau (n_\mu X^\mu)}{\sqrt{-(\dot{X})^2 (X')^2}} \\ &= \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{(X')^2 \beta\alpha' (n_\mu p^\mu)}{\sqrt{-(\dot{X})^2 (X')^2}} \\ &= \frac{(X')^2 (n_\mu p^\mu)}{\sqrt{-(\dot{X})^2 (X')^2}}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde podemos simplificar o fator  $n_\mu p^\mu$  que aparece em ambos os lados:

$$(X')^2 = \sqrt{-(\dot{X})^2 (X')^2}. \quad (3.29)$$

Evidenciando  $(X')^2$ , essa equação fica:

$$(X')^2 \left[ (X')^2 + (\dot{X})^2 \right] = 0. \quad (3.30)$$

Uma vez que  $X^{\mu'}$  é um vetor tangente à corda, temos que  $(X')^2 > 0$ . A equação (3.30) resulta em:

$$(X')^2 + (\dot{X})^2 = 0. \quad (3.31)$$

Podemos então resumir (3.26) e (3.31) em uma única equação:

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0. \quad (3.32)$$

Substituir (3.29) em (3.27) nos permite simplificar consideravelmente a densidade de momento  $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^{\tau\mu} &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(X')^2 \dot{X}^\mu}{\sqrt{-(\dot{X})^2 (X')^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(X')^2 \dot{X}^\mu}{(X')^2} \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu.\end{aligned}\tag{3.33}$$

O mesmo se dá para  $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^{\sigma\mu} &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X})^2 X^{\mu'}}{\sqrt{-(\dot{X})^2 (X')^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X})^2 X^{\mu'}}{(X')^2} \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(X')^2 X^{\mu'}}{(X')^2} \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu'}.\end{aligned}\tag{3.34}$$

Como consequência, também simplificamos as equações de movimento:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{P}^{\tau\mu}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^{\sigma\mu}}{\partial \sigma} &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu'} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} (\ddot{X}^\mu - X^{\mu''}) = 0,\end{aligned}\tag{3.35}$$

da qual obtemos

$$\ddot{X}^\mu - X^{\mu''} = 0.\tag{3.36}$$

Eis o resultado que procurávamos: as equações de movimento da corda livre relativística têm a mesma forma de uma equação de onda! Para resolvê-la, precisamos conhecer as condições de contorno. Com o resultado (3.34), a condição de contorno dos extremos livres (2.49) pode ser reinterpretada como a condição de contorno de Neumann:

$$\left. \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} = \left. \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=\pi} = 0.\tag{3.37}$$

### 3.1 Solução das Equações de Movimento para Cordas Abertas

A solução geral da equação (3.36) possui a forma

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} (f^\mu(\tau + \sigma) + g^\mu(\tau - \sigma)),\tag{3.38}$$

onde  $f^\mu$  e  $g^\mu$  são funções de um único argumento que representam uma onda se movendo no sentido de decrescimento e crescimento do parâmetro  $\sigma$ , respectivamente. Vamos considerar uma corda aberta que satisfaz a condição de Neumann (3.37), primeiramente para  $\sigma = 0$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma} (f^\mu(\tau + \sigma) + g^\mu(\tau - \sigma)) \Big|_{\sigma=0} \\ &= \frac{1}{2} (f^{\mu'}(\tau + \sigma) - g^{\mu'}(\tau - \sigma)) \Big|_{\sigma=0} \\ &= \frac{1}{2} (f^{\mu'}(\tau) - g^{\mu'}(\tau)) = 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Logo, em  $\sigma = 0$ ,  $f^{\mu'}(\tau) = g^{\mu'}(\tau)$ . Essa condição é naturalmente satisfeita se  $g^\mu(\tau - \sigma) = f^\mu(\tau - \sigma) + c^\mu$ , onde  $c^\mu$  é uma constante de integração. A solução geral (3.38) fica

$$\begin{aligned} X^\mu(\tau, \sigma) &= \frac{1}{2} (f^\mu(\tau + \sigma) + f^\mu(\tau - \sigma) + c^\mu) \\ &= \frac{1}{2} \left( f^\mu(\tau + \sigma) + \frac{1}{2}c^\mu + f^\mu(\tau - \sigma) + \frac{1}{2}c^\mu \right) \\ &= \frac{1}{2} (f^\mu(\tau + \sigma) + f^\mu(\tau - \sigma)), \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde na última linha apenas redefinimos  $f^\mu + \frac{1}{2}c^\mu \rightarrow f^\mu$ .

Vamos agora aplicar a condição de Neumann para  $\sigma = \pi$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=\pi} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma} (f^\mu(\tau + \sigma) + f^\mu(\tau - \sigma)) \Big|_{\sigma=\pi} \\ &= \frac{1}{2} (f^{\mu'}(\tau + \sigma) - f^{\mu'}(\tau - \sigma)) \Big|_{\sigma=\pi} \\ &= \frac{1}{2} (f^{\mu'}(\tau + \pi) - f^{\mu'}(\tau - \pi)) = 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Concluimos que  $f^{\mu'}$  tem período  $2\pi$ :

$$f^{\mu'}(\tau) = f^{\mu'}(\tau + 2\pi). \quad (3.42)$$

Portanto podemos naturalmente expandí-la em uma série de Fourier:

$$f^{\mu'}(u) = f_1^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^\mu \cos(nu) + b_n^\mu \sin(nu)), \quad (3.43)$$

onde  $f_1^\mu$  é uma constante. Integrando em relação a  $u$  e redefinindo as constantes, obtemos:

$$f^\mu(u) = f_0^\mu + f_1^\mu u + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos(nu) + B_n^\mu \sin(nu)). \quad (3.44)$$

Substituindo (3.44) em (3.40):

$$\begin{aligned}
X^\mu(\tau, \sigma) &= \frac{1}{2} \left[ f_0^\mu + f_1^\mu(\tau + \sigma) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n^\mu \cos(n(\tau + \sigma)) + B_n^\mu \sin(n(\tau + \sigma)) \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[ f_0^\mu + f_1^\mu(\tau - \sigma) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n^\mu \cos(n(\tau - \sigma)) + B_n^\mu \sin(n(\tau - \sigma)) \right) \right] \\
&= f_0^\mu + f_1^\mu \tau + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n^\mu \left( \cos(n\tau + n\sigma) + \cos(n\tau - n\sigma) \right) \right. \\
&\quad \left. + B_n^\mu \left( \sin(n\tau + n\sigma) + \sin(n\tau - n\sigma) \right) \right] \\
&= f_0^\mu + f_1^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau) \right) \cos(n\sigma) \tag{3.45}
\end{aligned}$$

onde usamos as propriedades

$$\begin{aligned}
\cos(a \pm b) &= \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b), \\
\sin(a \pm b) &= \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b). \tag{3.46}
\end{aligned}$$

Substituindo (3.45) em (3.33), obtemos

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \left[ f_1^\mu - \sum_{n=1}^{\infty} n \left( A_n^\mu \sin(n\tau) - B_n^\mu \cos(n\tau) \right) \cos(n\sigma) \right]. \tag{3.47}$$

Ao integrar (3.47) em relação a  $\sigma \in [0, \pi]$ , calculamos o momento total carregado pela corda:

$$\begin{aligned}
p^\mu &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \left[ f_1^\mu \int_0^\pi d\sigma - \sum_{n=1}^{\infty} n \left( A_n^\mu \sin(n\tau) - B_n^\mu \cos(n\tau) \right) \underbrace{\int_0^\pi d\sigma \cos(n\sigma)}_{=0} \right] \\
&= \frac{1}{2\alpha'} f_1^\mu, \tag{3.48}
\end{aligned}$$

de tal modo que determinamos  $f_1^\mu$ :

$$f_1^\mu = 2\alpha' p^\mu. \tag{3.49}$$

Note que, quando  $A_n^\mu = B_n^\mu = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , as equações de movimento devem se reduzir ao caso de uma partícula livre:

$$X^\mu(\tau) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau, \tag{3.50}$$

sendo  $x_0^\mu$  a coordenada da partícula para  $\tau = \tau_i$ . Portanto, identificamos  $f_0^\mu = x_0^\mu$ . Essa equação também descreve o movimento do centro de massa da corda, como mostra a Figura 3.2.

Podemos usar a identidade de Euler para escrever :

$$\begin{aligned}
A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau) &= \frac{A_n^\mu}{2} \left( e^{in\tau} + e^{-in\tau} \right) + \frac{B_n^\mu}{2i} \left( e^{in\tau} - e^{-in\tau} \right) \\
&= -\frac{i}{2} \left[ (B_n^\mu + iA_n^\mu) e^{in\tau} - (B_n^\mu - iA_n^\mu) e^{-in\tau} \right] \\
&= -i\sqrt{\frac{2\alpha'}{n}} \left( a_n^{*\mu} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau} \right), \tag{3.51}
\end{aligned}$$

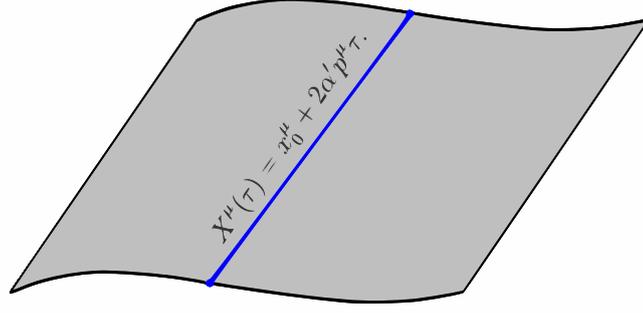


Figura 3.2: O movimento do centro de massa de uma corda livre (representado pela linha azul) é dado pela equação (3.50).

onde

$$a_n^\mu \equiv \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{2\alpha'}} (B_n^\mu - iA_n^\mu) \quad (3.52)$$

são coeficientes adimensionais. Vamos também definir:

$$\alpha_0^\mu \equiv \sqrt{2\alpha'} p^\mu, \quad (3.53)$$

$$\alpha_n^\mu \equiv a_n^\mu \sqrt{n}, \quad (3.54)$$

$$\alpha_{-n}^\mu \equiv a_n^{*\mu} \sqrt{n}, \quad (3.55)$$

para  $n \geq 1$ . Substituindo (3.49) e (3.51) junto com os coeficientes (3.53), (3.54) e (3.55) em (3.45), obtemos:

$$\begin{aligned} X^\mu(\tau, \sigma) &= x_0^\mu + 2\alpha' \left( \frac{\alpha_0^\mu}{\sqrt{2\alpha'}} \right) \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{\alpha_{-n}^\mu}{\sqrt{n}} \right) e^{in\tau} - \left( \frac{\alpha_n^\mu}{\sqrt{n}} \right) e^{-in\tau} \right] \frac{\cos(n\sigma)}{\sqrt{n}} \\ &= x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu e^{in\tau} - \alpha_n^\mu e^{-in\tau}) \cos(n\sigma) \\ &= x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'} \left[ \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_{-n}^\mu e^{in\tau} \cos(n\sigma)}_{n \rightarrow -n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \right] \\ &= x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'} \left[ - \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \right] \end{aligned}$$

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (3.56)$$

## 3.2 Gauge do Cone de Luz

Vimos que, com a classe de parametrização definida em (3.13) e (3.14), as equações de movimento tornam-se equações de onda, cuja solução foi obtida em (3.56). Vamos agora escolher uma parametrização específica, denominada *gauge no cone de luz*. Essa escolha

tornará mais simples a quantização da corda livre relativística — tarefa que iremos realizar no próximo capítulo.

O vetor posição escrito nas *coordenadas do cone de luz* tem a forma:

$$x^\mu = (x^+, x^-, x^2, \dots, x^{D-1}) = (x^+, x^-, x^I) \quad (3.57)$$

onde  $x^I = (x^2, \dots, x^{D-1})$  são as *coordenadas transversais* e

$$x^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^1), \quad x^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^1). \quad (3.58)$$

Essas relações representam uma rotação dos eixos  $x^0$  e  $x^1$  por um ângulo de  $45^\circ$ , como mostra a Figura 3.3. Diferenciando (3.58) e multiplicando ambas equações, obtemos

$$2dx^+dx^- = (dx^0)^2 - (dx^1)^2. \quad (3.59)$$

Logo, um intervalo infinitesimal  $-ds^2$  em um espaço-tempo com  $D$  dimensões pode ser escrito como

$$\begin{aligned} -ds^2 &= -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^{D-1})^2 \\ &= -2dx^+dx^- + (dx^2)^2 + \dots + (dx^{D-1})^2 \\ &= \hat{n}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \end{aligned} \quad (3.60)$$

onde

$$\hat{n}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

é a matriz  $D \times D$  que representa a métrica do cone de luz. Com isso, definimos produto entre dois vetores  $a^\mu$  e  $b^\mu$  nas coordenadas do cone de luz como:

$$\begin{aligned} a^\mu b_\mu &= \hat{n}_{\mu\nu}a^\mu b^\nu \\ &= -a^-b^+ - a^+b^- + a^2b^2 + \dots + a^{D-1}b^{D-1} \\ &= -a^-b^+ - a^+b^- + a^I b^I. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Vamos voltar a nossa atenção para o vetor  $n_\mu$ , que define a parametrização da corda. Suponha que ele seja escolhido da seguinte forma:

$$n_\mu = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0 \right), \quad (3.63)$$

de modo que:

$$n_\mu X^\mu = \frac{X^0}{\sqrt{2}} + \frac{X^1}{\sqrt{2}} = X^+, \quad (3.64)$$

$$n_\mu p^\mu = \frac{p^0}{\sqrt{2}} + \frac{p^1}{\sqrt{2}} = p^+, \quad (3.65)$$

$$n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{\mathcal{P}^{\tau 0}}{\sqrt{2}} + \frac{\mathcal{P}^{\tau 1}}{\sqrt{2}} = \mathcal{P}^{\tau+}. \quad (3.66)$$

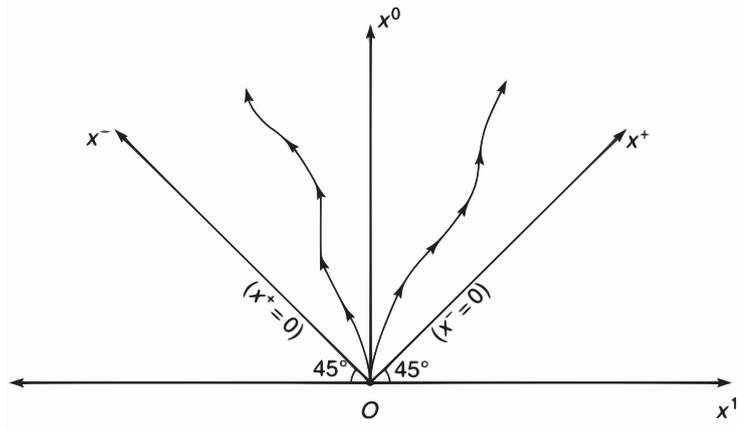


Figura 3.3: Nas coordenadas do cone de luz, os eixos  $x^+$  e  $x^-$  estão rotacionados por um ângulo de  $45^\circ$  em relação aos eixos originais  $x^0$  e  $x^1$ . A linha-mundo de uma partícula sempre reside no interior do cone de luz. Fonte: [15]

Substituindo essas relações em (3.13) e (3.14), respectivamente:

$$X^+ = \beta\alpha' p^+ \tau, \quad (3.67)$$

$$p^+ = \frac{2\pi}{\beta} \mathcal{P}^{\tau+}. \quad (3.68)$$

Essas equações definem o *gauge do cone de luz*. Usando o produto escalar definido em (3.62), podemos reescrever (3.32) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} (\dot{X} \pm X')^2 &= (\dot{X} \pm X') \cdot (\dot{X} \pm X') \\ &= -2(\dot{X}^- \pm X'^-)(\dot{X}^+ \pm X'^+) + (\dot{X}^I \pm X'^I)^2 \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.69)$$

o que nos permite expressar  $\dot{X}^- \pm X'^-$  em termos das coordenadas transversais:

$$(\dot{X}^- \pm X'^-) = \frac{1}{2(\dot{X}^+ \pm X'^+)} (\dot{X}^I \pm X'^I)^2. \quad (3.70)$$

Da equação (3.67) obtemos que

$$\dot{X}^+ = \beta\alpha' p^+ \quad \text{e} \quad X'^+ = 0, \quad (3.71)$$

de modo que a equação (3.70) resulta em:

$$\dot{X}^- \pm X'^- = \frac{1}{2\beta\alpha' p^+} (\dot{X}^I \pm X'^I)^2. \quad (3.72)$$

Essas duas equações determinam  $\dot{X}^-$  e  $X'^-$  em termos de  $\dot{X}^I$  e  $X'^I$ :

$$\dot{X}^- = \frac{1}{2\beta\alpha' p^+} \left[ (\dot{X}^I)^2 + (X'^I)^2 \right], \quad (3.73)$$

$$X'^- = \frac{1}{\beta\alpha' p^+} (\dot{X}^I \cdot X'^I). \quad (3.74)$$

Com isso, podemos escrever o diferencial total

$$dX^- = \dot{X}^- d\tau + X^{-\prime} d\sigma \quad (3.75)$$

e usar (3.73) e (3.74) para determinar completamente  $X^-$  em termos de  $X^I$ , salvo por uma constante de integração  $x_0^-$ .

Uma vez que  $X^+$  é fixado pela parametrização (3.67) e  $X^-$  pode ser obtido em termos das coordenadas transversais, concluímos que a dinâmica da corda livre relativística é dada por um pequeno conjunto de variáveis dinâmicas, a saber:

$$\{X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau I}, p^+, x_0^-\} \quad (3.76)$$

Conhecer este conjunto mínimo de graus de liberdade é de extrema importância: são as variáveis dinâmicas (3.76) que se tornarão operadores na quantização canônica da corda relativística.

### 3.2.1 Modos de Virasoro

Vamos agora calcular a expressão (3.72), com  $\beta = 2$  para cordas abertas. Escrevendo a solução (3.56) para  $X^0$  e  $X^1$  e subtraindo ambas equações, obtemos

$$(X^0 - X^1) = (x_0^0 - x_0^1) + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^0 - \alpha_n^1) e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (3.77)$$

Multiplicando ambos os lados por  $1/\sqrt{2}$ , encontramos a solução para geral para a coordenada  $X^-$ :

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos(n\sigma), \quad (3.78)$$

onde

$$x_0^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_0^0 - x_0^1), \quad \alpha_n^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_n^0 - \alpha_n^1), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.79)$$

Derivando (3.78) em relação a  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \dot{X}^- &= \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- (-in) e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \\ &= \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \\ &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos(n\sigma), \end{aligned} \quad (3.80)$$

e em relação a  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} X^{-\prime} &= i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} [-n \sin(n\sigma)] \\ &= -\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^- e^{-in\tau} i \sin(n\sigma), \\ &= -\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in\tau} i \sin(n\sigma). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Considere novamente a solução (3.56), agora para  $X^I$ :

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n}\alpha_n^I e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (3.82)$$

Realizando um cálculo similar ao que fizemos para obter (3.80) e (3.81), chegamos a:

$$\dot{X}^I = \sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in\tau} \cos(n\sigma), \quad (3.83)$$

$$X^{I'} = -\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in\tau} i \sin(n\sigma). \quad (3.84)$$

Agora, podemos calcular explicitamente a quantidade  $\dot{X}^- \pm X^{-'}$ :

$$\begin{aligned} \dot{X}^- \pm X^{-'} &= \sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \pm \left( -\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in\tau} i \sin(n\sigma) \right) \\ &= \sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \mp \sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in\tau} i \sin(n\sigma) \\ &= \sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in\tau} [\cos(n\sigma) \mp i \sin(n\sigma)] \\ &= \sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Da mesma forma, com o auxílio de (3.83) e (3.84) obtemos

$$\dot{X}^I \pm X^{I'} = \sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \quad (3.86)$$

de modo que a quantidade  $(\dot{X}^I \pm X^{I'})^2$  é dada por

$$\begin{aligned} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2 &= \left( \sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)} \right)^2 \\ &= 2\alpha' \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_q^I e^{-i(p+q)(\tau \pm \sigma)} \quad (p+q=n) \\ &= 2\alpha' \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I e^{-in(\tau \pm \sigma)} \end{aligned} \quad (3.87)$$

Substituindo (3.85) e (3.87) em (3.72)

$$\begin{aligned} \sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\alpha' p^+} \left( 2\alpha' \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I e^{-in(\tau \pm \sigma)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \end{aligned} \quad (3.88)$$

e reorganizando ambos os lados para comparação:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \sqrt{2\alpha'}\alpha_n^- \right) e^{-in(\tau \pm \sigma)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{2p^+} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I \right) e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \quad (3.89)$$

identificamos que os coeficientes  $\alpha_n^-$  podem ser expressos em termos dos coeficientes associados às coordenadas transversais:

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I. \quad (3.90)$$

Introduzindo os *modos transversais de Virasoro*

$$L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I, \quad (3.91)$$

a equação (3.90) fica:

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp. \quad (3.92)$$

Quando  $n = 0$ , podemos usar a equação (3.53) juntamente com (3.92) para expressar  $L_n^\perp$  em termos de  $p^+$  e  $p^-$ :

$$\frac{1}{\alpha'} L_0^\perp = 2p^+ p^-. \quad (3.93)$$

Considere agora a relação relativística  $p^2 = -M^2$ <sup>1</sup>. Usando o produto definido em (3.62), podemos escrever

$$-2p^+ p^- + p^I p^I = -M^2. \quad (3.94)$$

Substituindo (3.93) em (3.94) e usando a definição (3.91), vamos expressar  $M^2$  em termos dos coeficientes  $\alpha_n^I$ . Como estamos tratando de cordas abertas, usamos  $\beta = 2$ :

$$\begin{aligned} M^2 &= 2p^+ p^- - p^I p^I \\ &= \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp - p^I p^I \\ &= \frac{1}{\alpha'} \left( \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I \right) - p^I p^I \\ &= \frac{1}{\alpha'} \left( \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I \right) - p^I p^I \\ &= \frac{1}{\alpha'} \left[ \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{2} \left( \underbrace{\sum_{p < 0} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \sum_{p > 0} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I}_{p \rightarrow -p} \right) \right] - p^I p^I \\ &= \frac{1}{\alpha'} \left[ \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{2} \left( \sum_{p > 0} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I + \sum_{p > 0} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I \right) \right] - p^I p^I \\ &= \frac{1}{\alpha'} \left( \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I \right) - p^I p^I \\ &= \frac{1}{2\alpha'} \alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{\alpha'} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I - p^I p^I. \end{aligned} \quad (3.95)$$

<sup>1</sup>Lembre-se de que estamos usando unidades naturais.

Usando a equação (3.53), temos que  $\alpha_0^I \alpha_0^I = 2\alpha' p^I p^I$ , logo

$$\begin{aligned}
 M^2 &= \frac{1}{2\alpha'} (2\alpha' p^I p^I) + \frac{1}{\alpha'} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I - p^I p^I \\
 &= p^I p^I + \frac{1}{\alpha'} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I - p^I p^I \\
 &= \frac{1}{\alpha'} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I.
 \end{aligned} \tag{3.96}$$

Por conveniência, vamos manter o padrão da notação e fazer a troca de índice  $p \rightarrow n$ . Das relações  $\alpha_n^I = \sqrt{n} a_n^I$  e  $\alpha_{-n}^I = \sqrt{n} a_n^{*I}$ , obtemos:

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{*I} a_n^I. \tag{3.97}$$

### 3.3 Equações de Movimento da Corda Fechada

Para cordas fechadas, a solução geral das equações de movimento (3.36) também tem a forma

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} (f^\mu(\tau + \sigma) + g^\mu(\tau - \sigma)), \tag{3.98}$$

que, por conveniência, vamos reescrever como

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma), \tag{3.99}$$

onde os índices  $L$  e  $R$  distinguem as soluções de onda que se movem no sentido negativo e positivo do parâmetro  $\sigma$ , respectivamente. Essa solução deve satisfazer a condição de periodicidade no parâmetro  $\sigma$ :

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi). \tag{3.100}$$

Substituindo (3.99) em (3.100), obtemos:

$$X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma) = X_L^\mu(\tau + \sigma + 2\pi) + X_R^\mu(\tau - \sigma + 2\pi). \tag{3.101}$$

Definindo novas variáveis

$$u = \tau + \sigma, \tag{3.102}$$

$$v = \tau - \sigma, \tag{3.103}$$

podemos reescrever (3.101) como:

$$X_L^\mu(u) - X_L^\mu(u + 2\pi) = X_R^\mu(v + 2\pi) - X_R^\mu(v). \tag{3.104}$$

Derivando (3.104), primeiro em relação a  $u$  e depois em relação a  $v$ , temos que as derivadas  $\frac{d}{du} X_L^\mu(u)$  e  $\frac{d}{dv} X_R^\mu(v)$  também são funções com período  $2\pi$ :

$$\frac{d}{du} X_L^\mu(u) - \frac{d}{du} X_L^\mu(u + 2\pi) = 0, \tag{3.105}$$

$$\frac{d}{dv} X_R^\mu(v) - \frac{d}{dv} X_R^\mu(v + 2\pi) = 0, \tag{3.106}$$

e portanto podem ser expandidas em série de Taylor:

$$\frac{d}{du}X_L^\mu(u) = X_1^{L\mu} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \bar{a}_n^\mu \cos(nv) + \bar{b}_n^\mu \sin(nv) \right), \quad (3.107)$$

$$\frac{d}{dv}X_R^\mu(v) = X_1^{R\mu} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n^\mu \cos(nv) + b_n^\mu \sin(nv) \right). \quad (3.108)$$

Note que agora temos dois conjuntos de coeficientes  $\bar{a}_n$  e  $a_n$ . Integrando (3.107) e (3.108) e redefinindo as constantes:

$$X_L^\mu(u) = X_0^{L\mu} + X_1^{L\mu}u + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \bar{A}_n^\mu \cos(nu) + \bar{B}_n^\mu \sin(nu) \right) \quad (3.109)$$

$$X_R^\mu(v) = X_0^{R\mu} + X_1^{R\mu}v + \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n^\mu \cos(nv) + B_n^\mu \sin(nv) \right) \quad (3.110)$$

Similar à equação (3.51), podemos usar a identidade de Euler para escrever

$$\bar{A}_n^\mu \cos(nu) + \bar{B}_n^\mu \sin(nu) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2n}} \left( \bar{a}_n^{*\mu} e^{inu} - \bar{a}_n^\mu e^{-inu} \right), \quad (3.111)$$

$$A_n^\mu \cos(nv) + B_n^\mu \sin(nv) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2n}} \left( a_n^{*\mu} e^{inv} - a_n^\mu e^{-inv} \right), \quad (3.112)$$

onde desta vez definimos:

$$\bar{a}_n^\mu \equiv \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2n}{\alpha'}} (\bar{B}_n^\mu - i\bar{A}_n^\mu), \quad (3.113)$$

$$a_n^\mu \equiv \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2n}{\alpha'}} (B_n^\mu - iA_n^\mu). \quad (3.114)$$

Vamos também definir novos coeficientes

$$\alpha_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n}, \quad \bar{\alpha}_n^\mu = \bar{a}_n^\mu \sqrt{n}, \quad (3.115)$$

$$\alpha_{-n}^\mu = a_n^{*\mu} \sqrt{n}, \quad \bar{\alpha}_{-n}^\mu = \bar{a}_n^{*\mu} \sqrt{n}, \quad (3.116)$$

para  $n \geq 1$ . Substituindo (3.111) em (3.109), juntamente com (3.115) e (3.116), obtemos

$$\begin{aligned} X_L^\mu(u) &= X_0^{L\mu} + X_1^{L\mu}u - i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \bar{a}_n^{*\mu} e^{inu} - \bar{a}_n^\mu e^{-inu} \right) \\ &= X_0^{L\mu} + X_1^{L\mu}u - i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{\bar{\alpha}_{-n}^\mu}{\sqrt{n}} e^{inu} - \frac{\bar{\alpha}_n^\mu}{\sqrt{n}} e^{-inu} \right) \\ &= X_0^{L\mu} + X_1^{L\mu}u - i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left[ \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_{-n}^\mu e^{inu}}_{n \rightarrow -n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-inu} \right] \\ &= X_0^{L\mu} + X_1^{L\mu}u - i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left[ - \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-inu} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-inu} \right] \\ &= X_0^{L\mu} + X_1^{L\mu}u + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-inu}. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Fazendo o mesmo para  $X_R^\mu$ :

$$X_R^\mu(v) = X_0^{R\mu} + X_1^{R\mu}v + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-inv}. \quad (3.118)$$

Substituindo (3.117) e (3.118) em (3.99), a solução geral  $X^\mu(\tau, \sigma)$  torna-se:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = (X_0^{L\mu} + X_0^{R\mu}) + (X_1^{L\mu} + X_1^{R\mu})\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma} + \alpha_n^\mu e^{in\sigma}). \quad (3.119)$$

Ainda nos restam quatro constantes a determinar:  $X_0^{L\mu}$ ,  $X_0^{R\mu}$ ,  $X_1^{L\mu}$  e  $X_1^{R\mu}$ . Como veremos, essas constantes não são todas independentes. Assim como no caso das cordas abertas, o termo  $X_1^{L\mu} + X_1^{R\mu}$  que aparece multiplicando o parâmetro  $\tau$  em (3.119) é proporcional ao momento total carregado pela corda. Para mostrar isso, vamos primeiro definir novos coeficientes  $\bar{\alpha}_0^\mu$  e  $\alpha_0^\mu$

$$\bar{\alpha}_0^\mu \equiv \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} X_1^{L\mu}, \quad (3.120)$$

$$\alpha_0^\mu \equiv \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} X_1^{R\mu}, \quad (3.121)$$

de modo que as equações (3.117) e (3.118) ficam:

$$X_L^\mu(u) = X_0^{L\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \bar{\alpha}_0^\mu u + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-inu}, \quad (3.122)$$

$$X_R^\mu(v) = X_0^{R\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_0^\mu v + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-inv}. \quad (3.123)$$

Ao substituir (3.122) e (3.123) na condição de periodicidade (3.104), encontramos que  $\bar{\alpha}_0^\mu$  e  $\alpha_0^\mu$  satisfazem

$$\bar{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu. \quad (3.124)$$

Com isso, a solução geral (3.119) fica:

$$\begin{aligned} X^\mu(\tau, \sigma) &= (X_0^{L\mu} + X_0^{R\mu}) + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} (\bar{\alpha}_0^\mu + \alpha_0^\mu) \tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma} + \alpha_n^\mu e^{in\sigma}) \\ &= (X_0^{L\mu} + X_0^{R\mu}) + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma} + \alpha_n^\mu e^{in\sigma}). \end{aligned} \quad (3.125)$$

Com o auxílio de (3.125), calculamos a densidade de momento  $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\tau\mu} &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \left[ \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} e^{-in\tau} (\bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma} + \alpha_n^\mu e^{in\sigma}) \right]. \end{aligned} \quad (3.126)$$

Integrando ambos os lados em relação a  $\sigma \in [0, 2\pi]$ :

$$\int_0^{2\pi} d\sigma \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \left[ \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu \int_0^{2\pi} d\sigma + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} e^{-in\tau} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\sigma (\bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma} + \alpha_n^\mu e^{in\sigma})}_{=0} \right]. \quad (3.127)$$

Uma vez que o lado esquerdo é o momento total  $p^\mu$ , obtemos:

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu \quad (3.128)$$

Assim como para cordas abertas, o coeficiente  $\alpha_0^\mu$  é proporcional a  $p^\mu$  — este era o resultado que procurávamos demonstrar. Além disso, quando todos os coeficientes  $\alpha_0^\mu$  e  $\bar{\alpha}_0^\mu$  são nulos, a equação (3.125) deve se reduzir à equação de movimento de uma partícula livre, o que nos permite identificar a quantidade  $(X_0^{L\mu} + X_0^{R\mu})$  como a coordenada  $x_0^\mu$  do centro de massa da corda. Finalmente, obtemos a solução para  $X^\mu(\tau, \sigma)$ :

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma} + \alpha_n^\mu e^{in\sigma}) \quad (3.129)$$

Agora, vamos analisar como ficam as equações de movimento no *gauge do cone de luz*. Primeiro, calcularemos as quantidades  $\dot{X}^\mu$  e  $X^{\mu'}$  separadamente:

$$\dot{X}^\mu = \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} e^{-in\tau} (\bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma} + \alpha_n^\mu e^{in\sigma}), \quad (3.130)$$

$$X^{\mu'} = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} e^{-in\tau} (\bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma} - \alpha_n^\mu e^{in\sigma}). \quad (3.131)$$

Somando e subtraindo ambas equações, obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{X}^\mu + X^{\mu'} &= \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} \\ &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}, \end{aligned} \quad (3.132)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}^\mu - X^{\mu'} &= \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} \\ &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Note que (3.132) e (3.133) são expansões similares às que obtivemos em (3.85) e (3.86) — isso justifica todas as definições de constantes feitas até aqui. Considere agora a equação (3.72), com  $\beta = 1$ :

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{2\alpha'p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2. \quad (3.134)$$

Calculando  $(\dot{X}^I \pm X^{I'})^2$ , com o auxílio de (3.132) e (3.133):

$$\begin{aligned}
 (\dot{X}^I + X^{I'})^2 &= \left( \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^I e^{-in(\tau+\sigma)} \right)^2 \\
 &= 2\alpha' \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_p^I \bar{\alpha}_q^I e^{-i(p+q)(\tau+\sigma)} \\
 &= 2\alpha' \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_{n-p}^I \bar{\alpha}_p^I e^{-in(\tau+\sigma)} \\
 &= 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_{n-p}^I \bar{\alpha}_p^I \right) e^{-in(\tau+\sigma)} \\
 &= 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{L}_n^\perp e^{-in(\tau+\sigma)}, \tag{3.135}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\dot{X}^I - X^{I'})^2 &= \left( \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau-\sigma)} \right)^2 \\
 &= 2\alpha' \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_q^I e^{-i(p+q)(\tau-\sigma)} \\
 &= 2\alpha' \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I e^{-in(\tau-\sigma)} \\
 &= 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I \right) e^{-in(\tau-\sigma)} \\
 &= 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^\perp e^{-in(\tau-\sigma)}, \tag{3.136}
 \end{aligned}$$

onde definimos os modos transversais de Virasoro para cordas fechadas:

$$\bar{L}_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_{n-p}^I \bar{\alpha}_p^I, \quad L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I. \tag{3.137}$$

Similar ao resultado obtido em (3.92), podemos substituir (3.135) e (3.136) em (3.134), juntamente com (3.132) e (3.133), para obter:

$$\sqrt{2\alpha'} \bar{\alpha}_n^- = \frac{2}{p^+} \bar{L}_n^\perp, \tag{3.138}$$

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{2}{p^+} L_n^\perp. \tag{3.139}$$

Quando  $n = 0$ , vemos que  $\bar{\alpha}_0^- = \alpha_0^-$ , o que de acordo com (3.138) e (3.139) implica na igualdade

$$\bar{L}_0^\perp = L_0^\perp. \tag{3.140}$$

Encerraremos a nossa análise da dinâmica das cordas fechadas calculando  $M^2$ . Vamos usar a condição (3.140) para substituir

$$L_0 = \frac{\bar{L}_0^\perp + L_0^\perp}{2} \tag{3.141}$$

em (3.139), tomando  $n = 0$ :

$$\sqrt{2\alpha'\alpha_0^-} = \frac{1}{p^+} (\bar{L}_0^\perp + L_0^\perp). \quad (3.142)$$

Com a definição (3.128), temos

$$2p^+p^- = \frac{2}{\alpha'} (\bar{L}_0^\perp + L_0^\perp). \quad (3.143)$$

Usando a relação momento-energia relativística (3.94), juntamente com (3.143), podemos escrever:

$$\begin{aligned} M^2 &= 2p^+p^- - p^I p^I \\ &= \frac{2}{\alpha'} (\bar{L}_0^\perp + L_0^\perp) - p^I p^I \\ &= \frac{1}{\alpha'} \left( \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_{-p}^I \bar{\alpha}_p^I \right) + \frac{1}{\alpha'} \left( \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I \right) - p^I p^I \\ &= \frac{1}{\alpha'} \left( \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p \neq 0} \bar{\alpha}_{-p}^I \bar{\alpha}_p^I \right) + \frac{1}{\alpha'} \left( \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p \neq 0} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I \right) - p^I p^I \\ &= \frac{1}{\alpha'} \left( \alpha_0^I \alpha_0^I + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{-p}^I \bar{\alpha}_p^I \right) + \frac{1}{\alpha'} \left( \alpha_0^I \alpha_0^I + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I \right) - p^I p^I \\ &= \frac{2}{\alpha'} \left[ \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} (\bar{\alpha}_{-p}^I \bar{\alpha}_p^I + \alpha_{-p}^I \alpha_p^I) - \frac{\alpha' p^I p^I}{2} \right], \end{aligned} \quad (3.144)$$

onde também nos valem do fato de que  $\alpha_0^I = \bar{\alpha}_0^I$ . Além disso, de (3.128) obtemos que

$$p^I p^I = \alpha_0^I \alpha_0^I \frac{2}{\alpha'}, \quad (3.145)$$

de modo que a equação (3.144) fica:

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} \sum_{p=1}^{\infty} (\bar{\alpha}_{-p}^I \bar{\alpha}_p^I + \alpha_{-p}^I \alpha_p^I). \quad (3.146)$$

### 3.4 Conclusão

Os resultados (3.97) e (3.146) concluem a nossa análise da corda clássica livre relativística. Escolhendo uma classe de parametrizações onde uma combinação linear das coordenadas  $X^\mu$  é proporcional ao parâmetro  $\tau$ , vimos que as equações de movimento originalmente obtidas em (2.46) se reduzem a equações de onda (3.36), cuja solução geral foi obtida em (3.56) para cordas abertas e em (3.129) para cordas fechadas. Usando as coordenadas do cone de luz (3.58) e a parametrização do gauge do cone de luz (3.67) e (3.68), encontramos o conjunto mínimo de variáveis independentes que descrevem o movimento da corda — toda a dinâmica da corda reside nas coordenadas transversais.

No próximo capítulo, vamos obter uma primeira formulação quântica da teoria de cordas mediante a quantização canônica, promovendo as variáveis dinâmicas a operadores quânticos e encontrando suas respectivas relações de comutação.

# Capítulo 4

## Quantização da Corda Livre Relativística

Ao olhar para as equações (3.97) e (3.146), percebemos que a massa da corda clássica é proporcional a uma soma de termos do tipo

$$\alpha_{-n}^I \alpha_n^I = n |a_n^I|^2, \quad (4.1)$$

fazendo com que  $M^2$  seja uma quantidade positiva e diferente de zero. Além disso, os coeficientes  $a_n^I$  são arbitrários, de modo que  $M^2$  pode assumir qualquer valor — o que gera um espectro de massa contínuo.

O desenvolvimento atual da teoria de cordas baseia-se na hipótese de que ela seja capaz de descrever todas as partículas e interações que conhecemos. Cada partícula, por sua vez, deve ser uma representação de um modo vibracional da corda. Claramente, a teoria clássica não cumpre esse papel. Quando observamos a natureza, encontramos partículas cuja massa é nula, como os fótons. Também percebemos que as massas das partículas que conhecemos são discretas e bem definidas.

Como veremos, a quantização gera a correção necessária nas equações (3.97) e (3.146), de tal modo que essas condições sejam satisfeitas. Ainda mais: a teoria quântica de cordas contém infinitos estados, o que a torna uma excelente candidata a descrever a física além do modelo padrão.

Neste capítulo, vamos revisar a primeira formulação quântica da teoria de cordas, usando um procedimento chamado de *quantização canônica*. Todas as partículas que emergem dos estados que vamos obter são bósons, uma vez que para incluir férmions precisamos de variáveis dinâmicas que anticomutam. Por este motivo, a teoria quântica que vamos descrever neste capítulo também é chamada de *Teoria Bosônica de Cordas*. Note que essa não é uma teoria fisicamente realista, mas sim um modelo de brinquedo, útil para desenvolver nossa intuição e preparar o terreno para, se desejado, adentrar em aspectos mais profundos e modernos da teoria de cordas.

### 4.1 Quantização Canônica da Corda Aberta

No Capítulo 3, obtivemos o conjunto de variáveis dinâmicas (3.76) que descrevem a corda clássica. Na quantização canônica, promovemos essas variáveis a operadores quânticos:

$$\{X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau I}, p^+, x_0^-\} \rightarrow \{\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{\mathcal{P}}^{\tau I}, \hat{p}^+, \hat{x}_0^-\}. \quad (4.2)$$

Usando a prescrição (4.2), podemos escrever as equações clássicas que encontramos no Capítulo 3 como relações entre operadores. Faremos isso explicitamente para os principais resultados que usaremos nessa seção, como as densidades de momento

$$\hat{\mathcal{P}}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{\hat{X}}^\mu \quad \text{e} \quad \hat{\mathcal{P}}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \hat{X}^{\mu\prime}, \quad (4.3)$$

a solução das equações de movimento

$$\hat{X}^\mu(\tau, \sigma) = \hat{x}_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \hat{\alpha}_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \quad (4.4)$$

e as relações (3.86)

$$\dot{\hat{X}}^I \pm \hat{X}^{I\prime} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)}. \quad (4.5)$$

### 4.1.1 Relações de Comutação

Considere um sistema clássico com  $N$  graus de liberdade, sendo  $f(q_i, p_i)$  e  $g(q_i, p_i)$  duas funções das variáveis canônicas  $q_i$  e  $p_i$ . Os *parênteses de Poisson* são definidos como:

$$\{f, g\} \equiv \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p^i} - \frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right). \quad (4.6)$$

Na corda clássica, as variáveis canônicas são  $X^I(\tau, \sigma)$  e  $\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma)$ . Note que, uma vez fixado o parâmetro  $\tau$ , temos infinitos graus de liberdade, um para cada valor de  $\sigma$ . A generalização da equação (4.6) para este caso é:

$$\{f, g\} = \int d\sigma \left[ \frac{\delta f}{\delta X^I(\tau, \sigma)} \frac{\delta g}{\delta \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma)} - \frac{\delta f}{\delta \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma)} \frac{\delta g}{\delta X^I(\tau, \sigma)} \right], \quad (4.7)$$

onde  $\frac{\delta}{\delta X^I(\tau, \sigma)}$  e  $\frac{\delta}{\delta \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma)}$  são derivadas funcionais.

Na quantização canônica, obtemos as relações de comutação entre duas variáveis dinâmicas simplesmente usando a prescrição:

$$\{f, g\} \longrightarrow -i[\hat{f}, \hat{g}]. \quad (4.8)$$

Para aplicar esse método, primeiro vamos calcular os parênteses de Poisson entre  $X^I(\tau, \sigma)$  e  $\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma')$ :

$$\{X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')\} = \int d\sigma'' \left[ \frac{\delta X^I(\tau, \sigma)}{\delta X^I(\tau, \sigma'')} \frac{\delta \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')}{\delta \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma'')} - \frac{\delta X^I(\tau, \sigma)}{\delta \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma'')} \frac{\delta \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')}{\delta X^I(\tau, \sigma'')} \right], \quad (4.9)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\delta X^I(\tau, \sigma)}{\delta \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma'')} &= 0, & \frac{\delta \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')}{\delta X^I(\tau, \sigma'')} &= 0, & \frac{\delta X^I(\tau, \sigma)}{\delta X^I(\tau, \sigma'')} &= \delta(\sigma - \sigma'') \quad \text{e} \\ \frac{\delta \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')}{\delta \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma'')} &= \eta^{IJ} \delta(\sigma' - \sigma''), \end{aligned} \quad (4.10)$$

lembrando que  $\eta^{IJ} = \delta^{IJ}$ . Logo:

$$\{X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')\} = \eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (4.11)$$

Pelo mesmo procedimento, podemos mostrar que:

$$\{X^I(\tau, \sigma), X^J(\tau, \sigma')\} = \{\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')\} = 0. \quad (4.12)$$

Tomando os resultados (4.11) e (4.12) juntamente com a prescrição (4.8), obtemos que, após a quantização canônica, os operadores  $\hat{X}^I$  e  $\hat{\mathcal{P}}^{\tau I}$  satisfazem:

$$[\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{\mathcal{P}}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'), \quad (4.13)$$

$$[\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{X}^J(\tau, \sigma')] = 0, \quad (4.14)$$

$$[\hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma), \hat{\mathcal{P}}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = 0. \quad (4.15)$$

Essas relações de comutação são análogas às de uma partícula pontual. A partir delas, obteremos uma série de relações úteis.

Começaremos substituindo (4.3) em (4.13), de onde obtemos

$$[\hat{X}^I(\tau, \sigma), \dot{\hat{X}}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (4.16)$$

Derivando em relação a  $\sigma$ :

$$[\hat{X}^{I'}(\tau, \sigma), \dot{\hat{X}}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (4.17)$$

Considere agora o comutador (4.14). Tomando a sua derivada em relação a  $\sigma$  e então derivando o resultado em relação a  $\sigma'$ , encontramos:

$$[\hat{X}^{I'}(\tau, \sigma), \hat{X}^{J'}(\tau, \sigma')] = 0. \quad (4.18)$$

De maneira similar, partindo do comutador (4.15) e usando (4.3), temos que

$$[\hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma), \hat{\mathcal{P}}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = [\dot{\hat{X}}^I(\tau, \sigma), \dot{\hat{X}}^J(\tau, \sigma')] = 0. \quad (4.19)$$

Com os resultados (4.18) e (4.19), podemos calcular o comutador

$$\begin{aligned} [(\dot{\hat{X}}^I \pm \hat{X}^{I'})(\tau, \sigma), (\dot{\hat{X}}^J \pm \hat{X}^{J'})(\tau, \sigma')] &= \pm [\dot{\hat{X}}^I(\tau, \sigma), \hat{X}^{J'}(\tau, \sigma')] \pm [\hat{X}^{I'}(\tau, \sigma), \dot{\hat{X}}^J(\tau, \sigma')]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

O segundo termo é dado diretamente por (4.17). O primeiro termo, no entanto, exige algumas manipulações:

$$\begin{aligned} [\dot{\hat{X}}^I(\tau, \sigma), \hat{X}^{J'}(\tau, \sigma')] &= -[\hat{X}^{J'}(\tau, \sigma'), \dot{\hat{X}}^I(\tau, \sigma)] \\ &= -2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma'} \delta(\sigma - \sigma'), \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde usamos o fato de que  $\eta^{IJ} = \eta^{JI}$  e  $\delta(\sigma' - \sigma) = \delta(\sigma - \sigma')$ . Podemos verificar que a derivada de qualquer função  $f(\sigma - \sigma')$  satisfaz

$$\frac{df}{d\sigma} = -\frac{df}{d\sigma'}, \quad (4.22)$$

o que nos permite reescrever (4.21) como

$$\left[ \dot{X}^I(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma') \right] = 2\pi\alpha' i \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (4.23)$$

Substituindo (4.17) e (4.23) em (4.20), obtemos

$$\left[ (\dot{X}^I \pm \hat{X}^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J \pm \hat{X}^{J'}) (\tau, \sigma') \right] = \pm 4\pi\alpha' i \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (4.24)$$

Por um procedimento similar, podemos mostrar que:

$$\left[ (\dot{X}^I \pm \hat{X}^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J \mp \hat{X}^{J'}) (\tau, \sigma') \right] = 0. \quad (4.25)$$

### 4.1.2 Operadores Criação e Aniquilação

Quando escrevemos a equação (4.4), deixamos implícito o fato de que, após a quantização, os coeficientes  $\alpha_n^\mu$  também tornam-se operadores, onde

$$\hat{\alpha}_0^\mu \equiv \sqrt{2\alpha'} \hat{p}^\mu, \quad (4.26)$$

$$\hat{\alpha}_n^\mu \equiv \hat{a}_n^\mu \sqrt{n}, \quad (4.27)$$

$$\hat{\alpha}_{-n}^\mu \equiv \hat{a}_n^{\mu\dagger} \sqrt{n}, \quad (4.28)$$

sendo o índice  $n$  chamado de *nível*.

Nesta seção, vamos encontrar as relações de comutação que este conjunto de operadores satisfaz. Para isso, escrevemos explicitamente as quantidades  $(\dot{X}^I + \hat{X}^{I'})$  e  $(\dot{X}^I - \hat{X}^{I'})$  usando (4.5):

$$\dot{X}^I + \hat{X}^{I'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_n^I e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad \sigma \in [0, \pi], \quad (4.29)$$

$$\dot{X}^I - \hat{X}^{I'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_n^I e^{-in(\tau-\sigma)}, \quad \sigma \in [0, \pi]. \quad (4.30)$$

Fazendo  $\sigma \rightarrow -\sigma$  em (4.30), podemos escrever:

$$\dot{X}^I - \hat{X}^{I'}(\tau, -\sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_n^I e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad \sigma \in [-\pi, 0]. \quad (4.31)$$

Considere um operador auxiliar  $\hat{A}^I(\tau, \sigma)$ , definido como

$$\hat{A}^I(\tau, \sigma) \equiv \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_n^I e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad \sigma \in [-\pi, \pi]. \quad (4.32)$$

Observando as equações (4.29) e (4.31), percebemos que o operador  $\hat{A}^I(\tau, \sigma)$  pode ser escrito como:

$$\hat{A}^I(\tau, \sigma) = \begin{cases} (\dot{X}^I + X^{I'}) (\tau, \sigma), & \sigma \in [0, \pi], \\ (\dot{X}^I - X^{I'}) (\tau, -\sigma), & \sigma \in [-\pi, 0]. \end{cases} \quad (4.33)$$

Note que  $A^I(\tau, \sigma)$  tem, por construção, período  $2\pi$ .

O que podemos dizer sobre o comutador  $[\hat{A}^I(\tau, \sigma), \hat{A}^J(\tau, \sigma')]$ ? Usando (4.32), temos

$$\begin{aligned} [\hat{A}^I(\tau, \sigma), \hat{A}^J(\tau, \sigma')] &= \left[ \sqrt{2\alpha'} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_p^I e^{-ip(\tau+\sigma)}, \sqrt{2\alpha'} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_q^J e^{-iq(\tau+\sigma')} \right] \\ &= 2\alpha' \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} e^{-ip(\tau+\sigma)} e^{-iq(\tau+\sigma')} [\hat{\alpha}_p^I, \hat{\alpha}_q^J]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Calculando o mesmo comutador, agora usando (4.33) em conjunto com (4.24) e (4.25), encontramos os seguintes casos:

- se  $\sigma \in [0, \pi]$  e  $\sigma' \in [0, \pi]$ , então

$$\begin{aligned} [\hat{A}^I(\tau, \sigma), \hat{A}^J(\tau, \sigma')] &= [(\dot{X}^I + X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J + X^{J'}) (\tau, \sigma')] \\ &= 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'); \end{aligned} \quad (4.35)$$

- se  $\sigma \in [0, \pi]$  e  $\sigma' \in [-\pi, 0]$ :

$$\begin{aligned} [\hat{A}^I(\tau, \sigma), \hat{A}^J(\tau, \sigma')] &= [(\dot{X}^I + X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J - X^{J'}) (\tau, -\sigma')] \\ &= 0; \end{aligned} \quad (4.36)$$

- se  $\sigma \in [-\pi, 0]$  e  $\sigma' \in [0, \pi]$ , temos

$$\begin{aligned} [\hat{A}^I(\tau, \sigma), \hat{A}^J(\tau, \sigma')] &= [(\dot{X}^I - X^{I'}) (\tau, -\sigma), (\dot{X}^J + X^{J'}) (\tau, \sigma')] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

- e finalmente, se  $\sigma \in [-\pi, 0]$  e  $\sigma' \in [-\pi, 0]$ :

$$\begin{aligned} [\hat{A}^I(\tau, \sigma), \hat{A}^J(\tau, \sigma')] &= [(\dot{X}^I - X^{I'}) (\tau, -\sigma), (\dot{X}^J - X^{J'}) (\tau, -\sigma')] \\ &= -4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d(-\sigma)} \delta(\sigma' - \sigma) \\ &= 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Em geral, podemos escrever

$$[\hat{A}^I(\tau, \sigma), \hat{A}^J(\tau, \sigma')] = 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'), \quad \sigma, \sigma' \in [-\pi, \pi]. \quad (4.39)$$

Comparando (4.34) e (4.39), encontramos

$$\sum_{p, q \in \mathbb{Z}} e^{-ip(\tau+\sigma)} e^{-iq(\tau+\sigma')} [\hat{\alpha}_p^I, \hat{\alpha}_q^J] = 2\pi i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (4.40)$$

Para extrair o comutador desta expressão, vamos multiplicar ambos os lados por  $e^{im\sigma} e^{in\sigma'}/4\pi^2$  e então integrar o resultado no intervalo  $\sigma, \sigma' \in [-\pi, \pi]$ . Ao fazer isso, encontramos que o

lado esquerdo de (4.40) fica:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{im\sigma} \right) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma' e^{in\sigma'} \right) \left( \sum_{p,q \in \mathbb{Z}} e^{-ip(\tau+\sigma)} e^{-iq(\tau+\sigma')} [\hat{\alpha}_p^I, \hat{\alpha}_q^J] \right) \\
 = & \sum_{p,q \in \mathbb{Z}} e^{-i(p+q)\tau} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{i(m-p)\sigma} \right) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma' e^{i(n-q)\sigma'} \right) [\hat{\alpha}_p^I, \hat{\alpha}_q^J] \\
 = & \sum_{p,q \in \mathbb{Z}} e^{-i(p+q)\tau} \delta_{m,p} \delta_{n,q} [\hat{\alpha}_p^I, \hat{\alpha}_q^J] \\
 = & e^{-i(m+n)\tau} [\hat{\alpha}_m^I, \hat{\alpha}_n^J].
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Por sua vez, do lado direito obtemos

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{im\sigma} \right) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma' e^{in\sigma'} \right) \left( 2\pi i \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \right) \\
 = & i\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{im\sigma} \frac{d}{d\sigma} \left( \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma' e^{in\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \right) \\
 = & i\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{im\sigma} \frac{d}{d\sigma} (e^{in\sigma})
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned}
 = & -n\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{i(m+n)\sigma} \\
 = & -n\eta^{IJ} \delta_{m+n,0} \\
 = & m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0},
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

onde no último passo usamos o fato de que  $\delta_{m+n,0}$  só difere de zero quanto  $m = -n$ . Substituindo (4.41) e (4.43) em (4.40), explicitamos o comutador

$$[\hat{\alpha}_m^I, \hat{\alpha}_n^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m+n,0}, \tag{4.44}$$

onde utilizamos  $\delta_{m+n,0}$  para fazer  $e^{-i(m+n)\tau} = 1$ .

Partindo de (4.44), podemos usar as relações (4.27) e (4.28) para mostrar que os operadores  $\hat{a}_n^I$  satisfazem:

$$[\hat{a}_m^I, \hat{a}_n^J] = 0. \tag{4.45}$$

Este resultado se deve ao fato de que  $m+n \neq 0$ , observando que  $\hat{a}_n^I$  é definidos apenas para  $n \geq 1$ . Decorre imediatamente de (4.45) que

$$[\hat{a}_m^{I\dagger}, \hat{a}_n^{J\dagger}] = 0. \tag{4.46}$$

Finalmente, reescrevendo (4.44) como

$$[\hat{\alpha}_m^I, \hat{\alpha}_{-n}^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m,n}, \tag{4.47}$$

encontramos:

$$\begin{aligned}
 [\hat{a}_m^I, \hat{a}_n^{J\dagger}] &= \frac{1}{\sqrt{mn}} [\hat{\alpha}_m^I, \hat{\alpha}_{-n}^J] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{mn}} m\eta^{IJ} \delta_{m-n,0} \\
 &= \sqrt{\frac{m}{n}} \eta^{IJ} \delta_{m,n}.
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Observando que o lado direito só difere de zero quando  $m = n$ , podemos escrever:

$$[\hat{a}_m^I, \hat{a}_n^{J\dagger}] = \eta^{IJ} \delta_{m,n}. \quad (4.49)$$

Os operadores  $\hat{a}_n^I$  — que na teoria clássica são coeficientes associados aos modos de vibração da corda — satisfazem a mesma relação de comutação que os operadores escada do oscilador harmônico quântico. Como consequência, identificamos que na teoria quântica de cordas abertas,  $\hat{a}_n^I$  e  $\hat{a}_n^{I\dagger}$  atuam como operadores de aniquilação e criação de modos de oscilação da corda, respectivamente.

### 4.1.3 Operador $\hat{M}^2$ e os modos de Virasoro

Em (3.90), obtivemos os coeficientes  $\hat{\alpha}_n^-$  em termos dos modos transversais de Virasoro:

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp, \quad \text{onde } L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I. \quad (4.50)$$

É natural propor que o *operador de Virasoro*,  $\hat{L}_n^\perp$ , seja obtido apenas substituindo  $\alpha_n^I$  pelos operadores  $\hat{\alpha}_n^I$ :

$$\hat{L}_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_{n-p}^I \hat{\alpha}_p^I. \quad (4.51)$$

Quando estudamos a corda clássica, tratamos os coeficientes  $\alpha_n^\mu$  como variáveis dinâmicas que comutam — não foi preciso tomar cuidado com a ordem em que esses termos aparecem nas equações obtidas no Capítulo 3. Todavia, vimos que com a quantização, estes coeficientes tornam-se operadores que em geral não comutam, tornando o seu ordenamento relevante.

Vamos demandar que, para qualquer valor de  $n$  em (4.51), o operador criação apareça sempre à esquerda do operador aniquilação. Essa convenção é chamada de *ordenamento normal*, e garante que não haja qualquer ambiguidade na ordem em que estes operadores aparecem. Quando  $n \neq 0$ , temos que  $[\hat{\alpha}_{n-p}^I, \hat{\alpha}_p^I] = 0$ , de modo que nenhum trabalho adicional é necessário neste caso.

Resta-nos verificar o ordenamento normal para  $n = 0$ . Para este caso em particular, podemos escrever

$$\begin{aligned} \hat{L}_0^\perp &\stackrel{?}{=} \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I \\ &\stackrel{?}{=} \frac{1}{2} \hat{\alpha}_0^I \hat{\alpha}_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_p^I \hat{\alpha}_{-p}^I. \end{aligned} \quad (4.52)$$

O segundo termo já tem a forma que desejamos: o operador criação  $\hat{\alpha}_{-p}^I$  aparece à esquerda do operador aniquilação  $\hat{\alpha}_p^I$ . Devemos voltar a nossa atenção para o ordenamento

normal da última somatória:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_p^I \hat{\alpha}_{-p}^I &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (\hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I + [\hat{\alpha}_p, \hat{\alpha}_{-p}]) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p \eta^{II} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I + \frac{D-2}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I + a,
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

onde usamos o fato que  $\eta^{II} = \text{Tr}(\eta^{IJ}) = D - 2$  e

$$a = \frac{D-2}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p \tag{4.54}$$

é chamada de *constante de ordenamento normal*.

Resta-nos apenas determinar (4.54). Embora essa soma envolva apenas números inteiros positivos, podemos usar um resultado matemático para mostrar que, de fato, essa somatória converge para um valor finito.

Considere a função zeta de Riemann:

$$\zeta(s) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^s} \quad s \in \mathbb{C}, \mathcal{R}(s) > 1. \tag{4.55}$$

Usando um procedimento chamado de *continuação analítica*, é possível estender o domínio de  $\zeta(s)$  para qualquer  $s$ , e mostrar que  $\zeta(-1) = -1/12$ <sup>1</sup>. Tomando este resultado em (4.55), temos:

$$\zeta(-1) = \sum_{p=1}^{\infty} p = -\frac{1}{12}. \tag{4.56}$$

Substituindo (4.56) em (4.54), determinamos  $a$  em termos do número de dimensões do espaço-tempo:

$$a = -\frac{D-2}{24}. \tag{4.57}$$

Com a constante de ordenamento, a equação (4.52) fica:

$$\begin{aligned}
 \hat{L}_0^\perp &\stackrel{?}{=} \frac{1}{2} \hat{\alpha}_0^I \hat{\alpha}_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I + a \\
 &\stackrel{?}{=} \alpha' \hat{p}^I \hat{p}^I + \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I + a,
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

onde usamos  $\hat{\alpha}_0^I = \sqrt{2\alpha'} \hat{p}^I$ .

Vamos definir o operador  $\hat{L}_0^\perp$  sem incluir a constante de ordenamento

<sup>1</sup>Para uma demonstração formal da continuação analítica da função zeta de Riemann e do resultado  $\zeta(-1) = -1/12$ , veja [16].

$$\hat{L}_0^\perp \equiv \alpha' \hat{p}^I \hat{p}^I + \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I. \quad (4.59)$$

Dessa maneira, sempre que o termo  $L_0^\perp$  aparece em uma equação clássica, obtemos a sua respectiva versão quântica fazendo a substituição:

$$L_0^\perp \longrightarrow \hat{L}_0^\perp + a. \quad (4.60)$$

Por exemplo, quando  $n = 0$ , a versão quântica da equação (4.50) fica:

$$\sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_0^- = \frac{1}{\hat{p}^+} (\hat{L}_0^\perp + a). \quad (4.61)$$

Usando  $\hat{\alpha}_0^- = \sqrt{2\alpha'} \hat{p}^-$ , temos:

$$2\alpha' \hat{p}^- = \frac{1}{\hat{p}^+} (\hat{L}_0^\perp + a). \quad (4.62)$$

Multiplicando à esquerda por  $\hat{p}^+$  em ambos os lados e isolando  $2\hat{p}^+ \hat{p}^-$ :

$$2\hat{p}^+ \hat{p}^- = \frac{1}{\alpha'} (\hat{L}_0^\perp + a). \quad (4.63)$$

Com este resultado, vamos obter o operador  $\hat{M}^2$  — que virá a ser a versão quântica da equação (3.97). Primeiro, escrevemos a relação energia-momento nas coordenadas do cone de luz:

$$\hat{M}^2 = 2\hat{p}^+ \hat{p}^- - \hat{p}^I \hat{p}^I. \quad (4.64)$$

Podemos usar (4.63) para obter:

$$\begin{aligned} \hat{M}^2 &= \frac{1}{\alpha'} (\hat{L}_0^\perp + a) - \hat{p}^I \hat{p}^I \\ &= \frac{1}{\alpha'} \left( \alpha' \hat{p}^I \hat{p}^I + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-n}^I \hat{\alpha}_n^I + a \right) - \hat{p}^I \hat{p}^I \\ &= \frac{1}{\alpha'} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-n}^I \hat{\alpha}_n^I + a \right) \\ &= \frac{1}{\alpha'} \left( \sum_{n=1}^{\infty} n \hat{\alpha}_n^{I\dagger} \hat{\alpha}_n^I + a \right) \\ &= \frac{1}{\alpha'} (\hat{N}^\perp + a), \end{aligned} \quad (4.65)$$

onde

$$\hat{N}^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n \hat{\alpha}_n^{I\dagger} \hat{\alpha}_n^I \quad (4.66)$$

é chamado de *operador número*. Para definir completamente  $\hat{M}^2$ , precisamos conhecer o valor da constante de ordenamento  $a$ . Essa constante pode ser obtida por impor que a

invariância de Lorentz da corda clássica seja preservada na teoria quântica. De fato, isso só acontece se o número de dimensões do espaço-tempo for  $D = 26$ <sup>2</sup>.

Como consequência, obtemos de (4.57) que a constante de ordenamento normal é  $a = -1$ . Decorre de (4.65) que  $\hat{M}^2$  é dado por:

$$\hat{M}^2 = \frac{1}{\alpha'} (\hat{N}^\perp - 1). \quad (4.67)$$

#### 4.1.4 Relações de Comutação Envolvendo os Operadores de Virasoro

Agora, vamos calcular algumas relações de comutação envolvendo os operadores  $\hat{L}_n^\perp$  que serão úteis nas próximas seções. Considere o comutador (4.16). Integrando ambos os lados em relação a  $\sigma \in [0, \pi]$ , temos:

$$\left[ \int_0^\pi d\sigma \hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{X}^J(\tau, \sigma') \right] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ}. \quad (4.68)$$

Usando explicitamente (4.4) para  $\mu = I$ , podemos escrever a integral do lado esquerdo como:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\sigma \hat{X}^I(\tau, \sigma) &= \int_0^\pi d\sigma \left( \hat{x}_0^I + \sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{m \neq 0} \hat{\alpha}_m^I \cos(m\sigma) e^{-im\tau} \right) \\ &= \pi \left( \hat{x}_0^I + \sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_0^I \tau \right) + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{m \neq 0} \hat{\alpha}_m^I \left( \underbrace{\int_0^\pi d\sigma \cos(m\sigma)}_{=0} \right) e^{-im\tau} \\ &= \pi \left( \hat{x}_0^I + \sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_0^I \tau \right). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Substituindo em (4.68):

$$\left[ \hat{x}_0^I + \sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_0^I \tau, \hat{X}^J(\tau, \sigma') \right] = 2\alpha' i\eta^{IJ}. \quad (4.70)$$

O lado esquerdo dessa equação pode ser escrito como

$$\left[ \hat{x}_0^I + \sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_0^I \tau, \hat{X}^J(\tau, \sigma') \right] = \left[ \hat{x}_0^I, \hat{X}^J(\tau, \sigma') \right] + \sqrt{2\alpha'} \tau \left[ \hat{\alpha}_0^I, \hat{X}^J(\tau, \sigma') \right], \quad (4.71)$$

onde

$$\left[ \hat{x}_0^I, \hat{X}^J(\tau, \sigma') \right] = \sqrt{2\alpha'} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-im\tau} \cos(m\sigma') \left[ \hat{x}_0^I, \hat{\alpha}_m^J \right] \quad (4.72)$$

e

$$\begin{aligned} \left[ \hat{\alpha}_0^I, \hat{X}^J(\tau, \sigma') \right] &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-im\tau} \cos(m\sigma') \underbrace{\left[ \hat{\alpha}_0^I, \hat{\alpha}_m^J \right]}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.73)$$

<sup>2</sup>Este resultado é tratado no capítulo 12 da referência [15], página 259.

Logo, a equação (4.70) resulta em

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-im\tau} \cos(m\sigma') [\hat{x}_0^I, \hat{\alpha}_m^J] = \sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ}. \quad (4.74)$$

Manipulando a somatória do lado esquerdo, obtemos:

$$[\hat{x}_0^I, \hat{\alpha}_0^J] + \sum_{m=1}^{\infty} \left( e^{-im\tau} [\hat{x}_0^I, \hat{\alpha}_m^J] + e^{im\tau} [\hat{x}_0^I, \hat{\alpha}_{-m}^J] \right) \cos(m\sigma') = \sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ}. \quad (4.75)$$

Essa equação pode ser simplificada consideravelmente se multiplicarmos ambos os lados por  $\cos(n\sigma')/\pi$ , com  $n \geq 1$ , e então integramos o resultado em relação a  $\sigma' \in [0, \pi]$ . Ao fazer isso, nos valendo de que

$$\int_0^\pi d\sigma' \cos(n\sigma') = 0, \quad (4.76)$$

obtemos

$$\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left( e^{-im\tau} [\hat{x}_0^I, \hat{\alpha}_m^J] + e^{im\tau} [\hat{x}_0^I, \hat{\alpha}_{-m}^J] \right) \int_0^\pi d\sigma' \cos(n\sigma') \cos(m\sigma') \right] = 0. \quad (4.77)$$

Usando a propriedade

$$\int_0^\pi d\sigma' \cos(n\sigma') \cos(m\sigma') = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi d\sigma' \cos(m\sigma') \cos(n\sigma') = \pi \delta_{m,n} \quad (4.78)$$

podemos escrever (4.77) como:

$$e^{-in\tau} [\hat{x}_0^I, \hat{\alpha}_n^J] + e^{in\tau} [\hat{x}_0^I, \hat{\alpha}_{-n}^J] = 0. \quad (4.79)$$

Uma vez que (4.79) deve valer para qualquer valor de  $\tau$ , a única solução possível para (4.79) é:

$$[\hat{x}_0^I, \hat{\alpha}_n^J] = 0, \quad n \neq 0. \quad (4.80)$$

Substituindo (4.80) em (4.75), encontramos a relação de comutação entre  $\hat{x}_0^I$  e  $\hat{\alpha}_0^J$ :

$$[\hat{x}_0^I, \hat{\alpha}_0^J] = \sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ}. \quad (4.81)$$

Podemos resumir as equações (4.80) e (4.81) em uma única expressão,

$$[\hat{x}_0^I, \hat{\alpha}_n^J] = \sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ} \delta_{n,0}, \quad (4.82)$$

e usar este resultado para calcular o comutador

$$\begin{aligned} [\hat{L}_n^\perp, \hat{x}_0^I] &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} [\hat{\alpha}_{n-p}^J \hat{\alpha}_p^J, \hat{x}_0^I] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left( \hat{\alpha}_{n-p}^J [\hat{\alpha}_p^J, \hat{x}_0^I] + [\hat{\alpha}_{n-p}^J, \hat{x}_0^I] \hat{\alpha}_p^J \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_{n-p}^J \left( -\sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ} \delta_{p,0} \right) + \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left( -\sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ} \delta_{n-p,0} \right) \hat{\alpha}_p^J \\ &= \frac{1}{2} \left( -\sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ} \hat{\alpha}_n^J - \sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ} \hat{\alpha}_n^J \right). \end{aligned} \quad (4.83)$$

Lembrando que  $\eta^{IJ} = \delta^{IJ}$ , da última linha obtemos que:

$$[\hat{L}_n^\perp, \hat{x}_0^I] = -i\sqrt{2\alpha'}\hat{\alpha}_n^I. \quad (4.84)$$

Por meio de um cálculo similar, podemos mostrar que  $\hat{L}_m^\perp$  e  $\hat{\alpha}_n^J$  satisfazem

$$[\hat{L}_m^\perp, \hat{\alpha}_n^J] = -n\hat{\alpha}_{m+n}^J. \quad (4.85)$$

Finalmente, vamos encerrar esta seção apresentando a álgebra de Virasoro:

$$[\hat{L}_m^\perp, \hat{L}_n^\perp] = \begin{cases} (m-n)\hat{L}_{m+n}, & m+n \neq 0 \\ (m-n)\hat{L}_{m+n} + 2m(m^2-1)\delta_{m+n}, 0, & m+n = 0 \end{cases} \quad (4.86)$$

Quando  $m+n \neq 0$ , temos a *álgebra de Virasoro sem extensão central*, ou álgebra de Witt, enquanto para o caso onde  $m+n = 0$  temos a *álgebra de Virasoro com extensão central*.

#### 4.1.5 Hamiltoniano e Reparametrização

Considere a seguinte reparametrização:

$$\tau \rightarrow \tau' = \tau + \epsilon\xi_m^\tau, \quad (4.87)$$

$$\sigma \rightarrow \sigma' = \sigma + \epsilon\xi_m^\sigma, \quad (4.88)$$

onde  $\epsilon$  é um parâmetro infinitesimal e

$$\xi_m^\tau = -ie^{im\tau} \cos(m\sigma), \quad (4.89)$$

$$\xi_m^\sigma = e^{im\tau} \sin(m\sigma). \quad (4.90)$$

Sob o efeito de (4.88), as coordenadas transversais  $X^I$  se transformam como

$$\hat{X}^I(\tau, \sigma) \rightarrow \hat{X}^I(\tau + \epsilon\xi_m^\tau, \sigma + \epsilon\xi_m^\sigma) = \hat{X}^I(\tau, \sigma) + \epsilon \left( \xi_m^\tau \hat{X}^I + \xi_m^\sigma \hat{X}^{I'} \right), \quad (4.91)$$

onde apenas realizamos a expansão em série de Taylor em torno de  $\epsilon = 0$  desprezando os termos de ordem quadrática.

Vamos demonstrar que o operador  $\hat{L}_m^\perp$  é responsável por gerar tal reparametrização. Para isso, considere o comutador:

$$\begin{aligned} [\hat{L}_m^\perp, \hat{X}^I(\tau, \sigma)] &= \left[ \hat{L}_m^\perp, \hat{x}_0^I + \sqrt{2\alpha'}\hat{\alpha}_0^I + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \hat{\alpha}_n^I e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \right] \\ &= [\hat{L}_m^\perp, \hat{x}_0^I] + \sqrt{2\alpha'} [\hat{L}_m^\perp, \hat{\alpha}_0^I] + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} e^{-in\tau} \cos(n\sigma) [\hat{L}_m^\perp, \hat{\alpha}_n^I]. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Usando (4.84) e (4.85), encontramos que:

$$\begin{aligned}
 [\hat{L}_m^\perp, \hat{X}^I(\tau, \sigma)] &= -i\sqrt{2\alpha'}\hat{\alpha}_m^I - i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \neq 0} e^{-in\tau} \cos(n\sigma)\hat{\alpha}_{m+n}^I \\
 &= -i\sqrt{2\alpha'}\left(\hat{\alpha}_m^I + \sum_{n \neq 0} e^{-in\tau} \cos(n\sigma)\hat{\alpha}_{m+n}^I\right) \\
 &= -i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\tau} \cos(n\sigma)\hat{\alpha}_{m+n}^I.
 \end{aligned} \tag{4.93}$$

Escrevendo  $\cos(n\sigma)$  em termos de exponenciais complexas

$$\cos(n\sigma) = \frac{(e^{in\sigma} + e^{-in\sigma})}{2}, \tag{4.94}$$

podemos simplificar (4.93):

$$\begin{aligned}
 [\hat{L}_m^\perp, \hat{X}^I(\tau, \sigma)] &= -i\sqrt{2\alpha'}\frac{1}{2}\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\tau}(e^{in\sigma} + e^{-in\sigma})\hat{\alpha}_{m+n}^I \\
 &= -i\sqrt{2\alpha'}\frac{1}{2}\sum_{n \in \mathbb{Z}} (e^{-in(\tau-\sigma)} + e^{-in(\tau+\sigma)})\hat{\alpha}_{m+n}^I \quad (m+n \rightarrow n) \\
 &= -i\sqrt{2\alpha'}\frac{1}{2}\sum_{n \in \mathbb{Z}} (e^{-i(n-m)(\tau-\sigma)} + e^{-i(n-m)(\tau+\sigma)})\hat{\alpha}_n^I \\
 &= -\frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-i(n-m)(\tau-\sigma)}\hat{\alpha}_n^I - \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-i(n-m)(\tau+\sigma)}\hat{\alpha}_n^I \\
 &= -\frac{i}{2}e^{im(\tau-\sigma)}\left(\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in(\tau-\sigma)}\hat{\alpha}_n^I\right) - \frac{i}{2}e^{im(\tau+\sigma)}\left(\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in(\tau+\sigma)}\hat{\alpha}_n^I\right).
 \end{aligned} \tag{4.95}$$

Perceba que os termos entre parênteses são exatamente as expressões (4.30) e (4.29), respectivamente:

$$\begin{aligned}
 [\hat{L}_m^\perp, \hat{X}^I(\tau, \sigma)] &= -\frac{i}{2}e^{im(\tau-\sigma)}\left(\dot{\hat{X}}^I - \dot{\hat{X}}^{I'}\right) - \frac{i}{2}e^{im(\tau+\sigma)}\left(\dot{\hat{X}}^I + \dot{\hat{X}}^{I'}\right) \\
 &= e^{im\tau}\left[-\frac{i}{2}e^{-im\sigma}\left(\dot{\hat{X}}^I - \dot{\hat{X}}^{I'}\right) - \frac{i}{2}e^{im\sigma}\left(\dot{\hat{X}}^I + \dot{\hat{X}}^{I'}\right)\right] \\
 &= e^{im\tau}\left[\left(-\frac{i}{2}e^{-im\sigma} - \frac{i}{2}e^{im\sigma}\right)\dot{\hat{X}}^I + \left(\frac{i}{2}e^{-im\sigma} - \frac{i}{2}e^{im\sigma}\right)\dot{\hat{X}}^{I'}\right] \\
 &= e^{im\tau}\left[-i\left(\frac{e^{-im\sigma} + e^{im\sigma}}{2}\right)\dot{\hat{X}}^I + \left(i\frac{e^{-im\sigma} - e^{im\sigma}}{2}\right)\dot{\hat{X}}^{I'}\right] \\
 &= -ie^{im\tau}\cos(m\sigma)\dot{\hat{X}}^I + e^{im\tau}\sin(m\sigma)\dot{\hat{X}}^{I'} \\
 &= \xi_m^\tau\dot{\hat{X}}^I + \xi_m^\sigma\dot{\hat{X}}^{I'}.
 \end{aligned} \tag{4.96}$$

Substituindo (4.96) em (4.91), chegamos à seguinte expressão:

$$\hat{X}^I(\tau + \epsilon\xi_m^\tau, \sigma + \epsilon\xi_m^\sigma) = \hat{X}^I(\tau, \sigma) + \epsilon[\hat{L}_m^\perp, \hat{X}^I(\tau, \sigma)]. \tag{4.97}$$

Essa equação nos permite concluir que os operadores de Virasoro são os *geradores* de reparametrizações na folha-mundo. Em especial, se  $m = 0$ , a equação (4.96) torna-se

$$[\hat{L}_0^\perp, \hat{X}^I(\tau, \sigma)] = -i\dot{\hat{X}}^I. \tag{4.98}$$

Comparando com a equação de movimento de Heisenberg para  $\hat{X}^I(\tau, \sigma)$ ,

$$[\hat{H}, \hat{X}^I(\tau, \sigma)] = -i\dot{\hat{X}}^I, \quad (4.99)$$

percebemos que, salvo por uma constante, o operador  $\hat{L}_0^\perp$  representa o hamiltoniano da corda quântica. De fato, para obter o hamiltoniano completo, basta adicionarmos a constante de ordenamento:

$$\hat{H} = \hat{L}_0^\perp - 1. \quad (4.100)$$

### 4.1.6 Base de Estados

Os operadores obtidos neste capítulo atuam em estados que pertencem ao *espaço de Hilbert*. Vamos denotar um estado geral da corda por  $|\Psi\rangle$ . Uma vez que temos um conjunto infinito de operadores criação  $\hat{a}_n^{I\dagger}$ , este estado geral pode ser escrito como uma combinação linear de infinitos elementos de uma base de estados. Cada elemento desta base é completamente definido pelo número de vezes que o operador criação atua no estado fundamental da corda:

$$|\lambda\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (\hat{a}_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} |p^+, p^I\rangle, \quad (4.101)$$

onde  $|p^+, p^I\rangle$  é o estado fundamental de uma corda com momento  $p^+$  ao longo da coordenada  $X^+$  e momento  $p^I$  ao longo das coordenadas transversais.

Note que  $\lambda_{n,I}$  é o parâmetro que denota o número de vezes que cada operador criação  $\hat{a}_n^I$  atua no estado fundamental — por isso é chamado de *número de ocupação*.

Como esperado, o estado fundamental é aniquilado pela atuação de  $\hat{a}_n^I$ :

$$\hat{a}_n^I |p^+, p^I\rangle = 0, \quad \text{para } n \geq 1. \quad (4.102)$$

Para calcular o espectro de massa da teoria bosônica de cordas abertas, precisamos primeiro conhecer o resultado da atuação do operador  $\hat{M}^2$  nos estados  $|\lambda\rangle$ . Considere os comutadores

$$\begin{aligned} [\hat{N}^\perp, \hat{a}_n^I] &= \sum_{m=1}^{\infty} m [\hat{a}_m^{J\dagger} \hat{a}_m^J, \hat{a}_n^I] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m \left( \hat{a}_m^{J\dagger} \underbrace{[\hat{a}_m^J, \hat{a}_n^I]}_{=0} + [\hat{a}_m^{J\dagger}, \hat{a}_n^I] \hat{a}_m^J \right) \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} m \eta^{IJ} \hat{a}_m^J \delta_{m,n} \\ &= -n \hat{a}_n^I \end{aligned} \quad (4.103)$$

e

$$\begin{aligned}
[\hat{N}^\perp, \hat{a}_n^{I\dagger}] &= \sum_{m=1}^{\infty} m [\hat{a}_m^{J\dagger} \hat{a}_m^J, \hat{a}_n^{I\dagger}] \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m \left( \hat{a}_m^{J\dagger} [\hat{a}_m^J, \hat{a}_n^{I\dagger}] + \underbrace{[\hat{a}_m^{J\dagger}, \hat{a}_n^{I\dagger}] \hat{a}_m^J}_{=0} \right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m \eta^{IJ} \hat{a}_m^{J\dagger} \delta_{m,n} \\
&= n \hat{a}_n^{I\dagger}.
\end{aligned} \tag{4.104}$$

Suponha que tomemos um elemento arbitrário da base de estados, a saber:  $\hat{a}_m^{J\dagger} \hat{a}_n^{I\dagger} |p^+, p^I\rangle$ . Ao atuar  $\hat{N}^\perp$  neste estado, obtemos

$$\begin{aligned}
\hat{N}^\perp (\hat{a}_m^{J\dagger} \hat{a}_n^{I\dagger} |p^+, p^I\rangle) &= [\hat{N}^\perp, \hat{a}_m^{J\dagger}] \hat{a}_n^{I\dagger} |p^+, p^I\rangle + \hat{a}_m^{J\dagger} \hat{N}^\perp \hat{a}_n^{I\dagger} |p^+, p^I\rangle \\
&= [\hat{N}^\perp, \hat{a}_m^{J\dagger}] \hat{a}_n^{I\dagger} |p^+, p^I\rangle + \hat{a}_m^{J\dagger} [\hat{N}^\perp, \hat{a}_n^{I\dagger}] |p^+, p^I\rangle + \underbrace{\hat{a}_m^{J\dagger} \hat{a}_n^{I\dagger} \hat{N}^\perp |p^+, p^I\rangle}_{=0} \\
&= m \hat{a}_m^{J\dagger} \hat{a}_n^{I\dagger} |p^+, p^I\rangle + n \hat{a}_m^{J\dagger} \hat{a}_n^{I\dagger} |p^+, p^I\rangle \\
&= (m+n) (\hat{a}_m^{J\dagger} \hat{a}_n^{I\dagger} |p^+, p^I\rangle).
\end{aligned} \tag{4.105}$$

Em geral, temos que o autovalor de  $\hat{N}^\perp$  em relação a um estado arbitrário  $|\lambda\rangle$  é apenas a soma nos níveis de cada operador criação atuando no estado fundamental. Logo,  $\hat{N}^\perp$  satisfaz a equação de autovalor:

$$\hat{N}^\perp |\lambda\rangle = N^\perp |\lambda\rangle, \quad \text{onde } N^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \lambda_{n,I}. \tag{4.106}$$

Relembrando que  $\hat{M}^2$  pode ser escrito como

$$\hat{M}^2 = \frac{1}{\alpha'} (\hat{N}^\perp - 1), \tag{4.107}$$

temos tudo que é preciso para obter o autovalor do operador  $\hat{M}^2$  em relação a um autoestado  $|\lambda\rangle$ :

$$\hat{M}^2 |\lambda\rangle = M^2 |\lambda\rangle, \quad \text{onde } M^2 = \frac{1}{\alpha'} (N^\perp - 1). \tag{4.108}$$

A Tabela 4.1 mostra os primeiros estados excitados da corda em ordem crescente de massa. O estado fundamental apresenta uma característica peculiar: sua massa é negativa! Este estado, chamado de *táquion*, representa uma partícula escalar instável.

Considere agora um resultado oriundo da quantização dos campos de Maxwell nas coordenadas do cone de luz. Neste caso, um estado geral associado ao fóton é dado por <sup>3</sup> :

$$|\text{fóton}\rangle = \sum_{I=2}^{D-1} \zeta_I a_{p^+, p^I}^{I\dagger} |\Omega\rangle, \tag{4.109}$$

<sup>3</sup>Este resultado é abordado no capítulo 10 da referência [15], página 206.

Estado	$N^\perp$	$M^2$
$ p^+, p^I\rangle$	0	$-1/\alpha'$
$\hat{a}_1^I  p^+, p^I\rangle$	1	0
$\hat{a}_1^I \hat{a}_1^J  p^+, p^I\rangle$	2	$1/\alpha'$
$\hat{a}_2^I  p^+, p^I\rangle$	2	$1/\alpha'$

Tabela 4.1: Listamos os quatro primeiros estados excitados da corda aberta. Note que os estados associados a  $N^\perp = 2$  são degenerados, enquanto o estado fundamental apresenta a peculiaridade de ter massa negativa.

onde  $\zeta_I$  é o vetor de polarização,  $a_{p^+, \vec{p}^I}^{I\dagger}$  é o operador criação no contexto da teoria quântica de campos e  $|\Omega\rangle$  é o estado de vácuo, que representa a ausência de partículas.

Paralelamente, podemos perceber que o primeiro estado excitado da corda tem massa nula. Um estado geral sem massa pode ser obtido pela seguinte combinação linear:

$$|M^2 = 0\rangle = \sum_{I=2}^{D-2} \zeta_I \hat{a}_1^I |p^+, p^I\rangle. \quad (4.110)$$

Note que os estados (4.109) e (4.110) são semelhantes: ambos tem a mesma massa, apresentam o mesmo momento na descrição do cone de luz e  $\zeta_I$  é um vetor arbitrário. Com isso, identificamos a seguinte equivalência:

$$\hat{a}_1^I |p^+, p^I\rangle \leftrightarrow a_{p^+, p^I}^{I\dagger} |\Omega\rangle. \quad (4.111)$$

Este resultado nos permite afirmar que a teoria bosônica de cordas inclui naturalmente estados que representam os fótons.

É importante citar que a teoria quântica de cordas que inclui férmions traz consigo o conceito de *supersimetria*, onde para cada bóson há um férmion associado, e vice-versa. Por isso, essa teoria é chamada de *Teoria de Supercordas*. Nela, o estado associado ao táquion não aparece, o que a torna uma teoria fisicamente realista. Não trataremos de supercordas neste trabalho — uma introdução aos conceitos de supersimetria pode ser encontrada na referência [17], capítulo 3, enquanto uma abordagem simplificada a respeito de supercordas está disponível na referência [15], capítulo 14.

## 4.2 Quantização da Corda Fechada Relativística

O procedimento de quantização canônica da corda fechada é muito similar ao que realizamos para a corda aberta. De fato, as relações de comutação canônicas permanecem as mesmas:

$$[\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{\mathcal{P}}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma'), \quad (4.112)$$

$$[\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{X}^J(\tau, \sigma')] = 0, \quad (4.113)$$

$$[\hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma), \hat{\mathcal{P}}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = 0. \quad (4.114)$$

As expressões (3.132) e (3.133) também tornam-se uma relação entre operadores. Em especial, em termos das coordenadas transversais, temos

$$\dot{\hat{X}}^I + \hat{X}^{I'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_n^I e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad (4.115)$$

$$\dot{\hat{X}}^I - \hat{X}^{I'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_n^I e^{-in(\tau-\sigma)}, \quad (4.116)$$

que são expressões análogas a equação (4.5), salvo pelo fato de que agora temos dois conjuntos de operadores:  $\hat{\alpha}_n^I$  e  $\hat{\alpha}_n^{I'}$ . A versão quântica das relações (4.117) e (4.118) tornam-se:

$$\hat{\alpha}_n^\mu = \hat{a}_n^\mu \sqrt{n}, \quad \hat{\alpha}_n^{\mu'} = \hat{a}_n^{\mu'} \sqrt{n}, \quad (4.117)$$

$$\alpha_{-n}^{\mu'} = \hat{a}_n^{\mu'} \sqrt{n}, \quad \hat{\alpha}_{-n}^\mu = \hat{a}_n^\mu \sqrt{n}, \quad (4.118)$$

$$\hat{\alpha}_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \hat{p}^\mu. \quad (4.119)$$

Devido à similaridade entre as relações de comutação da corda aberta e fechada, não é necessário refazer todos os cálculos da seção anterior. Por exemplo, ainda valem os comutadores (4.24) e (4.25):

$$\left[ (\dot{\hat{X}}^I \pm \hat{X}^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{\hat{X}}^J \pm \hat{X}^{J'}) (\tau, \sigma') \right] = \pm 4\pi\alpha' i \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'), \quad (4.120)$$

$$\left[ (\dot{\hat{X}}^I \pm \hat{X}^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{\hat{X}}^J \mp \hat{X}^{J'}) (\tau, \sigma') \right] = 0, \quad (4.121)$$

para  $\sigma \in [0, 2\pi]$ .

Calculando explicitamente o lado esquerdo de (4.120) utilizando as relações (4.115) e (4.116), obtemos:

$$\left[ (\dot{\hat{X}}^I + \hat{X}^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{\hat{X}}^J + \hat{X}^{J'}) (\tau, \sigma') \right] = 2\alpha' \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} e^{-ip(\tau+\sigma)} e^{-iq(\tau+\sigma')} [\hat{\alpha}_p^I, \hat{\alpha}_q^J], \quad (4.122)$$

$$\left[ (\dot{\hat{X}}^I - \hat{X}^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{\hat{X}}^J - \hat{X}^{J'}) (\tau, \sigma') \right] = 2\alpha' \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} e^{-ip(\tau-\sigma)} e^{-iq(\tau-\sigma')} [\hat{\alpha}_p^I, \hat{\alpha}_q^J]. \quad (4.123)$$

Logo, decorre de (4.120) que

$$\sum_{p, q \in \mathbb{Z}} e^{-ip(\tau+\sigma)} e^{-iq(\tau+\sigma')} [\hat{\alpha}_p^I, \hat{\alpha}_q^J] = 2\pi i \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'), \quad (4.124)$$

$$\sum_{p, q \in \mathbb{Z}} e^{-ip(\tau-\sigma)} e^{-iq(\tau-\sigma')} [\hat{\alpha}_p^I, \hat{\alpha}_q^J] = -2\pi i \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (4.125)$$

Note que a equação (4.124) é análoga a (4.40). Desta vez, não há necessidade de definir nenhum operador auxiliar — essa expressão já é válida no intervalo  $\sigma \in [0, 2\pi]$ . Seguindo o mesmo procedimento de multiplicar ambos os lados por  $e^{im\sigma} e^{in\sigma'} / 4\pi^2$  e então integrar o resultado em relação a  $\sigma$  e  $\sigma'$  em todo o intervalo  $[0, 2\pi]$ , obtemos:

$$[\hat{\alpha}_m^I, \hat{\alpha}_n^J] = m \eta^{IJ} \delta_{m+n, 0}. \quad (4.126)$$

De maneira similar, da equação (4.125) podemos concluir que:

$$[\hat{\alpha}_{-m}^I, \hat{\alpha}_{-n}^J] = -m\eta^{IJ}\delta_{m+n,0}. \quad (4.127)$$

Uma vez que os operadores  $\hat{\alpha}_n^I$  são definidos para  $m, n \in \mathbb{Z}$ , podemos fazer  $-m, -n \rightarrow m, n$  e então escrever:

$$[\hat{\alpha}_m^I, \hat{\alpha}_n^J] = m\eta^{IJ}\delta_{m+n,0}. \quad (4.128)$$

Reescrevendo (4.126) e (4.128) como

$$[\hat{\alpha}_m^I, \hat{\alpha}_{-n}^J] = m\eta^{IJ}\delta_{m,n}, \quad (4.129)$$

$$[\hat{\alpha}_m^I, \hat{\alpha}_{-n}^J] = m\eta^{IJ}\delta_{m,n}, \quad (4.130)$$

podemos encontrar as relações de comutação que os operadores  $\hat{a}_n^I$  e  $\hat{a}_n^I$  satisfazem, usando (4.117) e (4.118):

$$[\hat{a}_m^I, \hat{a}_n^{J\dagger}] = \eta^{IJ}\delta_{m,n}, \quad (4.131)$$

$$[\hat{a}_m^I, \hat{a}_n^{J\dagger}] = \eta^{IJ}\delta_{m,n}. \quad (4.132)$$

Novamente, essas são as mesmas relações de comutação que os operadores de escada do oscilador harmônico quântico satisfazem. Identificamos os conjuntos  $\{\hat{a}_n^{I\dagger}, \hat{a}_n^{I\dagger}\}$  e  $\{\hat{a}_n^I, \hat{a}_n^I\}$  como operadores criação e aniquilação, respectivamente. Conforme veremos, a atuação destes operadores no estado fundamental irá definir uma base de estados.

### 4.2.1 Base de estados

Quando resolvemos as equações de movimento da corda fechada, obtivemos duas expressões para os modos transversais de Virasoro:

$$\bar{L}_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_{n-p}^I \bar{\alpha}_p^I, \quad L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I. \quad (4.133)$$

Para obter a versão quântica dessas relações, precisamos nos atentar para a ordem em que os operadores criação e aniquilação aparecem. Novamente, essa ambiguidade apenas existe quando  $n = 0$ . Para resolver este problema, vamos impor o ordenamento normal da mesma forma que fizemos na quantização da corda aberta, definindo  $\hat{\bar{L}}_0^\perp$  e  $\hat{L}_0^\perp$  de forma análoga a (4.59), sem incluir a constante de ordenamento:

$$\hat{\bar{L}}_0^\perp \equiv \frac{\alpha'}{4} \hat{p}^I \hat{p}^I + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-n}^I \hat{\alpha}_n^I, \quad (4.134)$$

$$\hat{L}_0^\perp \equiv \frac{\alpha'}{4} \hat{p}^I \hat{p}^I + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-n}^I \hat{\alpha}_n^I. \quad (4.135)$$

Novamente, a constante de ordenamento é fixada pela dimensionalidade do espaço-tempo. Assim como para cordas abertas, a teoria bosônica de cordas fechadas só preserva a invariância de Lorentz quando  $D = 26$ , o que resulta em  $a = \bar{a} = -1$ .

Definindo o *operador número*:

$$\hat{N}^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n \hat{a}_n^{I\dagger} \hat{a}_n^I, \quad (4.136)$$

$$\hat{N}^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n \hat{a}_n^{I\dagger} \hat{a}_n^I, \quad (4.137)$$

podemos reescrever (4.134) e (4.135) como

$$\hat{L}_0^\perp \equiv \frac{\alpha'}{4} \hat{p}^I \hat{p}^I + \hat{N}^\perp, \quad (4.138)$$

$$\hat{L}_0^\perp \equiv \frac{\alpha'}{4} \hat{p}^I \hat{p}^I + \hat{N}^\perp. \quad (4.139)$$

Considere a equação clássica (3.143). Sua respectiva versão quântica é obtida realizando as substituições  $L_0^\perp \rightarrow (\hat{L}_0^\perp - 1)$  e  $\bar{L}_0^\perp \rightarrow (\hat{\bar{L}}_0^\perp - 1)$ :

$$\begin{aligned} 2\hat{p}^+ \hat{p}^- &= \frac{2}{\alpha'} \left[ (\hat{\bar{L}}_0^\perp - 1) + (\hat{L}_0^\perp - 1) \right] \\ &= \frac{2}{\alpha'} (\hat{\bar{L}}_0^\perp + \hat{L}_0^\perp - 2). \end{aligned} \quad (4.140)$$

Substituindo este resultado na expressão relativística (4.64) e então usando as definições (4.138) e (4.139), obtemos que o operador  $\hat{M}^2$  é dado por:

$$\hat{M}^2 = \frac{2}{\alpha'} (\hat{\bar{N}}^\perp + \hat{N}^\perp - 2). \quad (4.141)$$

Agora, vamos definir a base de estados para a corda fechada. De forma análoga a expressão (4.101), essa base é formada por todos os estados obtidos pela atuação dos operadores criação e aniquilação no estado fundamental:

$$|\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \left[ \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (\hat{a}_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} \right] \times \left[ \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (\hat{\bar{a}}_n^{I\dagger})^{\bar{\lambda}_{n,I}} \right] |p^+, p^I\rangle. \quad (4.142)$$

Assim como obtivemos em (4.106), o autovalor dos operadores  $\hat{\bar{N}}^\perp$  e  $\hat{N}^\perp$  em relação a  $|\lambda, \bar{\lambda}\rangle$  é dado por

$$N^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \lambda_{n,I} \quad \text{e} \quad \bar{N}^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \bar{\lambda}_{n,I}. \quad (4.143)$$

No entanto, nem todos os estados presentes em (4.142) são fisicamente aceitáveis. Atenemos para a condição clássica (3.140). Quanticamente, essa expressão se traduz na condição  $\hat{\bar{L}}_0^\perp = \hat{L}_0^\perp$ , o que de acordo com (4.138) e (4.139) implica na igualdade

$$N^\perp = \bar{N}^\perp. \quad (4.144)$$

Apenas os estados que satisfazem (4.144) de fato pertencem a base de estados (4.142).

O próximo passo é obter o espectro de massa da teoria bosônica de cordas fechadas. Conhecendo os autovalores (4.143), podemos facilmente avaliar a atuação de  $\hat{M}^2$  em um estado qualquer da base:

$$\hat{M}^2 |\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \frac{2}{\alpha'} (\bar{N}^\perp + N^\perp - 2) |\lambda, \bar{\lambda}\rangle. \quad (4.145)$$

Estado	$N^\perp, \bar{N}^\perp$	$M^2$
$ p^+, p^I\rangle$	0, 0	$-4/\alpha'$
$\hat{a}_1^{I\dagger} \hat{a}_1^{J\dagger}  p^+, p^I\rangle$	1, 1	0
$\hat{a}_1^{I\dagger} \hat{a}_1^{J\dagger} \hat{a}_1^{K\dagger} \hat{a}_1^{L\dagger}  p^+, p^I\rangle$	2, 2	$4/\alpha'$
$\hat{a}_1^{I\dagger} \hat{a}_1^{J\dagger} \hat{a}_2^{K\dagger}  p^+, p^I\rangle$	2, 2	$4/\alpha'$
$\hat{a}_2^{I\dagger} \hat{a}_1^{J\dagger} \hat{a}_1^{K\dagger}  p^+, p^I\rangle$	2, 2	$4/\alpha'$
$\hat{a}_2^{I\dagger} \hat{a}_2^{J\dagger}  p^+, p^I\rangle$	2, 2	$4/\alpha'$

Tabela 4.2: Listamos os seis primeiros estados excitados da corda fechada, que satisfazem a condição  $N^\perp = \bar{N}^\perp$ . Assim como no caso da corda aberta, o estado fundamental também tem massa negativa e representa o táquion, uma partícula escalar instável. Note que os estados associados a  $N^\perp = \bar{N}^\perp = 2$  são quadruplicamente degenerados.

A Tabela 4.2 reúne os seis primeiros estados excitados, por ordem crescente de massa. Note que estado fundamental tem massa negativa. Assim como no caso da corda aberta, este estado representa uma partícula escalar instável: o táquion.

Considere um estado geral com massa nula, isto é,  $N^\perp = \bar{N}^\perp = 1$ . Este estado pode ser escrito como a seguinte combinação linear:

$$|M^2 = 0\rangle = \sum_{I,J} R_{IJ} \hat{a}_1^{I\dagger} \hat{a}_1^{J\dagger} |p^+, p^I\rangle \quad (4.146)$$

onde  $R_{IJ}$  é uma matriz  $(D-2) \times (D-2)$  arbitrária, que pode ser decomposta em uma parte simétrica e uma parte antissimétrica, respectivamente:

$$R_{IJ} = S_{IJ} + A_{IJ}. \quad (4.147)$$

Podemos escrever a parte simétrica  $S_{IJ}$  como:

$$\begin{aligned} S_{IJ} &= \left( S_{IJ} - \frac{1}{D-2} \delta_{IJ} S \right) + \frac{1}{D-2} \delta_{IJ} S \\ &= S'_{IJ} + \frac{S}{D-2} \delta_{IJ}, \end{aligned} \quad (4.148)$$

onde  $S$  é o traço de  $S_{IJ}$  e  $S'_{IJ}$  é, por construção, uma matriz com traço nulo. Como consequência, podemos decompor os estados (4.146) em três grupos:

$$|M^2 = 0\rangle_1 = \sum_{I,J} S'_{IJ} \hat{a}_1^{I\dagger} \hat{a}_1^{J\dagger} |p^+, p^I\rangle, \quad (4.149)$$

$$|M^2 = 0\rangle_2 = \frac{S}{D-2} \hat{a}_1^{I\dagger} \hat{a}_1^{J\dagger} |p^+, p^I\rangle, \quad (4.150)$$

$$|M^2 = 0\rangle_3 = \sum_{I,J} A_{IJ} \hat{a}_1^{I\dagger} \hat{a}_1^{J\dagger} |p^+, p^I\rangle. \quad (4.151)$$

Vamos focar nossa atenção nos estados  $|M^2 = 0\rangle_1$ <sup>4</sup>. Ao quantizar um campo gravitacional livre nas coordenadas do cone de luz, obtém-se que o estado geral de um gráviton —

<sup>4</sup>A interpretação física dos estados  $|M^2 = 0\rangle_2$  e  $|M^2 = 0\rangle_3$  é abordada na referência [15], página 292

partícula mediadora da interação gravitacional — pode ser escrito como<sup>5</sup>:

$$|\text{gráviton}\rangle = \sum_{I,J=2}^{D-1} \zeta_{IJ} \hat{a}_{p^+,p^I}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle \quad (4.152)$$

onde  $\zeta_{IJ}$  é o tensor de polarização: uma matriz arbitrária de dimensão  $(D-2) \times (D-2)$ , com traço nulo. Além disso,  $\hat{a}_{p^+,p^I}^{IJ\dagger}$  é o operador criação no contexto da teoria quântica de campos, que atua no estado de vácuo  $|\Omega\rangle$ .

Comparando (4.152) e (4.149), podemos fazer a seguinte identificação:

$$\hat{a}_1^{I\dagger} \hat{a}_1^{J\dagger} |p^+, p^I\rangle \leftrightarrow \hat{a}_{p^+,p^I}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle, \quad (4.153)$$

pois ambos os estados carregam os mesmos índices de polarização  $I$  e  $J$ , o mesmo momento e a mesma massa.

Este resultado nos mostra que a teoria bosônica de cordas fechadas inclui naturalmente a gravidade. Este resultado permanece verdadeiro mesmo na teoria de supercordas, fazendo com que esta seja uma candidata à teoria de gravitação quântica.

### 4.3 Conclusão

Partindo das relações clássicas obtidas no Capítulo 3, calculamos os parênteses de Poisson para as variáveis dinâmicas  $X^I(\tau, \sigma)$  e  $\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma)$ . Usando a prescrição (4.8), deduzimos as relações de comutação (4.13), (4.14) e (4.15), das quais obtivemos que  $\hat{a}_n^{I\dagger}$  e  $\hat{a}_n^I$  atuam como operadores criação e aniquilação de modos de oscilação da corda, respectivamente.

Ao impor o ordenamento normal de  $\hat{L}_0^\perp$ , vimos que o operador  $\hat{M}^2$  é dado em termos da constante de ordenamento (4.57), fixada pela dimensionalidade do espaço-tempo. Usando o fato de que a consistência da teoria bosônica de cordas exige  $D = 26$ , obtivemos que  $a = -1$ .

Reunimos os primeiros estados excitados da corda aberta na Tabela 4.1. O estado fundamental tem massa negativa — ele representa uma partícula escalar instável denominada táquion. Usando um resultado oriundo da quantização dos campos de Maxwell no cone de luz, concluímos que o espectro de cordas abertas inclui os fótons naturalmente.

Uma vez que a solução clássica para cordas fechadas gera equações muito similares às que obtivemos para cordas abertas, o processo de quantização canônica também é muito semelhante. Reunimos os primeiros estados excitados na Tabela 4.2, onde também percebemos a peculiaridade de que o estado fundamental tem massa negativa, representando um táquion. Vimos que um estado geral sem massa, obtido com  $\bar{N}^\perp = N^\perp = 1$ , pode ser associado a um estado que representa um gráviton, fazendo da teoria de cordas uma candidata à teoria de gravitação quântica.

Neste capítulo, consideramos que os extremos da corda satisfazem a condição de contorno de Neumann para todas as  $D-2$  coordenadas transversais. No entanto, podemos limitar o movimento dos extremos da corda a certas superfícies de dimensão  $p \leq D-1$ , denominadas de  $Dp$ -Branas. De fato, a motivação para o desenvolvimento da correspondência AdS/CFT surgiu da identificação que uma teoria de cordas formulada em  $N$   $Dp$ -Branas corresponde a uma teoria de gauge com  $N$  cores, no limite em que  $N \rightarrow \infty$ . Para uma discussão mais detalhada sobre estes tópicos, sugerimos consultar as referências [17],[18], e [15].

<sup>5</sup>Este resultado é obtido na referência [15], capítulo 10, página 209.

## Parte II

# Introdução à Relatividade Geral

# Capítulo 5

## Princípio da Equivalência

A gravidade é uma das forças fundamentais da natureza. Ela está presente em todo lugar, e até onde sabemos, é uma força sempre atrativa. Seus efeitos são responsáveis por fenômenos que observamos em diversas escalas: desde a trajetória parabólica de balas de canhão até a formação de estruturas gigantescas no cosmos, como estrelas, galáxias e buracos negros.

Mesmo sendo uma força tão presente em nosso cotidiano, a intensidade da interação gravitacional é muito pequena. Um simples ímã é capaz de erguer um pequeno peso de metal, superando a atração gravitacional de um planeta inteiro. A Tabela 5.1 mostra um comparativo entre a força gravitacional e as demais forças descritas pelo modelo padrão.

Força	Intensidade
Forte	10
Eletromagnética	$10^{-2}$
Fraca	$10^{-13}$
Gravitacional	$10^{-42}$

Tabela 5.1: Realizamos um comparativo entre a intensidade da força gravitacional e as outras forças fundamentais, em uma escala onde a intensidade da força forte é tomada como 10. Estes valores apenas servem para efeito de comparação e não devem ser tomados de maneira literal. Fonte: [19].

Explicar essa discrepância ainda é um problema em aberto na física moderna.

Neste capítulo, vamos abordar a formulação clássica da gravidade e a sua inconsistência com a relatividade especial. Introduzindo o *princípio da equivalência*, tentaremos seguir uma argumentação lógica que culminará na motivação para o desenvolvimento da teoria da relatividade geral. Nela, a gravidade não atua como uma força no sentido usual, mas sim é uma consequência da curvatura do espaço-tempo.

### 5.1 Galileu e Newton: os primeiros estudos sobre a gravidade

Galileu Galilei (1554-1642) estabeleceu os primeiros fundamentos no estudo da força da gravidade. Seu particular interesse no movimento de balas de canhão o levou a realizar uma

série de experimentos, cujos principais resultados (descritos em uma linguagem moderna) foram:

- o tempo de queda de um corpo não depende da sua massa;
- todos os corpos caem com aceleração constante.

Hoje, estes resultados são óbvios para qualquer estudante de física básica, mas na época de Galileu, representavam um marco no nascimento da física moderna.

Galileu observou que o movimento bidimensional de um lançamento de projétil poderia ser analisado como dois movimentos unidimensionais independentes: um corpo em queda livre com aceleração vertical constante e um corpo se movendo horizontalmente com velocidade constante. O movimento completo, por sua vez, é parabólico.

Nicolau Copérnico (1473-1543) já havia sugerido que a Terra e os outros planetas orbitavam ao redor do Sol. Estudiosos que viviam na época de Galileu argumentavam contra essa hipótese, uma vez que não conseguiam ‘sentir’ o movimento da Terra. Este problema foi resolvido pelas ideias de Galileu sobre a decomposição de movimento: um observador na cabine de um navio que viaja por águas calmas a velocidade constante é incapaz de perceber o movimento da cabine — todos os objetos presentes na cabine possuem a mesma velocidade na direção do movimento do navio, de modo que a velocidade relativa deles em relação ao observador é zero. Qualquer experimento feito na cabine se comporta da mesma forma como se fosse feito em solo firme. Este seria o motivo pelo qual não sentimos o movimento da Terra ao redor do Sol — todos os corpos na Terra viajam pelo sistema solar com a mesma velocidade. Mais tarde, Einstein usou este princípio para desenvolver a teoria da relatividade especial, enunciando que *as leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais*.

Em seu livro *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, Isaac Newton (1643 - 1727) observou que a força responsável por fazer os corpos caírem é a mesma que mantém a Lua orbitando ao redor da Terra e a Terra orbitando ao redor do Sol. Matematicamente, essa ideia é sintetizada na *lei da gravitação universal*:

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad (5.1)$$

onde  $\vec{F}_{12}$  é a força gravitacional que uma massa  $m_1$  exerce sobre uma massa  $m_2$ , cujos vetores posição são respectivamente  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  e  $G$  é a constante da gravitação universal.

Embora a lei da gravitação de Newton tenha sido o suficiente para descrever a trajetória elíptica da maioria dos planetas do sistema solar, ela falhou em obter a solução correta para a órbita de Mercúrio, o planeta mais próximo do Sol. Além disso, com o advento da relatividade especial, é sabido que nenhuma forma de interação entre dois corpos pode ser transmitida mais rápido que a velocidade da luz. A equação (5.1), no entanto, sugere que a gravidade atua como uma força instantânea. Essas contradições levaram à formulação da *Teoria da Relatividade Geral de Einstein*: uma generalização da lei de gravitação de Newton que incorpora a relatividade especial e explica a gravidade não como uma força, mas como uma manifestação da geometria do próprio espaço-tempo <sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Uma boa introdução história a respeito da transição da gravitação Newtoniana para a relatividade geral pode ser encontrada em [20]

## 5.2 Princípio da Equivalência

Considere o seguinte experimento: um observador é colocado em repouso no interior de uma caixa fechada na superfície da Terra, sem qualquer contato com o mundo exterior, enquanto outro observador está dentro de uma caixa idêntica, acoplada a foguetes, que se move no espaço vazio com aceleração  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Qualquer objeto colocado em ambas as caixas experimenta uma mesma força: no primeiro caso por causa da gravidade e no segundo em razão da força fictícia oriunda da aceleração do referencial. Nenhum dos observadores consegue distinguir em qual das caixas ele se encontra. O fato de que é impossível distinguir entre um movimento acelerado e a ação de um campo gravitacional uniforme é chamado de *princípio da equivalência*.

Suponha que o observador dentro da caixa que se move pelo espaço esteja de posse de um laser. De acordo com a relatividade especial, o movimento da luz não é afetado pelo movimento da fonte. Se o laser é disparado horizontalmente dentro da caixa, sua trajetória como um todo será uma linha reta, como mostra a Figura 5.1.

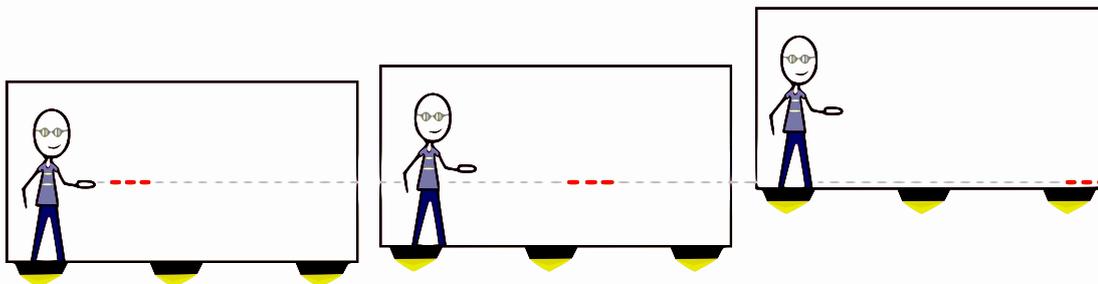


Figura 5.1: Um observador, em repouso dentro de uma caixa fechada que se move pelo espaço vazio com aceleração constante de mesmo módulo que a aceleração da gravidade na superfície da Terra, dispara um laser (linha vermelha tracejada) horizontalmente. A figura mostra três instantes de tempo, sendo o primeiro logo após o disparo e o último quando o feixe de luz encontra a outra extremidade da caixa. Uma vez que o movimento da luz não é afetado pelo movimento da fonte, o laser irá percorrer uma trajetória reta, destacado pela linha cinza tracejada. Obviamente, as escalas de tempo e distâncias foram exageradas para facilitar a visualização.

No entanto, devido ao seu movimento acelerado, o observador dentro da caixa veria o laser percorrer uma trajetória curva, como exemplificado na Figura 5.2.

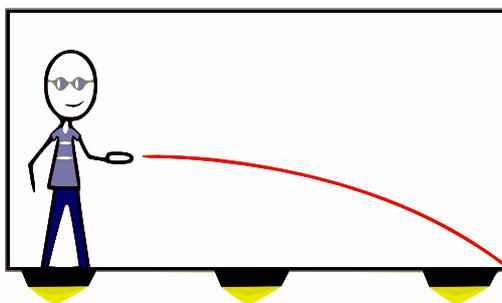


Figura 5.2: Do ponto de vista do observador dentro da caixa, o feixe de luz atinge a outra extremidade em uma altura inferior à aquela em que foi disparado. A trajetória completa será descrita por uma parábola.

De acordo com o princípio da equivalência, ao realizar o mesmo experimento na caixa

que se manteve na superfície da Terra, o outro observador também deve ver o laser percorrendo uma trajetória curva, como na Figura 5.3.

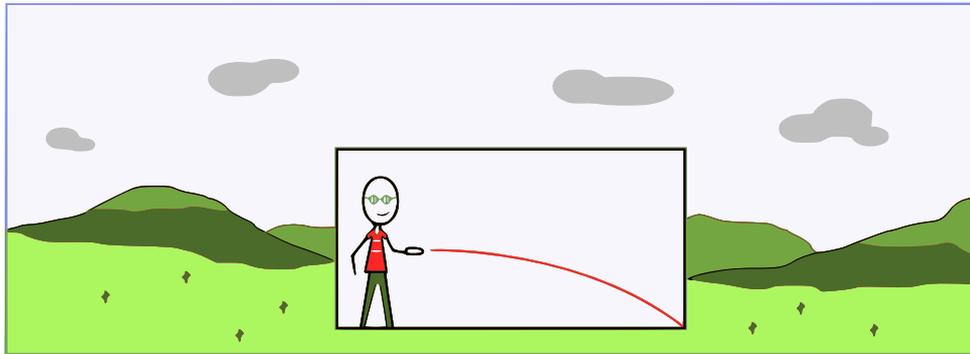


Figura 5.3: De acordo com o princípio da equivalência, não é possível distinguir um referencial acelerado de um referencial na presença de um campo gravitacional, por nenhum experimento. Logo, o observador dentro da caixa que ficou na superfície da Terra também verá o laser percorrer uma trajetória curva.

A pergunta que surge é: por que a luz não percorre uma linha reta na presença de um campo gravitacional? A resposta, dada por Einstein mediante a teoria da relatividade geral, é que a presença de matéria modifica a geometria do próprio espaço-tempo, de modo que a menor distância entre dois pontos torna-se uma curva, chamada de geodésica. Essa é a trajetória seguida por todos os corpos no espaço-tempo, incluindo um feixe de luz. Este é o efeito que entendemos por gravidade.

### 5.3 Conclusão

Neste capítulo realizamos uma revisão histórica dos estudos sobre a gravidade. Vimos a contribuição de Galileu a respeito da universalidade da ação gravitacional, descrita pela sua observação de que todos os corpos na Terra caem com a mesma aceleração. Também revisamos a primeira formulação matemática para a gravidade, dada por Isaac Newton em sua famosa lei da gravitação universal. Por fim, enunciemos o princípio da equivalência e vimos que, na presença de um campo gravitacional, um feixe de luz percorre uma trajetória curva. A explicação deste fenômeno veio com a teoria da relatividade geral, que descreve a gravidade em termos da geometria do espaço-tempo.

No próximo capítulo, vamos discutir como descrever matematicamente a curvatura do espaço-tempo — isso nos permitirá entender o significado físico das equações de campo de Einstein. Posteriormente, abordaremos uma solução específica dessas equações: *o espaço-tempo anti-de Sitter*, que é de particular interesse para a aplicação da correspondência AdS/CFT.

# Capítulo 6

## Elementos de Geometria Diferencial

Vimos no capítulo anterior que, para explicar a trajetória curva de um feixe de luz na presença de um campo gravitacional, Einstein sugeriu que a própria geometria do espaço-tempo não é plana e imutável.

De acordo com o princípio da equivalência, a física em um referencial que se move com aceleração constante é precisamente a mesma de um referencial em repouso na presença de um campo gravitacional, no sentido usual descrito pela lei da gravitação universal. Ao atribuir o efeito da gravidade à própria curvatura do espaço-tempo, o princípio da equivalência pode ser generalizado da seguinte forma: *em regiões suficientemente pequenas do espaço-tempo, as leis da física se reduzem a aquelas da relatividade especial: é impossível detectar a existência de um campo gravitacional por qualquer experimento local.* Em outras palavras, o espaço-tempo é localmente plano.

Para formular uma teoria da gravidade que satisfaz este princípio, precisamos do ferramental matemático que descreve espaços-curvos. De fato, vamos tratar o espaço-tempo de dimensão  $D$  como um objeto matemático chamado de *variedade topológica diferenciável*: um conjunto contínuo de pontos que localmente pode ser aproximado pelo  $\mathbb{R}^D$ . Uma vez introduzida essa formulação, seremos capazes de entender como a geometria do espaço-tempo afeta o movimento da matéria e se relaciona com a gravidade.

### 6.1 Geometria Diferencial

A geometria diferencial é o campo da matemática que estuda estruturas geométricas com base no formalismo do cálculo diferencial. Na mecânica clássica, o espaço onde definimos as quantidades físicas é plano: euclidiano no caso não-relativístico e de Minkowski na relatividade especial.

Para descrever quantidades físicas em espaços curvos, precisamos definir objetos matemáticos básicos, como vetores, tensores e operadores diferenciais. Nesta seção, vamos introduzir estes conceitos sem a pretensão de seguir um formalismo matematicamente rigoroso, uma vez que isso pode ser encontrado em livros especializados, como [21], [22], [23] e [24]. Nosso foco será dado aos conceitos que são necessários para entender e usar as equações de campo de Einstein — assunto que será tratado no próximo capítulo.

### 6.1.1 Vetores e Covetores

Seja  $\mathcal{M}$  uma variedade topológica diferenciável de dimensão  $D$ . Um sistema de coordenadas  $x$  é um mapa<sup>1</sup> que associa coordenadas  $(x^0, \dots, x^{D-1}) \in \mathbb{R}^D$  a cada ponto  $p \in \mathcal{M}$ :

$$\begin{aligned} x &: \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^D, \\ x &: p \mapsto x(p) = (x^0(p), \dots, x^{D-1}(p)). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Como exemplo, tomemos uma esfera, denotada por  $S^2$ . As redondezas de cada ponto  $p \in S^2$  comporta-se como o plano  $\mathbb{R}^2$ , como mostra a figura Figura 6.1. Neste caso, dizemos

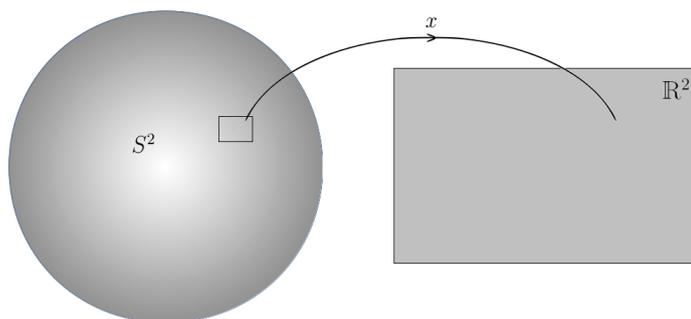


Figura 6.1: Localmente, as redondezas de qualquer ponto que pertence a uma esfera se comporta como o  $\mathbb{R}^2$ .

que a esfera é *homeomórfica* a  $\mathbb{R}^2$ . A dimensão da variedade topológica é definida pela dimensão do espaço ao qual ela é homeomórfica. No caso da esfera, temos:

$$\dim(S^2) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2. \quad (6.2)$$

Associado a cada ponto  $p \in \mathcal{M}$ , podemos definir um espaço vetorial cujos elementos são todos os vetores tangentes à variedade no ponto  $p$ . A este espaço vetorial damos o nome de *espaço tangente*, denotado por  $T_p\mathcal{M}$ . No contexto da geometria diferencial, um vetor é um objeto matemático abstrato definido sobre um único ponto, e que pode ser representado através de um sistema de coordenadas. Enquanto as componentes de um vetor mudam de acordo com a escolha de coordenadas, o vetor em si é invariante sob este tipo de transformação.

Seja  $\{\hat{e}_{(0)}, \hat{e}_{(1)}, \dots, \hat{e}_{(D-1)}\}$  o conjunto formado pelos elementos de uma base arbitrária de  $T_p\mathcal{M}$ . Podemos expressar  $V \in T_p\mathcal{M}$  em termos dessa base:

$$V = V^\mu \hat{e}_{(\mu)}, \quad \text{com } \mu = 0, 1, \dots, D-1, \quad (6.3)$$

sendo  $V^\mu$  as componentes do vetor  $V$  em relação à base  $\hat{e}_{(\mu)}$ .

Associado a todo espaço  $T_p\mathcal{M}$ , podemos definir o *espaço-dual* (ou *espaço cotangente*), denotado por  $T_p^*\mathcal{M}$ : um espaço vetorial formado por elementos que atuam como um mapa que leva um vetor a um número real. Se  $\omega \in T_p^*\mathcal{M}$ , isso significa que:

$$\begin{aligned} \omega &: T_p\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \omega &: V \mapsto \omega(V) \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

<sup>1</sup>Um mapa  $\phi$  é uma relação entre dois conjuntos,  $X$  e  $Y$ , tal que  $\phi: X \rightarrow Y$ , onde  $X$  é chamado de *domínio* e  $Y$  é o *contradomínio*. O subconjunto de todos os elementos de  $Y$  que foram mapeados por  $\phi$  é denominado *conjunto imagem*.

Os vetores que pertencem a  $T_p^*\mathcal{M}$  também são chamados de *covetores*. Por definição,  $T_p^*\mathcal{M}$  é o próprio espaço dual de  $T_p\mathcal{M}$ :

$$V(\omega) = \omega(V). \quad (6.5)$$

Seja  $\{\hat{\theta}^{(0)}, \dots, \hat{\theta}^{(D-1)}\}$  o conjunto formado pelos elementos de uma base arbitrária de  $T_p^*\mathcal{M}$ . Podemos expressar um covetor em termos dessa base:

$$\omega = \omega_\mu \hat{\theta}^{(\mu)}. \quad (6.6)$$

Os elementos  $\hat{\theta}^{(\mu)}$  podem ser obtidos a partir da base  $\hat{e}_{(\nu)}$ , impondo que

$$\hat{\theta}^{(\mu)}(\hat{e}_{(\nu)}) = \delta_\nu^\mu. \quad (6.7)$$

Com essa condição, torna-se simples escrever a atuação de um covetor em um vetor:

$$\begin{aligned} \omega(V) &= \omega_\mu V^\nu \hat{\theta}^{(\mu)}(\hat{e}_{(\nu)}) \\ &= \omega_\mu V^\nu \delta_\nu^\mu \\ &= \omega_\mu V^\mu. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Vamos definir algumas quantidades úteis para o que se segue. Uma *curva*  $\gamma$  é um mapa que associa cada valor de um parâmetro real  $\lambda \in [0, \lambda_1]$  a um ponto sobre a variedade  $\mathcal{M}$ :

$$\begin{aligned} \gamma &: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}, \\ \gamma &: \lambda \mapsto \gamma(\lambda) = p. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Por exemplo, considere uma formiga que se move sobre a superfície de uma esfera. Para cada instante de tempo  $t \in [0, t_1]$ , podemos ‘marcar’ um ponto sobre a esfera referente à posição da formiga naquele instante. A trajetória total da formiga será uma curva  $\gamma(t)$  formada por este conjunto de pontos, como mostra (6.2):

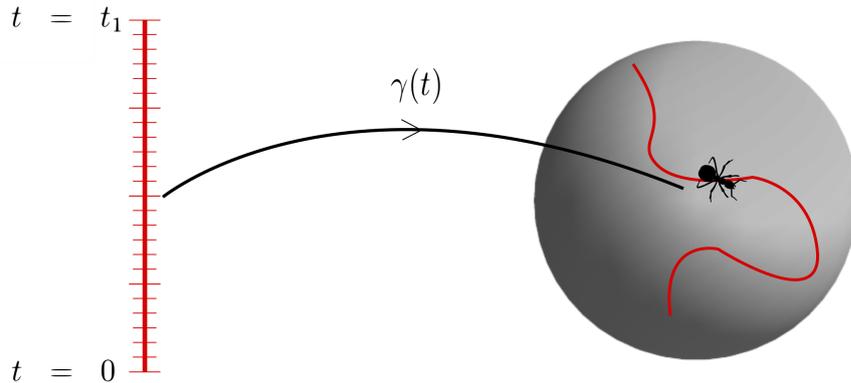


Figura 6.2: A trajetória de uma formiga na superfície de uma esfera pode ser descrita por uma curva  $\gamma(t)$ , que associa a cada valor de  $t \in [0, t_1]$  um ponto sobre  $S^2$ .

Uma *função*  $f$  é um mapa que associa cada ponto  $p \in \mathcal{M}$  a um número real:

$$\begin{aligned} f &: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}, \\ f &: p \mapsto f(p) \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Um campo de temperatura é um exemplo de função que estamos habituados a trabalhar.

Outra definição útil é a *composição de mapas*. Considere os mapas a seguir, que relacionam três conjuntos distintos,  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ :

$$f : X \longrightarrow Y, \tag{6.11}$$

$$g : Y \longrightarrow Z. \tag{6.12}$$

Podemos construir um mapa que leva diretamente de  $X$  até  $Z$ :

$$g \circ f : X \longrightarrow Z, \tag{6.13}$$

$$g \circ f : x \mapsto (g \circ f)(x) \equiv g(f(x)), \quad x \in X, \quad g(f(x)) \in Z, \tag{6.14}$$

onde  $g \circ f$  é a composição entre  $f$  e  $g$ , como mostra a Figura 6.3.

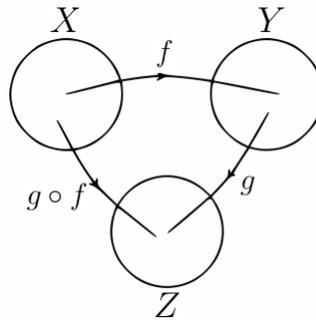


Figura 6.3: Podemos ir diretamente do conjunto  $X$  para o conjunto  $Z$  usando a composição de mapas  $g \circ f$ .

Agora, considere um ponto  $p \in \mathcal{M}$  e uma curva  $\gamma(\lambda)$  que passa por  $p$ . Para cada curva deste tipo, definimos a *derivada direcional* de uma função  $f$ , calculada no ponto  $p$ , como:

$$\frac{d}{d\lambda} f \equiv \frac{d(f \circ \gamma)}{d\lambda}. \tag{6.15}$$

Inserindo o mapa identidade  $I = x^{-1} \circ x$  tal que  $I(p) = p$ , e usando a propriedade associativa  $a \circ (b \circ c) \circ d = (a \circ b) \circ (c \circ d)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ \gamma)}{d\lambda} &= \frac{d(f \circ (x^{-1} \circ x) \circ \gamma)}{d\lambda} \\ &= \frac{d[(f \circ x^{-1}) \circ (x \circ \gamma)]}{d\lambda}. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Note que  $f \circ x^{-1}$  atua como uma função escalar usual

$$f \circ x^{-1} : \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{R}, \tag{6.17}$$

enquanto  $x \circ \gamma$  associa cada valor do parâmetro  $\lambda$  a um ponto de coordenada  $x^\mu \in \mathbb{R}^D$ :

$$x \circ \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^D. \tag{6.18}$$

Isso nos permite reescrever (6.16) usando a seguinte notação simbólica:

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{d\lambda} = \frac{d[f(x^\mu(\lambda))]}{d\lambda}. \tag{6.19}$$

Com essa notação, fica claro como realizar a regra da cadeia no lado direito:

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ \gamma)}{d\lambda} &= \frac{d[(f \circ x^{-1}) \circ (x \circ \gamma)]}{d\lambda} \\ &= \frac{d(x \circ \gamma)^\mu}{d\lambda} \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x^\mu} \\ &= \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} f. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Substituindo (6.20) em (6.15) e usando o fato de que  $f$  é uma função arbitrária, obtemos a seguinte relação:

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (6.21)$$

Agora, atentemos ao fato de que os operadores diferenciais  $\frac{d}{d\lambda}$  satisfazem todos os axiomas de um espaço vetorial, dadas as operações usuais de soma e multiplicação por um escalar. Neste sentido,  $\frac{d}{d\lambda}$  é um vetor, assim como  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ . Com isso, ao comparar (6.21) e (6.3), percebemos a seguinte equivalência:

$$\frac{d}{d\lambda} \leftrightarrow V, \quad \frac{dx^\mu}{d\lambda} \leftrightarrow V^\mu \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} \leftrightarrow \hat{e}_{(\mu)}. \quad (6.22)$$

Deste resultado, podemos concluir resultados importantes. Primeiro, as derivadas parciais  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  formam uma base para  $T_p\mathcal{M}$ , chamada de *base coordenada*. Segundo, um vetor pode ser visto como um objeto que atua em uma função  $f$  e resulta em um escalar:

$$V : f \mapsto V(f) \in \mathbb{R}. \quad (6.23)$$

De agora em diante, usaremos a base coordenada  $\hat{e}_{(\mu)} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ . Assim, vamos escrever  $V$  em termos de suas componentes da seguinte forma:

$$V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (6.24)$$

Suponha que seja escolhido um novo sistema de coordenadas  $x'$ , tal que:

$$V = V^{\mu'} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}}, \quad (6.25)$$

onde  $V^{\mu'}$  são as componentes de  $V$  em relação a  $x'$ . Uma vez que  $V$  independe da escolha de coordenadas, vale a igualdade:

$$V^{\mu'} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (6.26)$$

Usando a regra da cadeia no lado direito, obtemos:

$$V^{\mu'} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} = V^\mu \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}}, \quad (6.27)$$

de onde concluímos que:

$$V^{\mu'} = V^\mu \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}. \quad (6.28)$$

Para finalizar a nossa análise do espaço tangente, precisamos encontrar uma base para  $T_p^*\mathcal{M}$ . Vimos que os covetores atuam como um mapa linear que leva um vetor a um número real, e que os vetores atuam em funções, também resultando em um valor real. Logo, o covetor (ou 1-forma) mais simples que podemos construir é o *gradiente* de uma função, denotado por  $df$  e definido como:

$$\begin{aligned} df &: T_p\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ df &: V \mapsto df(V) \equiv V(f). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Lembremos que as componentes  $x^\mu$  do sistema de coordenadas  $x$  atuam precisamente como uma função, isto é:

$$x^\mu : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (6.30)$$

Logo, para cada valor de  $\mu$ , podemos construir um gradiente  $dx^\mu$  associado a este sistema de coordenadas. Este conjunto de  $D$  gradientes, dada a definição (6.29), satisfaz a relação (6.7):

$$dx^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu, \quad (6.31)$$

o que nos permite identificá-lo como sendo uma base coordenada dual para o espaço  $T_p^*\mathcal{M}$ . Neste sentido, qualquer covetor  $\omega \in T_p^*\mathcal{M}$  pode ser escrito como:

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu. \quad (6.32)$$

Como as componententes de um covetor se comportam sob transformações de coordenadas? Ora, sabemos que vale a igualdade:

$$\omega'_\mu dx^{\mu'} = \omega_\mu dx^\mu. \quad (6.33)$$

Usando a regra da cadeia no lado direito

$$\omega'_\mu dx^{\mu'} = \omega_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} dx^{\mu'}, \quad (6.34)$$

concluimos que:

$$\omega'_\mu = \omega_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}. \quad (6.35)$$

Por sua vez, os elementos da base coordenada  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  e da base dual  $dx^\mu$  se transformam, respectivamente, como:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (6.36)$$

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} dx^\mu. \quad (6.37)$$

### 6.1.2 Tensores do tipo $(r, s)$

Vimos que um covetor  $\omega$  é um mapa linear, cuja atuação em um vetor  $V$  resulta em  $\omega(V) \in \mathbb{R}$ . Por sua vez, a atuação de  $V$  em  $\omega$  satisfaz  $V(\omega) = \omega(V) \in \mathbb{R}$ . Podemos

generalizar estes conceitos para um objeto matemático que, ao atuar em  $r$  covetores e  $s$  vetores, resulta em um valor real, onde  $r, s \in \mathbb{Z}$ . A este objeto damos o nome de *tensor do tipo*  $(r, s)$ :

$$T^{(r,s)} : \underbrace{T_p^* \mathcal{M} \times \dots \times T_p^* \mathcal{M}}_r \times \underbrace{T_p \mathcal{M} \times \dots \times T_p \mathcal{M}}_s \rightarrow \mathbb{R}. \quad (6.38)$$

Neste sentido, um vetor é um tensor do tipo  $(1, 0)$ , enquanto um covetor é do tipo  $(0, 1)$ . O *produto direto* entre dois tensores  $T^{(r,s)}$  e  $T^{(l,m)}$  resulta em um tensor do tipo  $(r+l, s+m)$ :

$$T^{(r,s)} \otimes T^{(l,m)} = T^{(r+l,s+m)}. \quad (6.39)$$

Dadas essas definições, podemos escrever um tensor  $(r, s)$  em termos das bases  $dx^\mu$  e  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ :

$$T^{(r,s)} = T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_r}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_s}. \quad (6.40)$$

Sob uma transformação de coordenadas  $x \mapsto x'$ , as componentes de um tensor se transformam como uma extensão natural da transformação de vetores e covetores:

$$T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} = T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_r}}{\partial x'^{\mu_r}} \dots \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_s}}{\partial x'^{\nu_s}}. \quad (6.41)$$

### 6.1.3 Métrica

Em cada ponto  $p \in \mathcal{M}$ , podemos definir um tensor do tipo  $(0, 2)$  denominado *métrica* — uma ferramenta necessária para medir distâncias sobre a variedade. Este tensor, detonado por  $g$ , é um mapa bilinear que atua em dois vetores, resultando em um número real:

$$\begin{aligned} g &: T_p \mathcal{M} \times T_p \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}, \\ g &: U, V \mapsto g(U, V) \equiv g_{\mu\nu} U^\mu V^\nu \end{aligned} \quad (6.42)$$

onde  $g_{\mu\nu}$  são as componentes da métrica em relação a um sistema de coordenadas.

A métrica satisfaz as seguintes propriedades:

- $g(u, v) = g(v, u)$ ,
- $\forall u \neq 0, \exists v$  tal que  $g(u, v) \neq 0$ ;
- $g(U, U) = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = |U|^2$ , onde  $|U|$  é o *comprimento* do vetor  $U$ .

Podemos escrever  $g$  em termos de suas componentes e da base coordenada do espaço dual:

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (6.43)$$

É usual reescrever (6.43) usando a seguinte notação simplificada:

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (6.44)$$

que nos remete ao conceito de *elemento infinitesimal de linha* que estamos habituados. Quando lidamos com uma variedade topológica sem curvatura, como o espaço euclidiano ou de Minkowski, as componentes da métrica são as mesmas em todos os pontos da variedade. Nestes casos, reservamos a notação  $\eta_{\mu\nu}$  para as componentes da métrica em um espaço plano.

## 6.2 Derivada Covariante

Para aplicações físicas da geometria diferencial, é importante saber como um determinado vetor varia quando andamos sobre a variedade. Considere dois pontos  $p$  e  $q$  que pertencem a uma curva  $\gamma$ , tal que  $p = \gamma(\lambda_0)$  e  $q = \gamma(\lambda_0 + \Delta\lambda)$ , com  $\Delta\lambda \ll 1$ . Em cada um destes pontos, podemos definir um vetor tangente a  $\gamma$ , que denotaremos por  $V_p$  e  $V_q$ , respectivamente.

Usando um sistema de coordenadas  $x$ , podemos desenhar uma curva  $x^\mu(\gamma(\lambda))$  sobre  $\mathbb{R}^D$ . Denotaremos essa curva apenas por  $x^\mu(\lambda)$ , por simplicidade. Desse modo, os pontos  $p$  e  $q$  têm coordenadas  $x^\mu(\lambda_0)$  e  $x^\mu(\lambda_0 + \Delta\lambda)$ .

Da mesma maneira, os vetores  $V_p$  e  $V_q$  são representados por suas respectivas componentes, que denotaremos por  $V_{(\lambda_0)}^\mu$  e  $V_{(\lambda_0+\Delta\lambda)}^\mu$ . Uma vez que os vetores são quantidades que dependem apenas do ponto ao qual são calculados, essa notação sugere que suas componentes também são calculadas sobre um único ponto em  $\mathbb{R}^D$  — este ponto é identificado pelo valor do parâmetro  $\lambda_0$ . A figura mostra um panorama do problema que construímos até aqui.

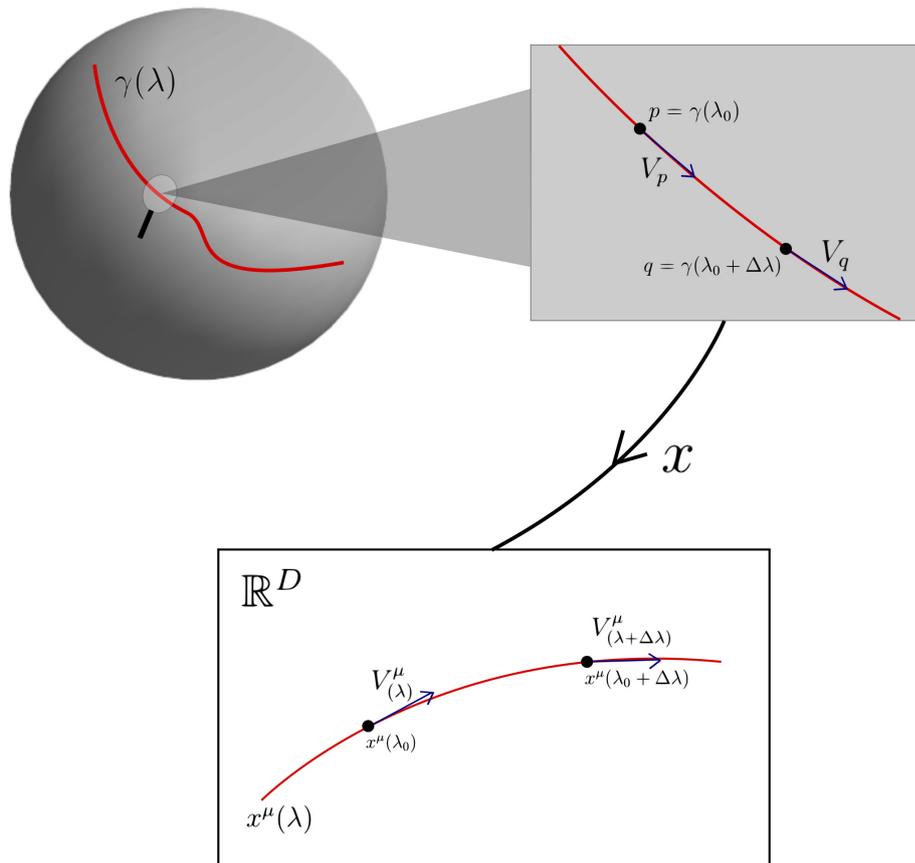


Figura 6.4: Dada uma curva  $\gamma(\lambda)$  e dois pontos  $p$  e  $q$  sobre a variedade, tal que  $p = \gamma(\lambda_0)$  e  $q = \gamma(\lambda_0 + \Delta\lambda)$ , podemos definir dois vetores  $V_p$  e  $V_q$  tangentes à curva  $\gamma$  nestes pontos. Supomos  $\Delta\lambda \ll 1$ , o que implica que estes pontos estão próximos sobre a variedade. Um sistema de coordenadas  $x$  nos permite desenhar uma curva  $x^\mu(\lambda)$  em  $\mathbb{R}^D$ , e representar os vetores  $V_p$  e  $V_q$  em termos de suas componentes  $V_{(\lambda_0)}^\mu$  e  $V_{(\lambda_0+\Delta\lambda)}^\mu$ , respectivamente.

Neste momento nos perguntamos: como quantificar a variação das componentes de

um vetor quando andamos sobre a curva  $x^\mu(\lambda)$ ? Uma proposta é fazer isso calculando a derivada de  $V^\mu$  em relação a  $\lambda$ :

$$\frac{dV^\mu}{d\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow \infty} \frac{V^\mu_{(\lambda+\Delta\lambda)} - V^\mu_{(\lambda)}}{\Delta\lambda}. \quad (6.45)$$

Usando a regra da cadeia no lado esquerdo, obtemos:

$$\frac{dV^\mu}{d\lambda} = \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu}. \quad (6.46)$$

Vamos dar atenção especial para a quantidade  $\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu}$ . Pela estrutura de índices, este é um tensor do tipo  $(1, 1)$ . Considere uma transformação de coordenadas  $x \rightarrow x'$ . Esperamos que  $\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu}$  se transforme de acordo com (6.41). Vamos verificar isso explicitamente usando (6.28) e (6.36):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} V^{\nu'} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( V^\nu \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \right) \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \left[ \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} V^\nu \right) + V^\nu \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right] \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} V^\nu \right) + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^\nu \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Note que apenas o primeiro termo é o que se espera da transformação de um tensor do tipo  $(1, 1)$ . Este resultado traz à tona o fato de que a derivada parcial usual não é um bom operador tensorial, e a equação (6.46) não descreve corretamente a variação de um vetor ao longo de uma curva.

Para resolver este problema, vamos introduzir a derivada covariante:

$$\nabla : T^{(r,s)} \longrightarrow T^{(r,s+1)}, \quad (6.48)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- $\nabla$  é linear:

$$\nabla(T + S) = \nabla T + \nabla S; \quad (6.49)$$

- $\nabla$  satisfaz a regra de Leibniz:

$$\nabla(T \otimes S) = \nabla T \otimes S + T \otimes \nabla S. \quad (6.50)$$

Em termos do sistema de coordenadas, a derivada covariante ao longo da curva  $x^\mu(\lambda)$ , denotada por  $\nabla_\mu$ , é definida como a derivada parcial usual somada a uma transformação linear. De fato, este termo extra, chamado de *conexão*, gera a correção necessária para que o resultado da derivada covariante se transforme como um tensor. Formalmente, a atuação de  $\nabla_\mu$  em um vetor é dada por

$$\nabla_\mu V^\nu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda, \quad (6.51)$$

onde  $\Gamma_{\mu\sigma}^\nu$  são as componentes da conexão.

Agora, vamos resolver novamente a equação (6.47), desta vez substituindo  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  por  $\nabla_\mu$  e aplicando as leis de transformação (6.28) e (6.36):

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu'} V^{\nu'} &= \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} V^{\nu'} + \Gamma_{\mu'\lambda'}^{\nu'} V^{\lambda'} \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} V^\nu \right) + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^\nu \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \Gamma_{\mu'\lambda'}^{\nu'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^\lambda.\end{aligned}\quad (6.52)$$

Devemos impor que  $\nabla_{\mu'} V^{\nu'}$  se comporte como um tensor sob transformações de coordenadas, isto é:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu'} V^{\nu'} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda \right) \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} V^\nu \right) + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda.\end{aligned}\quad (6.53)$$

Comparando (6.52) e (6.53), temos que

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^\nu \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \Gamma_{\mu'\lambda'}^{\nu'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^\lambda.\quad (6.54)$$

Realizando a troca de índice  $\nu \rightarrow \lambda$  no primeiro termo do lado direito de (6.54):

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^\lambda \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} + \Gamma_{\mu'\lambda'}^{\nu'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^\lambda,\quad (6.55)$$

para então eliminar  $V^\lambda$  em ambos os lados e isolar as componentes  $\Gamma_{\mu'\lambda'}^{\nu'}$ , obtemos

$$\Gamma_{\mu'\lambda'}^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \Gamma_{\mu\lambda}^\nu - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}.\quad (6.56)$$

Esta é a lei de transformação para as componentes da conexão. Note que a  $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$  não é um tensor, uma vez que (6.56) não segue a forma da equação (6.41). Como dito anteriormente, a conexão atua como uma transformação linear: para cada valor de  $\mu$  temos uma matriz de dimensão  $D \times D$ .

Considere a atuação da derivada covariante em um covetor:

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \omega_\nu + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda.\quad (6.57)$$

Não há razão para esperar que as componentes  $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$  e  $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$  sejam iguais, porém é possível relacioná-las. Seja  $\phi$  um escalar, formado pela atuação de  $\omega$  em  $V$ :

$$\phi = \omega(V) = \omega_\lambda V^\lambda.\quad (6.58)$$

Tomando a derivada covariante de  $\phi$  e usando a regra de Leibniz:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu (\omega_\lambda V^\lambda) &= (\nabla_\mu \omega_\lambda) V^\lambda + \omega_\lambda (\nabla_\mu V^\lambda) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \omega_\lambda + \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\sigma \omega_\sigma \right) V^\lambda + \omega_\lambda \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} V^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda V^\rho \right) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \omega_\lambda \right) V^\lambda + \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\sigma \omega_\sigma V^\lambda + \omega_\lambda \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} V^\lambda \right) + \omega_\lambda \Gamma_{\mu\rho}^\lambda V^\rho.\end{aligned}\quad (6.59)$$

Para prosseguir, vamos demandar que a atuação da derivada covariante em um escalar se reduza à derivada parcial usual. Isso implica que:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu}(\omega_{\lambda}V^{\lambda}) &= \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\omega_{\lambda}V^{\lambda}) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\omega_{\lambda}\right)V^{\lambda} + \omega_{\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}V^{\lambda}\right).\end{aligned}\quad (6.60)$$

Comparando (6.59) e (6.60), obtemos:

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\sigma}\omega_{\sigma}V^{\lambda} + \omega_{\lambda}\Gamma_{\mu\rho}^{\lambda}V^{\rho} = 0. \quad (6.61)$$

Realizando a troca conveniente dos índices mudos no primeiro termo, encontramos a seguinte relação:

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\sigma} = -\Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}. \quad (6.62)$$

Substituindo (6.62) em (6.57), obtemos:

$$\nabla_{\mu}\omega_{\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\omega_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\omega_{\lambda}. \quad (6.63)$$

Com os resultados (6.51) e (6.63), podemos estender a atuação da derivada covariante para qualquer tensor do tipo  $(r, s)$ :

$$\begin{aligned}\nabla_{\sigma}T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_r}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_s} &= \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_r}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_s} \\ &+ \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1}T^{\lambda\mu_2\dots\mu_r}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_s} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_2}T^{\mu_1\lambda\dots\mu_r}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_s} + \dots \\ &- \Gamma_{\sigma\nu_1}^{\lambda}T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_r}_{\lambda\nu_2\dots\nu_s} - \Gamma_{\sigma\nu_2}^{\lambda}T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_r}_{\nu_1\lambda\dots\nu_s} - \dots\end{aligned}\quad (6.64)$$

Inúmeras conexões podem ser definidas sobre uma variedade topológica — todavia, há apenas uma conexão que pode ser obtida em termos das componentes da métrica:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}g_{\nu\rho} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}g_{\rho\mu} - \frac{\partial}{\partial x^{\rho}}g_{\mu\nu}\right). \quad (6.65)$$

Este tipo de conexão é usualmente chamada de conexão de *Christoffel*.

Uma característica interessante de se observar é que a diferença entre as componentes de duas conexões forma um tensor do tipo  $(1, 2)$ . Considere duas derivadas covariantes  $\nabla_{\mu}$  e  $\tilde{\nabla}_{\mu}$ . Vimos que  $\nabla_{\mu}V^{\lambda}$  e  $\tilde{\nabla}_{\mu}V^{\lambda}$  são tensores, de modo que a diferença

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu}V^{\lambda} - \tilde{\nabla}_{\mu}V^{\lambda} &= \partial_{\mu}V^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}V^{\nu} - \partial_{\mu}V^{\lambda} - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}V^{\nu} \\ &= (\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda})V^{\nu}\end{aligned}\quad (6.66)$$

também deve ser um tensor. Isso só é possível se  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}$  for um tensor. Em especial, se  $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$ , definimos o *tensor de torção*:

$$T_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}. \quad (6.67)$$

Se a conexão é simétrica com relação aos índices inferiores, então  $T_{\mu\nu}^{\lambda} = 0$ . Neste caso, dizemos que a conexão é *livre de torção*.

Agora, voltemos para o problema apresentado no início desta seção. Vimos que (6.46) não descreve corretamente a variação de um vetor ao longo de uma curva quando tratamos de uma variedade topológica arbitrária. De fato, ao fazer a subtração  $V_{(\lambda+\Delta\lambda)}^\mu - V_{(\lambda)}^\mu$  em (6.45), estamos comparando as componentes de vetores que pertencem a espaços tangentes distintos. Para realizar este cálculo da maneira correta, precisamos introduzir o conceito de *transporte paralelo*.

O transporte paralelo de um vetor é definido de tal forma que mantemos as suas componentes constantes ao longo de um caminho que liga dois pontos. Quando lidamos com um espaço plano, o resultado do transporte paralelo é idêntico ao vetor original, como mostra a Figura 6.5. Todavia, o mesmo não é necessariamente verdade para uma variedade arbitrária.

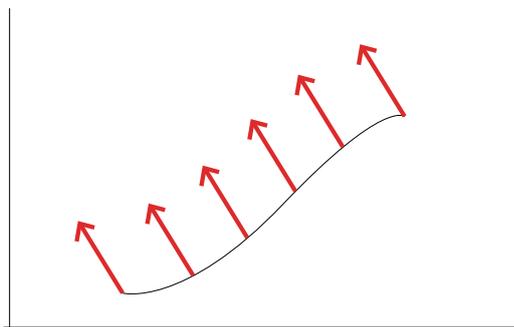


Figura 6.5: Vetor (em vermelho) sendo transportado paralelamente ao longo de um caminho que liga dois pontos no espaço euclidiano.

Para apreciar este fato, considere um vetor sendo transportado paralelamente ao longo de dois caminhos distintos sobre uma esfera. Os caminhos ligam dois pontos, um localizado sobre o equador e o outro sobre o pólo norte da esfera. O primeiro caminho liga estes pontos através de uma linha de longitude constante. Já o segundo é composto por um deslocamento ao longo do equador por um ângulo  $\theta$  e posteriormente um deslocamento mantendo a longitude constante. A Figura 6.6 mostra que ao final do transporte paralelo, obtemos um vetor diferente para cada caminho.

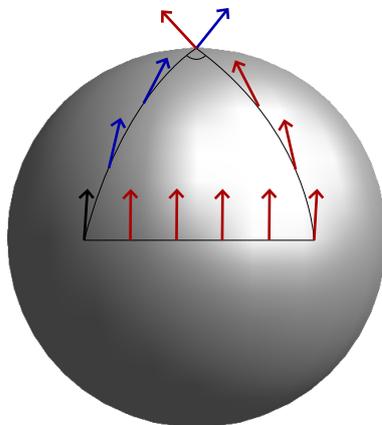


Figura 6.6: Um vetor (em preto) sendo transportado paralelamente através de dois caminhos sobre uma esfera  $S^2$ .

Qualquer tensor pode ser transportado paralelamente. Formalmente, dada uma curva

$x^\mu(\lambda)$  e um tensor  $T^{(r,s)}$  com componentes  $T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}$ , dizemos que  $T$  é transportado paralelamente se as suas componentes permanecem constantes ao longo da curva  $x^\mu(\lambda)$ , isto é:

$$\frac{D}{d\lambda} T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu T^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s} = 0, \quad (6.68)$$

onde definimos o operador diferencial  $\frac{D}{d\lambda}$  em termos da derivada covariante. Vemos que a variação de um tensor ao longo da curva  $x^\mu(\lambda)$  é dada por uma expressão análoga a (6.46) — apenas fazemos uso da derivada covariante no lugar da derivada usual.

A equação (6.68) é conhecida como a *equação do transporte paralelo*. Em especial se  $T$  é um vetor, temos

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu V^\nu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \left( \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu V^\sigma \right) \quad (6.69)$$

$$= \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu} + \frac{dx^\mu}{d\lambda} \Gamma_{\mu\sigma}^\nu V^\sigma \quad (6.70)$$

$$= \frac{dV^\nu}{d\lambda} + \frac{dx^\mu}{d\lambda} \Gamma_{\mu\sigma}^\nu V^\sigma = 0. \quad (6.71)$$

Uma curva que transporta paralelamente o seu próprio vetor tangente  $\frac{dx^\nu}{d\lambda}$  é chamada de geodésica:

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0. \quad (6.72)$$

Curvas geodésicas são de particular interesse na relatividade geral, pois estendem o conceito de ‘linha reta’ para espaços curvos. Para visualizar como isso se dá, considere o uso de coordenadas cartesianas no espaço euclidiano. Usando (6.65), vemos que as componentes  $\Gamma_{\mu\sigma}^\nu$  da conexão são nulas, uma vez que a métrica não depende das coordenadas neste caso. Como consequência, a equação (6.72) se reduz a definição de linha reta que estamos habituados:

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\lambda^2} = 0. \quad (6.73)$$

### 6.3 Curvatura

Considere novamente o exemplo de um vetor transportado paralelamente ao longo de uma esfera por dois caminhos diferentes, dados na Figura 6.6. Vimos que ao final do transporte paralelo, obtemos dois vetores distintos, o que não ocorre no espaço plano. De fato, uma maneira de quantificar a *curvatura* de uma variedade topológica é medindo a diferença entre dois vetores que são transportados paralelamente ao longo de dois caminhos distintos.

Considere um caminho fechado infinitesimal formado por dois vetores  $A$  e  $B$ , cujas componentes em relação a um certo sistema de coordenadas são  $A^\mu$  e  $B^\nu$ , como mostra a Figura 6.7 .

Suponha que um vetor  $V^\rho$  seja transportado paralelamente ao longo de  $A^\mu$ , posteriormente ao longo de  $B^\nu$ , novamente ao longo de  $A^\mu$  e então de  $B^\nu$ , voltando ao ponto de

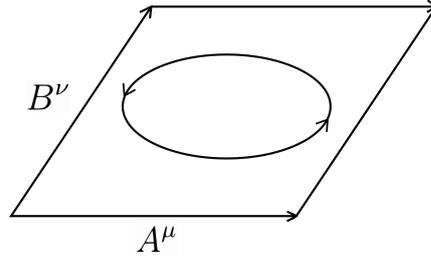


Figura 6.7: Caminho fechado infinitesimal, formado por dois vetores  $A^\mu$  e  $B^\mu$ .

origem. A diferença entre o vetor original e o resultado do transporte paralelo, denotado por  $\delta V^\rho$ , depende da direção de  $A^\mu$  e  $B^\mu$ , assim como do vetor que está sendo transportado,  $V^\rho$ . Logo, deve haver um tensor do tipo (1, 3) que relaciona essas quantidades: dois índices inferiores contraem os índices  $\mu$  e  $\nu$  das componentes dos vetores  $A$  e  $B$ , um terceiro índice inferior é contraído com o índice das componentes do vetor  $V$ , enquanto deve restar um índice superior livre:

$$\delta V^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} V^\sigma A^\mu B^\nu. \quad (6.74)$$

Nessa equação,  $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$  é o *tensor de curvatura de Riemann* — ele codifica toda informação a respeito da curvatura de uma variedade topológica, ponto a ponto. Note que  $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$  deve satisfazer as seguintes propriedades:

- deve ser antissimétrico em relação aos índices  $\mu$  e  $\nu$ , uma vez que ao fazer a troca  $\mu \leftrightarrow \nu$  invertemos o sentido que percorremos o caminho fechado na Figura 6.7;
- deve ser nulo quando  $\mu = \nu$ , uma vez que isso implica em  $A^\mu = B^\mu$ . Transportar um vetor paralelamente e então transportá-lo de volta ao ponto original pelo mesmo caminho não gera nenhuma variação em relação ao vetor original.

As componentes do tensor de curvatura podem ser obtidas em termos das componentes da conexão <sup>2</sup>:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (6.75)$$

Algumas quantidades úteis podem ser derivadas a partir da contração de índices do tensor de Riemann, a saber: o *tensor de Ricci* e o *escalar de Ricci*, respectivamente definidos como:

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\rho{}_{\mu\rho\nu}, \quad R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (6.76)$$

## 6.4 Conclusão

Neste capítulo, introduzimos os conceitos da geometria diferencial. Vimos que em cada ponto de uma variedade topológica  $\mathcal{M}$ , podemos definir quantidades como vetores, covetores e tensores. Estas, por sua vez, dependem exclusivamente de estruturas intrínsecas da variedade. Todavia, usando um sistema de coordenadas, podemos representar estes objetos matemáticos em termos de suas componentes, que sob uma transformação do tipo  $x \mapsto x'$ , se comportam de acordo com as equações (6.28), (6.35) e (6.41).

<sup>2</sup>A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [22] e [24]

Vimos que o operador diferencial  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  não é adequado para descrever a variação de um tensor ao longo de uma curva. Para resolver este problema, introduzimos a derivada covariante, definida como a derivada usual somada a um termo de correção, chamado de conexão. Na equação (6.56), encontramos como as componentes da conexão devem se transformar sob mudança de coordenadas, de tal forma que a atuação da derivada covariante em um tensor também resulte em um tensor.

Ao introduzir o conceito de transporte paralelo, vimos que a generalização do conceito de ‘linha reta’ para espaços curvos é dado pela equação da curva geodésica (6.72). Por fim, definimos o tensor de curvatura de Riemann (6.75) como uma forma de quantificar a curvatura de uma variedade topológica, ponto a ponto.

No próximo capítulo, usaremos os conhecimentos adquiridos para enunciar as equações de campo de Einstein — elas descrevem a curvatura do espaço-tempo em termos da presença de matéria e energia. Também vamos abordar algumas soluções analíticas dessas equações, como o buraco negro de Schwarzschild e o espaço-tempo anti-de Sitter.

# Capítulo 7

## Equações de Einstein

Com as ferramentas matemáticas estabelecidas no capítulo anterior, estamos aptos para entender a ideia central por trás da teoria da relatividade geral. Para isso, precisamos aprender como generalizar uma teoria inicialmente descrita em um espaço plano para o caso geral de uma variedade com curvatura.

Para ver como isso pode ser feito, tomemos como exemplo uma partícula livre no espaço de Minkowski, cuja trajetória é dada pelas coordenadas  $x^\nu(\lambda)$ , sendo  $\lambda$  um parâmetro real. Nessas condições, a equação de movimento da partícula é:

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\lambda^2} = 0. \quad (7.1)$$

Usando a regra da cadeia, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\nu}{d\lambda^2} &= \frac{d}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \\ &= \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{dx^\nu}{d\lambda}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

No capítulo anterior, vimos que a derivada parcial usual não é um bom operador tensorial quando levamos em consideração a curvatura do espaço-tempo. Para que a equação (7.2) seja válida em qualquer contexto, devemos fazer a substituição  $\frac{\partial}{\partial x^\nu} \rightarrow \nabla_\nu$ :

$$\begin{aligned} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} &= \frac{dx^\mu}{d\lambda} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \right) \\ &= \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \\ &= \frac{d^2 x^\nu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Note que (7.3) é a mesma equação que encontramos em (6.72). Logo, o movimento de uma partícula livre em um espaço-tempo com curvatura não será uma linha reta, mas sim uma curva geodésica.

### 7.1 Equações de campo de Einstein

O argumento de Einstein na construção da teoria da relatividade geral foi de que a presença de matéria/energia é a fonte da curvatura do espaço-tempo. O movimento dos corpos

nesse espaço-tempo curvo é o efeito que reconhecemos como gravidade. Matematicamente, essa ideia está sintetizada nas *equações de campo de Einstein*<sup>1</sup>:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (7.4)$$

onde  $G$  é a constante de gravitação universal,  $T_{\mu\nu}$  é o tensor momento-energia e  $g_{\mu\nu}$  são as componentes da métrica, enquanto  $R_{\mu\nu}$  e  $R$  são o tensor e o escalar de Ricci, respectivamente. O lado esquerdo dessa equação contém toda informação a respeito da curvatura do espaço tempo, codificada no tensor de curvatura de Riemann e na própria métrica. Enquanto isso, o lado direito descreve a distribuição de matéria e energia no espaço-tempo. Note que a variável dinâmica na teoria da relatividade geral é a própria métrica, que como vimos no capítulo anterior, varia de ponto a ponto.

### 7.1.1 Tensor momento-energia

Todas as quantidades que aparecem em (7.4) já foram tratadas no capítulo anterior, com exceção do tensor momento-energia. As componentes  $T_{\mu\nu}$  contém informações a respeito da densidade de matéria e fluxo de momento-energia:

- $T_{00}$  representa a densidade de matéria;
- $T_{i0}$  representa a densidade da  $i$ -ésima componente do momento;
- $T_{0j}$  representa o fluxo de energia através de uma superfície cujo vetor normal aponta na direção  $x^j$ ;
- $T_{ij}$ , com  $i \neq j$ , representa o fluxo da  $i$ -ésima componente do momento através de uma superfície cujo vetor normal aponta na direção  $x^j$ ;
- $T_{ij}$ , com  $i = j$ , representa o fluxo da  $i$ -ésima componente do momento através de uma superfície cujo vetor normal aponta na direção  $x^i$ .

O tensor momento-energia é simétrico, isto é,  $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ . Logo, apenas 10 das 16 componentes deste tensor são independentes. Como consequência, a equação (7.4) representa um conjunto de 10 equações diferenciais não-lineares acopladas, uma vez que o tensor de curvatura e o próprio tensor de energia-momento dependem da métrica. Encontrar soluções analíticas para este sistema de equações não é uma tarefa trivial, e usualmente envolve uma série de aproximações. Por essa razão, vamos abordar algumas dessas soluções, sem necessariamente demonstrá-las.

## 7.2 Solução de Schwarzschild

Com exceção da solução das equações de Einstein para o vácuo, a solução mais simples que podemos encontrar refere-se a uma distribuição de massa perfeitamente esférica. Essa distribuição é útil, por exemplo, para descrever buracos negros sem rotação — objetos astronômicos que surgem após o fim do ciclo de vida de uma estrela, quando a pressão gravitacional torna-se tão intensa que a matéria colapsa para um único ponto, chamado

<sup>1</sup>A dedução das equações de Einstein usando as ferramentas da geometria diferencial pode ser encontrada em [21], página 155.

de singularidade. A solução que descreve buracos negros esféricos sem rotação é a *métrica de Schwarzschild*<sup>2</sup> :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (7.5)$$

onde  $M$  é a massa do buraco negro e

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (7.6)$$

é o elemento angular infinitesimal.

Note que a equação (7.5) é válida para um espaço-tempo de quatro dimensões. Como vimos no capítulo anterior, podemos generalizar a matemática da geometria diferencial para variedades de qualquer dimensão — o mesmo se aplica para as equações de Einstein. A generalização da equação (7.5) para um espaço-tempo de  $D$  dimensões é escrita como:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2, \quad (7.7)$$

sendo  $f(r)$  obtido da seguinte forma:

$$f(r) = 1 - \frac{2\mu}{r^{D-3}}. \quad (7.8)$$

Comparando as equações (7.5) e (7.7), vemos que o parâmetro  $\mu$  está relacionado com a massa  $M$  do buraco negro. De fato,  $\mu$  é dado por:

$$\mu = \frac{8\pi}{(D-2)\text{Vol}(S^{D-2})}GM, \quad (7.9)$$

onde  $\text{Vol}(S^{D-2})$  é o volume de uma esfera em  $D-2$  dimensões, cujo raio é unitário:

$$\text{Vol}(S^{D-2}) = \frac{2\left(\pi^{\frac{D-1}{2}}\right)}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)}. \quad (7.10)$$

Note que  $\text{Vol}(S^{D-2})$  é dado em termos da função  $\Gamma(x)$ , definida como:

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty dt e^{-t} t^{x-1}, \quad x > 0. \quad (7.11)$$

Vamos verificar explicitamente que (7.7) se reduz à (7.5) quando  $D = 4$ . Para isso, primeiro vamos calcular  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{mudança de variável } t = u^2) \quad (7.12)$$

$$= 2 \int_0^\infty du e^{-u^2} = \sqrt{\pi}. \quad (7.13)$$

Usando a relação de recorrência

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad (7.14)$$

<sup>2</sup>Veja referência [21], capítulo 5

obtemos  $\Gamma(\frac{3}{2})$ :

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (7.15)$$

Para  $D = 4$ , o parâmetro  $\mu$  fica

$$\begin{aligned} \mu &= 4\pi GM \frac{1}{\text{Vol}(S^2)} \\ &= 4\pi GM \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \\ &= 4\pi GM \left(\frac{1}{4\pi}\right) \\ &= GM. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Logo,  $f(r)$  é dado por

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r}. \quad (7.17)$$

Substituindo  $f(r)$  em (7.7), recuperamos a solução (7.5), como desejávamos demonstrar.

Note que (7.5) não é definida para  $r = 0$  e  $r = 2GM$ . No primeiro caso, temos uma singularidade: toda a matéria do buraco negro tende a colapsar para um único ponto, localizado em  $r = 0$ , onde a curvatura do espaço-tempo diverge. Já  $r = 2GM$  representa o *horizonte de eventos* do buraco negro. Toda a matéria que cruza o horizonte é aprisionada — nem mesmo a luz consegue escapar.

### 7.2.1 Espaços com curvatura constante

Nesta seção, vamos estudar o que são espaços com curvatura constante. Considere uma esfera  $S^2$  imersa no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , cuja métrica é:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (7.18)$$

Usando um sistema de coordenadas cartesianas, todos os pontos que pertencem a  $S^2$  satisfazem a relação:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = L^2, \quad (7.19)$$

onde  $L$  é o raio da esfera. Essa equação é automaticamente satisfeita com o uso de coordenadas esféricas:

$$x^1 = L \sin \theta \cos \phi, \quad (7.20)$$

$$x^2 = L \sin \theta \sin \phi, \quad (7.21)$$

$$x^3 = L \cos \theta. \quad (7.22)$$

Diferenciando essas equações e substituindo em (7.18), obtemos que a métrica da esfera  $S^2$  tem a forma:

$$ds^2 = L^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (7.23)$$

Podemos usar o escalar de Ricci para determinar o tipo de curvatura da esfera. De fato, se  $R > 0$ , dizemos que o espaço em questão tem curvatura positiva, do contrário, dizemos que o mesmo tem curvatura negativa. Se  $R = 0$ , temos um espaço plano. Usando

a métrica (7.23) para calcular  $R$  a partir de (6.76) com o auxílio das equações (6.75) e (6.65), obtemos que:

$$R = \frac{2}{L^2}. \quad (7.24)$$

Logo,  $S^2$  é um espaço com curvatura constante positiva.

Considere agora o espaço de Minkowski  $\mathbb{R}^{1,2}$ , cuja métrica é dada por:

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2. \quad (7.25)$$

O espaço hiperbólico  $H_2$  é uma superfície de dimensão  $D = 2$ , que ao ser imersa em  $\mathbb{R}^{1,2}$  satisfaz:

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 = -L^2. \quad (7.26)$$

Essa relação é automaticamente satisfeita com o uso do seguinte sistema de coordenadas:

$$x^0 = L \cosh \theta, \quad (7.27)$$

$$x^1 = L \sinh \theta \cos \phi, \quad (7.28)$$

$$x^2 = L \sinh \theta \sin \phi. \quad (7.29)$$

Substituindo essas relações em (7.25), obtemos a métrica do espaço hiperbólico:

$$ds^2 = L^2(d\theta^2 + \sinh \theta d\phi^2). \quad (7.30)$$

Como podemos ver, o espaço hiperbólico em questão não possui nenhuma dimensão tipo-tempo. Calculando o escalar de Ricci, encontramos que:

$$R = -\frac{2}{L^2}, \quad (7.31)$$

de modo  $H_2$  é um espaço com curvatura constante negativa.

### 7.3 O espaço-tempo anti-de Sitter

Historicamente, percebeu-se que as equações de Einstein não admitiam soluções que descrevessem um universo estático — de fato, soluções assim não seriam esperadas, tendo em vista que a gravidade sempre tende a atrair todos os objetos massivos para um único ponto em comum. Em uma tentativa de descrever um universo estático e imutável no tempo — como as observações experimentais da época concebiam — Einstein introduziu um termo chamado de *constante cosmológica*, denotado por  $\Lambda$ :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (7.32)$$

A constante cosmológica seria então responsável por um efeito contrário à atração gravitacional. Medidas atuais mostram que nosso universo não é estático: em larga escala as galáxias se afastam de nós em ritmo acelerado, em todas as direções. Embora a ideia original de Einstein estivesse equivocada, a existência de uma constante cosmológica pode conter a explicação para a expansão do universo, embora este conceito ainda careça de uma interpretação física.

O espaço-tempo anti-de Sitter (AdS) é uma solução das equações de Einstein com constante cosmológica negativa. Considere um espaço-tempo de Minkowski  $\mathbb{R}^{2,D-1}$ , com duas direções tipo-tempo, cuja métrica é dada por:

$$ds^2 = -(dx^0)^2 - (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^D)^2. \quad (7.33)$$

O espaço  $AdS_D$  imerso em  $\mathbb{R}^{2,D-1}$  satisfaz a equação:

$$-(x^0)^2 - (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^D)^2 = -L^2. \quad (7.34)$$

Para visualizar este espaço, vamos considerar o caso especial em que  $D = 2$ . A equação para  $AdS_2$  imerso em  $\mathbb{R}^{2,1}$  é dada por (7.34):

$$-(x^0)^2 - (x^1)^2 + (x^2)^2 = -L^2, \quad (7.35)$$

e é automaticamente satisfeita com o uso de *coordenadas globais*, definidas como:

$$x^0 = L \cosh \theta \sin \phi, \quad (7.36)$$

$$x^1 = L \cosh \theta \cos \phi, \quad (7.37)$$

$$x^2 = L \sinh \theta. \quad (7.38)$$

Substituindo essas relações em (7.33), obtemos a métrica do espaço  $AdS_2$ :

$$ds^2 = L^2(-\cosh^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2). \quad (7.39)$$

Note que o espaço anti-de Sitter em si tem apenas uma direção tipo-tempo. A Figura 7.1 representa o espaço  $AdS_2$  imerso no espaço de Minkowski  $\mathbb{R}^{2,1}$ .

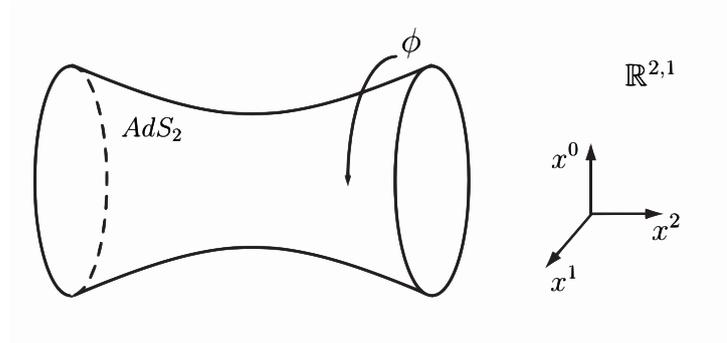


Figura 7.1: Espaço  $AdS_2$  representado como uma superfície imersa no espaço de Minkowski  $\mathbb{R}^{2,1}$ . Fonte: [18].

Assim como no caso do espaço hiperbólico da seção anterior, o espaço  $AdS_2$  tem curvatura constante negativa, tendo em que vista que  $R = -\frac{2}{L^2}$ .

### 7.3.1 Coordenadas de Poincaré e Simetria Conforme

Considere a seguinte solução alternativa para a equação (7.34), chamada de *sistema de coordenadas de Poincaré*:

$$x^0 = \frac{L^2}{2r} \left[ 1 + \frac{r^2}{L^4} (\vec{X} \cdot \vec{X} - t^2 + L^2) \right], \quad (7.40)$$

$$x^1 = \frac{rt}{L}, \quad (7.41)$$

$$x^i = \frac{rX^i}{L}, \quad \text{para } i = 2, \dots, D-1, \quad (7.42)$$

$$x^D = \frac{L^2}{2r} \left[ 1 + \frac{r^2}{L^4} (\vec{X} \cdot \vec{X} - t^2 - L^2) \right], \quad (7.43)$$

sendo  $\vec{X} = (x^2, \dots, x^{D-1})$ ,  $t \in \mathbb{R}$  e  $r > 0$ . Substituindo essas relações em (7.33), obtemos a métrica do espaço  $AdS_D$  neste sistema de coordenadas:

$$ds^2 = \frac{L^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{L^2} (-dt^2 + dX^2). \quad (7.44)$$

Ao fixar o parâmetro  $r$ , temos que  $dr = 0$  e  $\frac{r^2}{L^2}$  é uma constante, de modo que (7.44) toma a forma:

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} (-dt^2 + dX^2). \quad (7.45)$$

Essa é a métrica do espaço de Minkowski. Logo, podemos visualizar o espaço  $AdS_D$  como sendo o espaço plano de Minkowski, parametrizado pelas variáveis  $(t, \vec{X})$ , e mais uma dimensão extra com curvatura, parametrizada por  $r$ , como mostra a Figura 7.2.

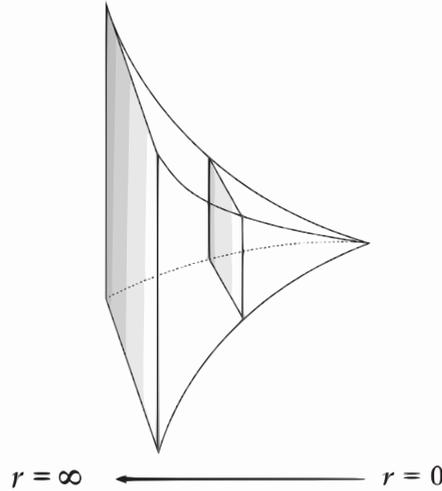


Figura 7.2: Usando o sistema de coordenadas de Poincaré, podemos visualizar o espaço  $AdS_D$  como sendo o espaço plano de Minkowski mais uma dimensão extra com curvatura, parametrizada por  $r$ . Fonte: [25].

Note que (7.44) é invariante quando realizamos transformações do tipo:

$$\begin{aligned} t &\rightarrow \lambda t, \\ \vec{X} &\rightarrow \lambda \vec{X}, \\ r &\rightarrow \frac{r}{\lambda}, \end{aligned} \quad (7.46)$$

Como dito no Capítulo 1, a correspondência AdS/CFT relaciona uma teoria gravitacional descrita no espaço  $AdS_5$  com uma teoria quântica de campos definida na fronteira desse espaço. No sistema de coordenadas de Poincaré, essa fronteira é definida como o espaço de Minkowski em  $r \rightarrow \infty$ . A invariância de (7.44) sob as transformações (7.46) se reflete no fato de que a teoria de campos descrita pela correspondência tem simetria conforme, ou seja, é invariante de escala.

## 7.4 Conclusão

Neste capítulo, enunciamos as equações de Einstein, identificando os termos que contêm a informação a respeito da curvatura do espaço-tempo, a saber: o tensor e escalar de Ricci e a métrica. Também vimos que o lado direito dessas equações descreve o comportamento da matéria e energia, mediante o tensor de momento-energia,  $T_{\mu\nu}$ .

Em seguida, tratamos da *métrica de Schwarzschild*: a única solução das equações de Einstein para uma distribuição de massa perfeitamente esférica e sem rotação. Essa distribuição é útil para descrever objetos astronômicos como os buracos negros. Vimos como essa solução pode ser generalizada para uma dimensionalidade arbitrária.

Por fim, após analisar espaços com curvatura constante, tratamos da métrica do espaço  $AdS_D$ , que é uma solução das equações de Einstein com constante cosmológica negativa. Estudamos diferentes sistemas de coordenadas que descrevem este espaço, e em especial, vimos que o sistema de coordenadas de Poincaré nos permite visualizar o espaço  $AdS_D$  como sendo o espaço plano de Minkowski, parametrizado pelas variáveis  $(t, \vec{X})$ , mais uma dimensão extra com curvatura, parametrizada por  $r$ . A fronteira do espaço  $AdS$  reside em  $r \rightarrow \infty$ .

Após analisar a teoria de gravitação clássica de Einstein e o espaço anti-de Sitter — o que corresponde ao lado ‘AdS’ da correspondência AdS/CFT — nos próximos capítulos vamos estudar as *teorias de gauge*, que descrevem as interações entre as partículas fundamentais. Isso nos permitirá entender o lado ‘CFT’ da correspondência.

Parte III  
Teorias de Gauge

# Capítulo 8

## Mecânica Quântica Relativística

Na mecânica clássica, o estado de um sistema é completamente descrito pela posição e momento de seus constituintes. Dadas as condições iniciais e o potencial ao qual o sistema é submetido, podemos calcular a evolução temporal dessas variáveis usando as leis de Newton, por exemplo.

Todavia, há fenômenos que não são explicados no contexto da mecânica clássica, como o espectro de radiação de um corpo negro, o padrão de interferência em experimentos de dupla fenda envolvendo partículas e a própria estabilidade do átomo. Hoje, esses fenômenos são explicados no contexto da *Mecânica Quântica*<sup>1</sup>.

Para entender os conceitos básicos da mecânica quântica, precisamos abandonar a noção determinística de posição e momento. Tudo o que podemos fazer é calcular a probabilidade de se obter um valor particular para uma observável como resultado de uma medida. As informações sobre o sistema quântico estão contidas em uma *função de onda*, que em geral depende do tempo e da posição. Neste capítulo, veremos algumas equações usadas para obter a função de onda em diferentes regimes de energia.

### 8.1 Equação de Klein-Gordon

No regime não relativístico, a função de onda, denotada por  $\Psi(t, \vec{r})$ , satisfaz a equação de Schrödinger:

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\Psi(t, \vec{r}) + V(\vec{r})\Psi(t, \vec{r}) = i\frac{\partial\Psi(t, \vec{r})}{\partial t}. \quad (8.1)$$

Podemos obter essa equação partindo da expressão clássica para a energia total do sistema,

$$\frac{\vec{P}^2}{2m} + V = E, \quad (8.2)$$

e então substituindo  $E$  e  $\vec{P}$  pelos seus respectivos operadores quânticos:

$$E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{P} \rightarrow -i\nabla. \quad (8.3)$$

Por fim, atuamos o resultado em uma função de onda  $\Psi(t, \vec{r})$ , obtendo (8.1). Um procedimento similar pode ser feito para encontrar uma generalização relativística da

---

<sup>1</sup>Para uma revisão histórica sobre o desenvolvimento da mecânica quântica, veja [26]

equação de Schrödinger. Primeiro, escrevemos a relação energia-momento relativística,

$$p^\mu p_\mu = m^2. \quad (8.4)$$

Por convenção, a partir de agora vamos adotar a métrica de Minkowski com assinatura  $(+, -, -, -)$ , uma vez que essa é a escolha mais comum em estudos de física de partículas. Assim, a generalização do operador momento no espaço de Minkowski é:

$$p^\mu \rightarrow i \frac{\partial}{\partial x_\mu} = i \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right). \quad (8.5)$$

Substituindo (8.5) em (8.4), obtemos

$$\left( i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \left( i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \Psi(x) = m^2 \Psi(x). \quad (8.6)$$

Por fim, atuamos este resultado em uma função de onda, que agora é denotada por  $\Psi(x) \equiv \Psi(x^\mu)$ :

$$\left( i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \left( i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \Psi(x) = m^2 \Psi(x). \quad (8.7)$$

Adotando a notação  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ , obtemos:

$$\left( \partial^\mu \partial_\mu + m^2 \right) \Psi(x) = 0. \quad (8.8)$$

Essa é a *equação de Klein-Gordon*. Há três características a se destacar a respeito do desenvolvimento histórico dessa equação:

1. assim como a equação de Schrödinger, a equação (8.8) não descreve os graus de liberdade internos de uma partícula, como o spin;
2. a equação de Klein-Gordon admite soluções para uma partícula livre com energias positivas e negativas, satisfazendo a relação:

$$E = \pm \sqrt{m^2 + p^2}, \quad (8.9)$$

embora não houvesse uma interpretação física para soluções com energia negativa;

3. a equação de Klein-Gordon não era compatível com a interpretação probabilística de Born, uma vez que a densidade de probabilidade associada à função de onda  $\Psi(x)$  pode assumir valores negativos<sup>2</sup>.

É tentador nos perguntarmos: por que simplesmente não desconsiderar as soluções de uma partícula livre com energia negativa? Em vez disso, considere a seguinte alternativa: se as soluções com energias negativas satisfazem igualmente a equação de Klein-Gordon, por que não ao menos tentar lhes dar uma interpretação física? Além disso, há uma razão formal para levar em conta essas soluções. Na mecânica quântica, o estado de um sistema é descrito por um elemento do espaço de Hilbert. Este espaço deve ser *completo*<sup>3</sup>. Como argumentado em [19], essa condição não é satisfeita se desconsiderarmos os estados com energia negativa, fazendo com que o formalismo da mecânica quântica relativística se torne matematicamente inconsistente.

<sup>2</sup>Veja Apêndice D para uma demonstração desta afirmação.

<sup>3</sup>Para uma definição formal do que isso significa, veja a referência [23], capítulo 13.

## 8.2 Equação de Dirac

Dirac buscou por uma generalização relativística da equação de Schrödinger que não compartilhasse das mesmas inconcistências que a equação de Klein-Gordon. O resultado deveria ser análogo à equação (8.1) — contendo derivadas de primeira ordem no tempo — e ser compatível com a relação de energia-momento.

O procedimento para obter essa equação é similar ao que realizamos para chegar na equação de Klein-Gordon. Em primeiro lugar, devemos notar que para  $\vec{p} = 0$ , a equação (8.4) fica:

$$p^\mu p_\mu = (p^0)^2 = m^2, \quad (8.10)$$

de modo que podemos escrever  $(p^0 - m)(p^0 + m) = 0$ . Em geral, se  $\vec{p} \neq 0$ , podemos fatorar a relação energia-momento introduzindo coeficientes  $\beta^k$  e  $\gamma^\lambda$ :

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu - m^2 &= (\beta^k p_k + m)(\gamma^\lambda p_\lambda - m) \\ &= \beta^k \gamma^\lambda p_k p_\lambda - m(\beta^k p_k - \gamma^\lambda p_\lambda) - m^2 \\ &= \beta^k \gamma^\lambda p_k p_\lambda - m(\beta^k - \gamma^k) p_k - m^2. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Simplificando o fator  $m^2$  em ambos os lados:

$$p^\mu p_\mu = \beta^k \gamma^\lambda p_k p_\lambda - m(\beta^k - \gamma^k) p_k. \quad (8.12)$$

Uma vez que no lado esquerdo temos apenas termos quadráticos do momento, devemos fazer  $\beta^k = \gamma^k$ , a fim de eliminar o termo linear do lado direito:

$$p^\mu p_\mu = \gamma^k \gamma^\lambda p_k p_\lambda. \quad (8.13)$$

Escrevendo explicitamente as somatórias em ambos os lados, para então reagrupar os termos iguais, obtemos:

$$\begin{aligned} (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 &= (\gamma^0)^2 (p_0)^2 + (\gamma^1)^2 (p_1)^2 + (\gamma^2)^2 (p_2)^2 + (\gamma^3)^2 (p_3)^2 \\ &\quad + (\gamma^0 \gamma^1 + \gamma^1 \gamma^0) p_0 p_1 + (\gamma^0 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^0) p_0 p_2 \\ &\quad + (\gamma^0 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^0) p_0 p_3 + (\gamma^1 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^1) p_1 p_2 \\ &\quad + (\gamma^1 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^1) p_1 p_3 + (\gamma^2 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^2) p_2 p_3. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Para eliminar os produtos cruzados  $p_i p_j$ , com  $i \neq j$ , e resolver a equação (8.14), os coeficientes  $\gamma^\mu$  devem satisfazer  $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 0$ , para  $\mu \neq \nu$ . Concluimos que  $\gamma^\mu$  não pode ser simplesmente um número real ou complexo. Todavia, matrizes são bons candidatos para resolver (8.14), pois em geral, seu produto não comuta. De fato, procuramos por um conjunto de quatro matrizes quadradas que satisfazem:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 0, \quad \text{com } \mu \neq \nu, \quad (8.15)$$

$$(\gamma^\mu)^2 = \begin{cases} \mathbb{I}, & \text{se } \mu = 0, \\ -\mathbb{I}, & \text{se } \mu \neq 0, \end{cases} \quad (8.16)$$

onde  $\mathbb{I}$  é a matriz identidade. É relevante chamar atenção para o fato de que os índices de  $\gamma^\mu$  não se referem a coordenadas do espaço-tempo: são um rótulo para distinguir as quatro matrizes que desejamos determinar. Por isso, não precisamos nos preocupar com a posição que estes índices aparecem.

Considere a condição (8.15). Multiplicando por  $\gamma^\nu$  à esquerda, temos:

$$\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = -(\gamma^\nu)^2 \gamma^\mu. \quad (8.17)$$

Usando (8.16), obtemos dois casos:

$$\gamma^\mu = \begin{cases} -\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\nu, & \text{se } \nu = 0, \\ \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\nu, & \text{se } \nu \neq 0. \end{cases} \quad (8.18)$$

Tomando o traço em ambos os lados:

$$\text{tr}(\gamma^\mu) = \begin{cases} -\text{tr}(\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\nu), & \text{se } \nu = 0, \\ \text{tr}(\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\nu), & \text{se } \nu \neq 0. \end{cases} \quad (8.19)$$

Usando a propriedade  $\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\nu) = \text{tr}(\gamma^\nu \gamma^\nu \gamma^\mu)$ , juntamente com (8.16), a equação (8.19) resulta em  $\text{tr}(\gamma^\mu) = -\text{tr}(\gamma^\mu)$ . Logo:

$$\text{tr}(\gamma^\mu) = 0. \quad (8.20)$$

Considere os autovalores da matriz  $(\gamma^\mu)^2$ . Eles devem satisfazer a equação característica:

$$\det\left((\gamma^\mu)^2 - \lambda \mathbb{I}\right) = 0. \quad (8.21)$$

Usando (8.16), obtemos que os autovalores de  $(\gamma^0)^2$  são dados por

$$\det(\mathbb{I} - \lambda \mathbb{I}) = 0, \quad (8.22)$$

o que implica em  $\lambda = 1$ . Da mesma maneira, os autovalores de  $(\gamma^i)^2$ , com  $i = 1, 2, 3$ , satisfazem:

$$\det(-\mathbb{I} + \lambda \mathbb{I}) = 0, \quad (8.23)$$

de modo que  $\lambda = -1$  para este caso.

Qualquer matriz quadrada pode ser representada como uma matriz diagonal em relação a uma base formada por seus autovetores. Neste caso, suas componentes são seus autovalores:

$$(\gamma^0)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (\gamma^i)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}. \quad (8.24)$$

Podemos verificar que a única forma de satisfazer (8.24) é se os autovalores das matrizes  $\gamma^0$  e  $\gamma^i$  forem  $\pm 1$  e  $\pm i$ , respectivamente. Ao impor essa condição juntamente com (8.20), concluímos que a dimensão das matrizes  $\gamma^\mu$  deve ser um número par. Note que as matrizes de Pauli, definidas como

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (8.25)$$

satisfazem (8.15), (8.16), (8.20). Além disso, os autovalores de  $\sigma_1$  são  $\pm 1$ , enquanto as matrizes  $\sigma_i$ , com  $i = 2, 3$ , tem autovalores  $\pm i$ . No entanto, precisamos de quatro matrizes

que satisfaçam todas essas condições. De fato, o conjunto que procuramos pode ser obtido em termos das matrizes de Pauli:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.26)$$

ou explicitamente:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.27)$$

Além de satisfazerem todas as condições requeridas até aqui, as matrizes  $\gamma^\mu$  também tem as seguintes propriedades:

$$\gamma^0 = \gamma^{0\dagger}, \quad \gamma^i = -\gamma^{i\dagger}. \quad (8.28)$$

Finalmente, a equação (8.14) pode ser reescrita na forma de uma equação matricial:

$$\mathbb{I}(p^0)^2 - \mathbb{I}(p^1)^2 - \mathbb{I}(p^2)^2 - \mathbb{I}(p^3)^2 = (\gamma^0)^2(p_0)^2 + (\gamma^1)^2(p_1)^2 + (\gamma^2)^2(p_2)^2 + (\gamma^3)^2(p_3)^2. \quad (8.29)$$

Voltando para a notação quadrivetorial:

$$\mathbb{I}p^\mu p_\mu = \gamma^k \gamma^\lambda p_k p_\lambda. \quad (8.30)$$

Por fim, a relação energia-momento fica:

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu - m^2 &= \gamma^k \gamma^\lambda p_k p_\lambda - m^2 \\ &= (\gamma^k p_k + m)(\gamma^\lambda p_\lambda - m) = 0, \end{aligned} \quad (8.31)$$

onde apenas omitimos a matriz identidade, por simplicidade.

Obtivemos duas equações que devem ser satisfeitas por uma partícula livre relativística com momento  $p^\mu$ :

$$\gamma^\mu p_\mu + m = 0, \quad (8.32)$$

$$\gamma^\mu p_\mu - m = 0. \quad (8.33)$$

Escolhendo (8.33) por convenção, obtemos a equação de Dirac substituindo  $p_\mu$  pelo seu respectivo operador quântico  $i\partial_\mu$ , atuando o resultado em  $\Psi(x)$ :

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi = 0. \quad (8.34)$$

### 8.3 Espinores de Dirac

Sendo (8.34) uma equação matricial, temos que  $\Psi(x)$  não pode ser uma simples função de onda. Na verdade,  $\Psi(x)$  deve ser uma matriz coluna com quatro componentes:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}, \quad (8.35)$$

chamada de *espinor de Dirac*. Espinores formam uma nova classe de objetos que se transformam de maneira especial sob transformações de Lorentz:

$$\Psi' = S\Psi, \quad (8.36)$$

onde  $S$  é uma matriz  $4 \times 4$  dada por<sup>4</sup>:

$$S = a_+\mathbb{I} + a_-\gamma^0\gamma^1, \quad \text{onde } a_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma + 1)}, \quad (8.37)$$

sendo  $\gamma$  o fator de Lorentz usual.

A partir de um espinor, podemos propor construir um escalar da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Psi^\dagger\Psi &= (\Psi_0^* \ \Psi_1^* \ \Psi_2^* \ \Psi_3^*) \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} \\ &= |\Psi_0|^2 + |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + |\Psi_3|^2. \end{aligned} \quad (8.38)$$

No entanto, essa quantidade não é um invariante de Lorentz. Para mostrar isso, primeiro note que  $S$  é uma matriz hermitiana:

$$\begin{aligned} S^\dagger &= (a_+\mathbb{I} + a_-\gamma^0\gamma^1)^\dagger \\ &= a_+^*\mathbb{I}^\dagger + a_-^*\gamma^{\dagger 1}\gamma^{\dagger 0} \\ &= a_+\mathbb{I} - a_-\gamma^1\gamma^0 \\ &= a_+\mathbb{I} + a_-\gamma^0\gamma^1 \\ &= S, \end{aligned} \quad (8.39)$$

onde usamos (8.28) seguido de (8.15). Todavia, a matriz  $S$  não é unitária<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} S^\dagger S &= S^2 \\ &= (a_+\mathbb{I} + a_-\gamma^0\gamma^1)(a_+\mathbb{I} + a_-\gamma^0\gamma^1) \\ &= a_+^2\mathbb{I} + a_+a_-\gamma^0\gamma^1 + a_+a_-\gamma^0\gamma^1 + a_-^2\gamma^0\gamma^1\gamma^0\gamma^1 \\ &= a_+^2\mathbb{I} + 2a_+a_-\gamma^0\gamma^1 - a_-^2\gamma^0(\gamma^1\gamma^1)\gamma^0 \\ &= a_+^2\mathbb{I} + 2a_+a_-\gamma^0\gamma^1 - a_-^2\gamma^0(-\mathbb{I})\gamma^0 \\ &= a_+^2\mathbb{I} + 2a_+a_-\gamma^0\gamma^1 + a_-^2(\gamma^0\gamma^0) \\ &= a_+^2\mathbb{I} + 2a_+a_-\gamma^0\gamma^1 + a_-^2\mathbb{I} \\ &\neq \mathbb{I}. \end{aligned} \quad (8.40)$$

<sup>4</sup>Este resultado é obtido no Apêndice C

<sup>5</sup>Uma matriz unitária satisfaz  $A^\dagger = A^{-1}$ .

Por consequência:

$$\begin{aligned}\Psi'^{\dagger}\Psi' &= (S\Psi)^{\dagger}S\Psi \\ &= \Psi^{\dagger}S^{\dagger}S\Psi \\ &\neq \Psi^{\dagger}\Psi.\end{aligned}\tag{8.41}$$

Para resolver este problema, vamos definir o *espinor adjunto*  $\bar{\Psi}$ :

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^{\dagger}\gamma^0.\tag{8.42}$$

Desejamos mostrar que  $\bar{\Psi}\Psi$  é um escalar de Lorentz, e para isso, devemos verificar como essa quantidade se tranforma:

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}'\Psi' &= \Psi'^{\dagger}\gamma^0\Psi' \\ &= (S\Psi)^{\dagger}\gamma^0(S\Psi) \\ &= \Psi^{\dagger}S^{\dagger}\gamma^0S\Psi.\end{aligned}\tag{8.43}$$

Calculando  $S^{\dagger}\gamma^0S$ , obtemos:

$$\begin{aligned}S^{\dagger}\gamma^0S &= S\gamma^0S \\ &= (a_+\mathbb{I} + a_-\gamma^0\gamma^1)\gamma^0(a_+\mathbb{I} + a_-\gamma^0\gamma^1) \\ &= (a_+\gamma^0 + a_-\gamma^0\gamma^1\gamma^0)(a_+\mathbb{I} + a_-\gamma^0\gamma^1) \\ &= a_+^2\gamma^0 + a_+a_-(\gamma^0\gamma^0)\gamma^1 + a_+a_-\gamma^0\gamma^1\gamma^0 + a_-^2\gamma^0\gamma^1(\gamma^0\gamma^0)\gamma^1 \\ &= a_+^2\gamma^0 + a_+a_-\gamma^1 - a_+a_-\gamma^1(\gamma^0\gamma^0) + a_-^2\gamma^0\gamma^1\gamma^1 \\ &= a_+^2\gamma^0 + a_+a_-\gamma^1 - a_+a_-\gamma^1 - a_-^2\gamma^0 \\ &= (a_+^2 - a_-^2)\gamma^0 \\ &= \left[\frac{1}{2}(\gamma + 1) - \frac{1}{2}(\gamma - 1)\right]\gamma^0 \\ &= \gamma^0.\end{aligned}\tag{8.44}$$

Substituindo (8.44) em (8.43), concluimos que:

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}'\Psi' &= \Psi^{\dagger}S^{\dagger}\gamma^0S\Psi \\ &= \Psi^{\dagger}\gamma^0\Psi \\ &= \bar{\Psi}\Psi.\end{aligned}\tag{8.45}$$

Assim, demonstramos que a quantidade  $\bar{\Psi}\Psi$  tem o mesmo valor em qualquer referencial inercial.

### 8.3.1 Soluções Livres de Dirac

Considere a solução das equações de Dirac para uma partícula livre com  $\vec{p} = 0^6$ :

$$\Psi^{(1)} = e^{-imt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi^{(2)} = e^{-imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\tag{8.46}$$

<sup>6</sup>Essas soluções são obtidas em detalhes na referência [19], capítulo 7.

$$\Psi^{(3)} = e^{imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi^{(4)} = e^{imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8.47)$$

Para obter uma interpretação física dessas soluções, lembre-se de que as matrizes de Pauli são as representações do operador de spin na mecânica quântica não relativística:

$$s_i = \frac{1}{2}\sigma_i. \quad (8.48)$$

Escolhendo  $s_3 = s_z$ , temos os estados de uma partícula cuja projeção do spin na direção  $z$  é  $\frac{1}{2}$  e  $-\frac{1}{2}$  são representados por

$$\chi_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \chi_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (8.49)$$

respectivamente. Logo, podemos reescrever as soluções livres de Dirac como:

$$\Psi^{(1)} = e^{-imt} \begin{pmatrix} \chi_{1/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi^{(2)} = e^{-imt} \begin{pmatrix} \chi_{-1/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8.50)$$

$$\Psi^{(3)} = e^{imt} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_{1/2} \end{pmatrix}, \quad \Psi^{(4)} = e^{imt} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_{-1/2} \end{pmatrix}. \quad (8.51)$$

A generalização de (8.48) no contexto da mecânica quântica relativística de Dirac é direta:

$$S_i = \frac{1}{2}\Sigma_i, \quad \text{onde } \Sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}. \quad (8.52)$$

Podemos verificar que  $\Psi^{(1)}$  e  $\Psi^{(3)}$  são autoestados de  $S_z$  com autovalor  $\frac{1}{2}$ , enquanto  $\Psi^{(2)}$  e  $\Psi^{(4)}$  são autoestados de  $S_z$  com autovalor  $-\frac{1}{2}$ . Concluimos que a equação de Dirac naturalmente descreve férmions de spin  $\frac{1}{2}$ .

Note que o fator  $e^{-imt}$  que aparece em  $\Psi^{(1)}$  e  $\Psi^{(2)}$  é a usual evolução temporal da mecânica quântica, onde  $m$  é a energia de repouso da partícula<sup>7</sup>. Os estados  $\Psi^{(3)}$  e  $\Psi^{(4)}$ , no entanto, carregam um fator  $e^{imt}$ , o que implica que a sua energia de repouso é negativa. Estes estados são interpretados como *antipartículas*: para cada partícula de carga  $e$  e spin  $\frac{1}{2}$ , temos uma antipartícula idêntica, com carga  $-e$ . Após serem previstas pela equação de Dirac em 1928, a comprovação experimental da existência de antipartículas veio apenas em 1931, pelo físico Carl Anderson<sup>8</sup>.

## 8.4 Conclusão

Iniciamos este capítulo demonstrando uma forma de obter a equação de Schrödinger a partir da relação para a energia total clássica, substituindo  $\vec{p}$  e  $E$  pelos seus respectivos operadores quânticos. Realizando o mesmo procedimento para a relação energia-momento relativística, obtivemos a equação de Klein-Gordon (8.8), cujas soluções descrevem partículas livres de spin 0, com energias positivas e negativas.

<sup>7</sup>Lembre-se que  $E = m$  para uma partícula com  $\vec{p} = 0$ , em unidades naturais.

<sup>8</sup>Para uma leitura sobre o desenvolvimento teórico e experimental na descoberta das partículas fundamentais, veja o capítulo 1 da referência [19].

Vimos que Dirac também buscou por uma generalização relativística da equação de Schrodinger, partindo da proposta de fatorar a expressão  $p_\mu p^\mu - m^2 = 0$ . Seguindo estes mesmos passos, encontramos a equação de Dirac (8.34), que como vimos, prevê a existência de antipartículas e descreve férmions de spin  $\frac{1}{2}$ .

Na próxima seção, vamos abordar o formalismo lagrangiano das equações de Klein-Gordon e Dirac, e verificar como as simetrias presentes nessas lagrangianas dão origem às interações fundamentais que conhecemos.

# Capítulo 9

## Simetrias de Gauge

No capítulo anterior, vimos que os campos desempenham um papel fundamental na mecânica quântica. Na teoria de Dirac, por exemplo, as partículas de spin  $\frac{1}{2}$  são descritas pelos campos espinoriais  $\Psi$ , que desempenham o papel de variável dinâmica. A equação de movimento, por sua vez, é a equação de Dirac (8.34).

Enquanto uma partícula é uma entidade localizada em um ponto no espaço, um campo é um objeto com infinitos graus de liberdade: precisamos conhecer o seu valor em todos os pontos do espaço-tempo para poder descrevê-lo completamente.

Neste capítulo, vamos abordar o formalismo lagrangiano das equações de Klein-Gordon e Dirac, bem como introduzir a lagrangiana de Proca. Classicamente, o formalismo lagrangiano é equivalente ao formalismo newtoniano. Todavia, quando se trata de campos quânticos, precisamos descrever não apenas a dinâmica da partícula, como também as suas interações. O formalismo lagrangiano se mostra muito mais vantajoso do ponto de vista teórico para ser aplicado nestes casos.

Após isso, veremos como o fato de impor certas simetrias na lagrangiana de Dirac resulta nas *teorias de gauge*, que descrevem as interações fundamentais entre partículas.

### 9.1 Formalismo lagrangiano das teorias quânticas relativísticas

#### 9.1.1 Lagrangiana de Klein-Gordon

Considere a seguinte densidade Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Psi)(\partial^\mu \Psi) - \frac{1}{2}m^2\Psi^2. \quad (9.1)$$

Desejamos demonstrar que (9.1) dá origem à equação de Klein-Gordon (8.8). Para isso, vamos escrever a equação de Euler-Lagrange<sup>1</sup> para o campo  $\Psi$ :

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{KG}}}{\partial(\partial_\mu \Psi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{KG}}}{\partial \Psi} = 0. \quad (9.2)$$

---

<sup>1</sup>Se você não está habituado com o formalismo lagrangiano, veja o Apêndice A.

Para facilitar os cálculos a seguir, vamos reescrever (9.1) explicitamente:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{KG}} &= \frac{1}{2} \left( \partial_0 \Psi \partial^0 \Psi + \partial_1 \Psi \partial^1 \Psi + \partial_2 \Psi \partial^2 \Psi + \partial_3 \Psi \partial^3 \Psi \right) - \frac{1}{2} m^2 \Psi^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \partial_0 \Psi \partial_0 \Psi - \partial_1 \Psi \partial_1 \Psi - \partial_2 \Psi \partial_2 \Psi - \partial_3 \Psi \partial_3 \Psi \right) - \frac{1}{2} m^2 \Psi^2,\end{aligned}\quad (9.3)$$

de modo que agora fica fácil calcular as seguintes quantidades:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{KG}}}{\partial(\partial_0 \Psi)} = \partial_0 \Psi = \partial^0 \Psi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{KG}}}{\partial(\partial_i \Psi)} = -\partial_i \Psi = \partial^i \Psi, \quad (9.4)$$

com  $i = 1, 2, 3$ . Decorre destes dois resultados que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{KG}}}{\partial(\partial_\mu \Psi)} = \partial^\mu \Psi, \quad (9.5)$$

logo:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{KG}}}{\partial(\partial_\mu \Psi)} \right) = \partial_\mu \partial^\mu \Psi. \quad (9.6)$$

Finalmente, calculamos o termo restante:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{KG}}}{\partial \Psi} = -m^2 \Psi. \quad (9.7)$$

Substituindo (9.6) e (9.7) em (9.2), obtemos:

$$\left( \partial_\mu \partial^\mu - m^2 \right) \Psi = 0, \quad (9.8)$$

que é a equação de Klein-Gordon, inicialmente obtida em (8.8) por meio da expressão clássica para energia total do sistema. Como vimos, essa equação descreve partículas relativísticas de spin 0.

### 9.1.2 Lagrangiana de Dirac

De maneira similar, a lagrangiana que gera as equações de Dirac é dada por:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi. \quad (9.9)$$

Para demonstrar isso, devemos escrever a equação de Euler-Lagrange em relação ao espinor adjunto  $\bar{\Psi}$ :

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Dirac}}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Dirac}}}{\partial \bar{\Psi}} = 0. \quad (9.10)$$

Calculando cada termo separadamente usando (9.9), obtemos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Dirac}}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi})} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Dirac}}}{\partial \bar{\Psi}} = i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \Psi. \quad (9.11)$$

Portando, a equação de Euler-Lagrange (9.10) resulta em

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \Psi = 0, \quad (9.12)$$

que é a equação de Dirac encontrada em (8.34), responsável por descrever partículas relativísticas de spin  $\frac{1}{2}$ . Note que ao escrever a equação de Euler-Lagrange para o espinor  $\Psi$ , obtemos:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Dirac}}}{\partial(\partial_\mu \Psi)} \right) = i\partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Dirac}}}{\partial \Psi} = -m\bar{\Psi}. \quad (9.13)$$

Substituindo ambos os resultados em

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Dirac}}}{\partial(\partial_\mu \Psi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Dirac}}}{\partial \Psi} = 0, \quad (9.14)$$

concluimos que as equações de movimento são:

$$i\partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu + m\bar{\Psi} = 0. \quad (9.15)$$

Essa é a equação de Dirac para o espinor adjunto  $\bar{\Psi}$ .

### 9.1.3 Lagrangiana de Proca

Considere um campo vetorial  $A^\mu$ . A *lagrangiana de Proca* é definida como:

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} \equiv -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi} m^2 A^\mu A_\mu, \quad (9.16)$$

onde  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ . Vamos obter as equações de movimento escrevendo a equação de Euler-Lagrange para o campo  $A^\mu$ :

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Proca}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Proca}}}{\partial A_\nu} = 0. \quad (9.17)$$

Primeiro, considere o cálculo da quantidade  $\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Proca}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Proca}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \left[ -\frac{1}{16\pi} F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} + \frac{1}{8\pi} \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 A^\lambda A_\lambda \right] \\ &= -\frac{1}{16\pi} \left( F_{\lambda\sigma} \frac{\partial F^{\lambda\sigma}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} + F^{\lambda\sigma} \frac{\partial F_{\lambda\sigma}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) \\ &= -\frac{1}{8\pi} \left( F^{\lambda\sigma} \frac{\partial F_{\lambda\sigma}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) \\ &= -\frac{1}{8\pi} \left( F^{\lambda\sigma} \frac{\partial(\partial_\lambda A_\sigma - \partial_\sigma A_\lambda)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) \\ &= -\frac{1}{8\pi} [F^{\lambda\sigma} (\delta_{\lambda\mu} \delta_{\sigma\nu} - \delta_{\sigma\mu} \delta_{\lambda\nu})] \\ &= -\frac{1}{8\pi} (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) \\ &= -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (9.18)$$

onde usamos o fato de que o tensor  $F^{\mu\nu}$  é antissimétrico. Tomando a derivada de (9.18) em relação a  $x^\mu$ , obtemos:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Proca}}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) = -\frac{1}{4\pi} \partial_\mu F^{\mu\nu}. \quad (9.19)$$

Resta-nos calcular o termo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Proca}}}{\partial A_\nu} = \frac{1}{4\pi} m^2 A^\nu. \quad (9.20)$$

Substituindo (9.19) e (9.20) em (9.17), obtemos a *equação de Proca*:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0. \quad (9.21)$$

Note que a estrutura dessa equação é muito similar à equação de Klein-Gordon: o primeiro termo envolve derivadas de segunda ordem do campo  $A^\mu$  enquanto o segundo termo é proporcional ao produto do campo por  $m^2$ . Em resumo, essa equação descreve partículas de spin-1 e massa  $m$ .

No caso especial em que  $m = 0$ , a equação (9.21) se reduz a:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (9.22)$$

Essa é a equação de movimento para o campo eletromagnético no formalismo covariante<sup>2</sup>, sendo que neste caso,  $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$ , onde  $\Phi$  é o potencial elétrico e  $\vec{A}$  o potencial vetor.

## 9.2 Lagrangiana de Dirac e a Eletrodinâmica

Uma característica interessante da lagrangiana de Dirac (9.9) é o fato de que ela é invariante sob transformações globais de fase:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\theta} \Psi, \quad \text{com } \theta \in \mathbb{R}, \quad (9.23)$$

como podemos ver pelo cálculo a seguir:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Dirac}} \rightarrow \mathcal{L}'_{\text{Dirac}} &= i\bar{\Psi}' \gamma^\mu \partial_\mu \Psi' - m\bar{\Psi}' \Psi' \\ &= i(e^{-i\theta} \bar{\Psi}) \gamma^\mu \partial_\mu (e^{i\theta} \Psi) - m(e^{-i\theta} \bar{\Psi}) (e^{i\theta} \Psi) \\ &= i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi} \Psi \\ &= \mathcal{L}_{\text{Dirac}}. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Na linguagem da teoria de grupos, dizemos que  $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$  é invariante sob transformações globais  $U(1)$  de fase, pois  $e^{i\theta}$  pode ser visto como uma matriz  $1 \times 1$  unitária<sup>3</sup>.

Suponha que se queira realizar uma *transformação local de fase*, que pode ser obtida fazendo com que o parâmetro  $\theta$  seja uma função das coordenadas  $x^\mu$ . Devemos redefinir (9.23) como:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\theta(x)} \Psi, \quad \theta(x) \in \mathbb{R}. \quad (9.25)$$

<sup>2</sup>O formalismo covariante do eletromagnetismo é abordado em detalhes na referência [27].

<sup>3</sup>Para uma introdução à teoria de grupos, veja a referência [23], capítulo 2.

Claramente, a lagrangiana de Dirac não é invariante sob este tipo de transformação:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Dirac}} \rightarrow \mathcal{L}'_{\text{Dirac}} &= i\bar{\Psi}' \gamma^\mu \partial_\mu \Psi' - m\bar{\Psi}' \Psi' \\
&= i \left( e^{-i\theta(x)} \bar{\Psi} \right) \gamma^\mu \partial_\mu \left( e^{i\theta(x)} \Psi \right) - m \left( e^{-i\theta(x)} \bar{\Psi} \right) \left( e^{i\theta(x)} \Psi \right) \\
&= i\bar{\Psi} \gamma^\mu e^{-i\theta(x)} \left[ i e^{i\theta(x)} \Psi \partial_\mu \theta(x) + e^{i\theta(x)} \partial_\mu \Psi \right] - m\bar{\Psi} \Psi \\
&= \mathcal{L}_{\text{Dirac}} - \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \partial_\mu \theta(x).
\end{aligned} \tag{9.26}$$

A partir de agora, veremos quais são as implicações físicas de se impor, na forma de um novo princípio físico, que a lagrangiana de Dirac seja invariante sob transformações locais. Primeiro, vamos introduzir um novo fator

$$\lambda(x) = -\frac{1}{q} \theta(x), \tag{9.27}$$

onde  $q$  é a carga da partícula descrita pelo campo de Dirac. Com isso, a equação (9.25) pode ser escrita como:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{-iq\lambda(x)} \Psi. \tag{9.28}$$

A lagrangiana transformada, quando escrita em termos de  $\lambda(x)$ , fica:

$$\mathcal{L}'_{\text{Dirac}} = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + q\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \partial_\mu \lambda(x). \tag{9.29}$$

Para impor que  $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$  seja invariante sob transformações locais, vamos definir um novo operador diferencial, chamado de *derivada covariante*:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu. \tag{9.30}$$

No Capítulo 6, também introduzimos um operador chamado de derivada covariante. De fato, a ideia é análoga: temos uma certa quantidade que não se transforma da maneira que desejamos, e para resolver isso, introduzimos um novo operador diferencial definido como sendo a derivada parcial usual somada a uma correção linear, que neste caso é um campo  $A^\mu$ .

Vamos postular que a lagrangiana de Dirac seja escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = i\bar{\Psi} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \Psi - m\bar{\Psi} \Psi. \tag{9.31}$$

Resta-nos obter a lei de transformação para a derivada covariante tal que (9.31) seja invariante sob (9.25).

Nosso ponto de partida será a lagrangiana transformada:

$$\mathcal{L}'_{\text{Dirac}} = i\bar{\Psi}' \gamma^\mu \mathcal{D}'_\mu \Psi' - m\bar{\Psi}' \Psi'. \tag{9.32}$$

Vamos calcular algumas quantidades individualmente, como o produto  $\bar{\Psi}' \Psi'$ :

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}' \Psi' &= \left( e^{iq\lambda} \bar{\Psi} \right) \left( e^{-iq\lambda} \Psi \right) \\
&= \bar{\Psi} \Psi,
\end{aligned} \tag{9.33}$$

e o termo  $\mathcal{D}'_\mu \Psi'$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}'_\mu \Psi' &= \left( \partial_\mu + iqA'_\mu \right) \left( e^{-iq\lambda} \Psi \right) \\
&= \partial_\mu \left( e^{-iq\lambda} \Psi \right) + iqe^{-iq\lambda} A'_\mu \Psi \\
&= -iqe^{-iq\lambda} (\partial_\mu \lambda) \Psi + e^{-iq\lambda} \partial_\mu \Psi + iqe^{-iq\lambda} A'_\mu \Psi \\
&= e^{-iq\lambda} \left[ \left( \partial_\mu + iqA'_\mu \right) - iq\partial_\mu \lambda \right] \Psi \\
&= e^{-iq\lambda} \left( \mathcal{D}'_\mu - iq\partial_\mu \lambda \right) \Psi.
\end{aligned} \tag{9.34}$$

Substituindo (9.33) e (9.34) em (9.32), obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{\text{Dirac}} &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu\mathcal{D}'_\mu\Psi' - m\bar{\Psi}'\Psi' \\
&= i\left(e^{iq\lambda}\bar{\Psi}\right)\gamma^\mu\left[e^{-iq\lambda}\left(\mathcal{D}'_\mu - iq\partial_\mu\lambda\right)\Psi\right] - m\bar{\Psi}\Psi \\
&= i\bar{\Psi}\gamma^\mu\mathcal{D}'_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi + q\bar{\Psi}\gamma^\mu\left(\partial_\mu\lambda\right)\Psi \\
&= i\bar{\Psi}\gamma^\mu\left(\mathcal{D}'_\mu - iq\partial_\mu\lambda\right)\Psi - m\bar{\Psi}\Psi.
\end{aligned} \tag{9.35}$$

Ao impor que (9.35) seja igual a (9.31), encontramos a seguinte relação:

$$i\bar{\Psi}\gamma^\mu\left(\mathcal{D}'_\mu - iq\partial_\mu\lambda\right)\Psi = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\Psi. \tag{9.36}$$

Por comparação, vemos que a derivada covariante deve se transformar da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}'_\mu &= \mathcal{D}_\mu + iq\partial_\mu\lambda \\
&= (\partial_\mu + iqA_\mu) + iq\partial_\mu\lambda \\
&= \partial_\mu + iq(A_\mu + \partial_\mu\lambda).
\end{aligned} \tag{9.37}$$

A partir deste resultado, também podemos obter como o campo  $A^\mu$  se transforma. Ao comparar  $\mathcal{D}'_\mu = \partial_\mu + iqA'_\mu$  com (9.37), obtemos:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\lambda. \tag{9.38}$$

Note que (9.38) tem a mesma forma de uma transformação de gauge que estamos habituados a ver no formalismo do eletromagnetismo covariante. Uma vez que introduzimos o campo  $A^\mu$  para assegurar a invariância local da lagrangiana de Dirac, dizemos que (9.31) é invariante sob *transformações locais de gauge*.

No entanto, este não é o resultado final. Vamos escrever (9.31) explicitamente:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - q\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi. \tag{9.39}$$

Note que os dois primeiros termos formam a lagrangiana livre de Dirac, na sua forma original. O último termo, no entanto, introduz a interação entre o campo da partícula e o campo  $A^\mu$ , representado pelo produto  $A_\mu\Psi$ . Portanto, devemos introduzir em (9.39) um termo associado a lagrangiana livre de  $A^\mu$ . Naturalmente, buscamos pela lagrangiana de Proca (9.16):

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi}m^2 A^\mu A_\mu. \tag{9.40}$$

Porém, o campo  $A^\mu$  deve ter massa zero, uma vez que o termo  $A^\mu A_\mu$  não é invariante sob (9.38):

$$\begin{aligned}
A'^\mu A'_\mu &= (A^\mu + \partial^\mu\lambda)(A_\mu + \partial_\mu\lambda) \\
&= A^\mu A_\mu + 2A^\mu\partial_\mu\lambda + \partial^\mu\lambda\partial_\mu\lambda \\
&\neq A^\mu A_\mu.
\end{aligned} \tag{9.41}$$

Finalmente, a lagrangiana completa de Dirac, contendo a lagrangiana livre da partícula, a lagrangiana livre do campo  $A^\mu$  e o termo de interação, é:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = (i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi) - \frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu. \quad (9.42)$$

A interpretação física dessa equação é clara: ela descreve partículas carregadas de spin  $\frac{1}{2}$ , interagindo com um campo vetorial  $A^\mu$  não-massivo, cuja lagrangiana livre é a mesma lagrangiana de Maxwell. Podemos concluir que (9.42) representa a dinâmica de partículas carregadas, como elétrons e pósitrons, interagindo com o campo eletromagnético.

Até então, a dinâmica do campo  $A^\mu$  foi obtida classicamente. A quantização da lagrangiana (9.42), no contexto da teoria quântica de campos, dá origem à *eletrodinâmica quântica* (QED)<sup>4</sup>. Nela, o fóton surge como o *quantum* do campo eletromagnético: partícula mediadora da interação. Não trataremos desse assunto formalmente; no entanto, veremos como representar as interações da QED mediante os *diagramas de Feynman*.

### 9.2.1 Diagramas de Feynman na QED

Os diagramas de Feynman são uma poderosa ferramenta visual para descrever os diferentes processos de interação entre partículas. O vértice fundamental da QED é mostrado na Figura 9.1. Este diagrama mostra um elétron ( $e$ ) que entra no processo,

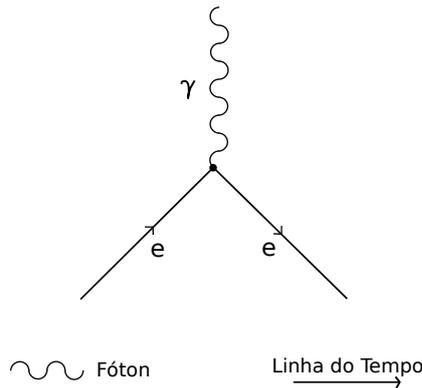


Figura 9.1: Representação do vértice fundamental da QED. A linha do tempo é orientada da esquerda para a direita. Um elétron entra no processo, emite/absorve um fóton e então sai do processo.

emite/absorve um fóton ( $\gamma$ ) e sai do processo. Qualquer partícula eletricamente carregada pode ocupar o lugar do elétron neste diagrama.

Ao combinar vários vértices fundamentais, podemos descrever processos cada vez mais complexos. A repulsão entre dois elétrons, por exemplo, pode ser representada pelo diagrama de espalhamento *Møller*, mostrado na Figura 9.2. Observa-se dois elétrons que entram no processo, interagem mediante a ‘troca’ de um fóton virtual<sup>5</sup> e saem do processo. Qual elétron absorve ou emite o fóton não é relevante, pois apenas as linhas externas do diagrama (entrada e saída dos elétrons no processo) são experimentalmente observáveis.

A interação entre um par elétron-pósitron é representado na Figura 9.3, pelo diagrama de *espalhamento Bhabha*. A seta ‘voltando’ no tempo simboliza a antipartícula.

<sup>4</sup>QED - Quantum Electrodynamics.

<sup>5</sup>Partículas virtuais apenas aparecem nas linhas internas de um diagrama de Feynman, de modo que não podemos observá-las diretamente. Elas são responsáveis por *propagar* um estado inicial (partículas que entram no processo de interação) até um estado final (partículas que saem do processo de interação). Sua massa não necessariamente satisfaz a relação  $E^2 = p^2 + m^2$ .

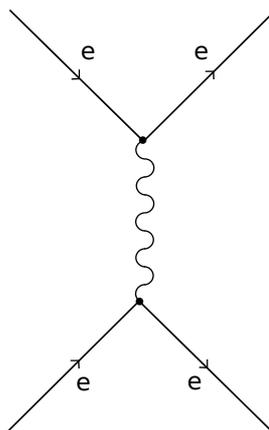


Figura 9.2: O diagrama de espalhamento *Møller* descreve a repulsão elétrica entre dois elétrons.

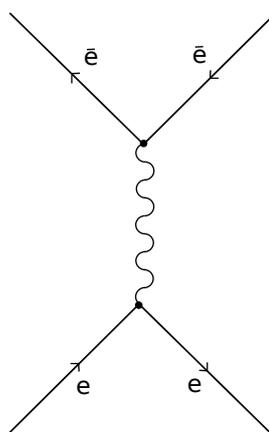


Figura 9.3: A interação elétron-pósitron pode ser descrita pelo diagrama de *espalhamento Bhabha*. A linha que representa a antipartícula é desenhada no sentido oposto à linha do tempo.

Cada diagrama de Feynman pode ser classificado pelo número de vértices que ele contém. Na QED, cada vértice introduz um fator  $g = e^2$  (em unidades naturais), chamado de *constante de acoplamento* da interação. A *amplitude*<sup>6</sup> para um dado processo é dada pela soma de todos os diagramas de Feynman que o representam. Matematicamente, isso pode ser representado como:

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g^n, \quad (9.43)$$

onde  $a_n$  é um coeficiente associado ao  $n$ -ésimo diagrama de  $n$  vértices, calculado usando as *regras de Feynman*.

Uma vez que na QED a constante de acoplamento é muito pequena, quanto mais vértices um diagrama possuir, menos ele contribuirá para o cálculo da amplitude (9.43). Isso nos permite aplicar o método de perturbação, que consiste em descrever o processo levando em consideração apenas os digramas com poucos vértices.

<sup>6</sup>A amplitude de um determinado processo é uma quantidade física da qual podemos obter informações importantes, como seção de choque e taxas de decaimento. Para ver como isso se aplica na QED, veja [19], capítulo 7.

### 9.3 Lagrangiana de Yang-Mills

Suponha que se queira estudar a dinâmica de dois campos livres de Dirac,  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$ , com massas  $m_1 = m_2 = m$ , respectivamente. A lagrangiana total deste sistema é dada por:

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = (i\bar{\Psi}_1\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_1 - m\bar{\Psi}_1\Psi_1) + (i\bar{\Psi}_2\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_2 - m\bar{\Psi}_2\Psi_2). \quad (9.44)$$

Podemos reescrever essa equação em uma forma matricial mais conveniente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{YM}} &= i \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_1 & \bar{\Psi}_2 \end{pmatrix} \gamma^\mu \partial_\mu \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_1 & \bar{\Psi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \\ &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi, \end{aligned} \quad (9.45)$$

onde

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\Psi} = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_1 & \bar{\Psi}_2 \end{pmatrix}. \quad (9.46)$$

A equação (9.45) é chamada de *lagrangiana de Yang-Mills*. Note que  $\mathcal{L}_{\text{YM}}$  é invariante sob transformações globais  $U(2)$  de fase:

$$\Psi \rightarrow U\Psi, \quad (9.47)$$

sendo  $U$  uma matriz unitária de dimensão  $2 \times 2$ . Essa transformação implica que o espinor adjunto satisfaz:

$$\bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}U^\dagger. \quad (9.48)$$

A partir de (9.47) e (9.48), vemos que a lagrangiana transformada é idêntica à lagrangiana original:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{YM}} \rightarrow \mathcal{L}'_{\text{YM}} &= i\bar{\Psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\Psi' - m\bar{\Psi}'\Psi' \\ &= i(\bar{\Psi}U^\dagger)\gamma^\mu\partial_\mu(U\Psi) - m(\bar{\Psi}U^\dagger)(U\Psi) \\ &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu(U^\dagger U)\partial_\mu(\Psi) - m\bar{\Psi}(U^\dagger U)\Psi \\ &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi. \end{aligned} \quad (9.49)$$

Antes de prosseguir, há dois resultados que queremos demonstrar. Primeiro, qualquer matriz unitária pode ser escrita na forma:

$$U = e^{iH}, \quad (9.50)$$

onde  $H$  é uma matriz hermitiana, pois assim:

$$\begin{aligned} UU^\dagger &= e^{iH}(e^{iH})^\dagger \\ &= e^{iH}e^{-iH^\dagger} \\ &= e^{iH}e^{-iH} \\ &= \mathbb{I}. \end{aligned} \quad (9.51)$$

Segundo, qualquer matriz hermitiana  $H$  de dimensão  $2 \times 2$  pode ser escrita em termos das matrizes de Pauli da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H &= \theta\mathbb{I} + \sigma_1 a_1 + \sigma_2 a_2 + \sigma_3 a_3 \\ &= \theta\mathbb{I} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (9.52)$$

sendo que  $\{\theta, a_1, a_2, a_3\} \in \mathbb{R}$ . Este resultado é demonstrado no Apêndice B.

Como consequência, podemos reescrever  $U$  como:

$$U = e^{i\theta} e^{i\sigma \cdot \mathbf{a}}. \quad (9.53)$$

O termo  $e^{i\theta}$  que aparece em (9.53) é uma transformação global  $U(1)$  de fase. De fato, este termo é esperado, tendo em vista que (9.45) é composta pela lagrangiana livre de dois campos de Dirac, cada qual invariante sob transformações do tipo  $\Psi \rightarrow e^{i\theta}\Psi$ . Já abordamos este caso em detalhes na seção anterior.

Podemos mostrar que  $e^{i\sigma \cdot \mathbf{a}}$  é uma matriz unitária com determinante 1, e portanto pertence ao grupo  $SU(2)$ <sup>7</sup>. Isso sugere que as transformações globais  $U(2)$  podem ser decompostas em um produto direto de uma transformação global  $U(1)$  e uma transformação global  $SU(2)$ , isto é,  $U(2) = U(1) \otimes SU(2)$ .

Vamos focar a nossa atenção nas transformações do tipo:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = S\Psi, \quad \text{com } S = e^{i\sigma \cdot \mathbf{a}}. \quad (9.54)$$

Quais as consequências físicas de se promover (9.54) a uma transformação local? Seguindo a mesma estratégia da seção anterior, vamos definir um novo parâmetro:

$$\boldsymbol{\lambda}(x) = -\frac{1}{q}\mathbf{a}(x), \quad (9.55)$$

onde os coeficientes  $a_1, a_2$  e  $a_3$  são agora funções das coordenadas e  $q$  é a carga da partícula representada pelos campos de Dirac. Assim, temos que  $S = e^{-iq\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\lambda}(x)}$ .

É fácil verificar que  $\mathcal{L}_{\text{YM}}$  não é invariante sob transformações deste tipo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{YM}} \rightarrow \mathcal{L}'_{\text{YM}} &= i\bar{\Psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\Psi' - m\bar{\Psi}'\Psi' \\ &= i(\bar{\Psi}S^\dagger)\gamma^\mu\partial_\mu(S\Psi) - m(\bar{\Psi}S^\dagger)(S\Psi) \\ &= i\bar{\Psi}S^\dagger\gamma^\mu(S\partial_\mu\Psi + \Psi\partial_\mu S) - m\bar{\Psi}'\Psi' \\ &= i\bar{\Psi}S^\dagger S\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}'\Psi' + i\bar{\Psi}S^\dagger\gamma^\mu\Psi\partial_\mu S \\ &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}'\Psi' + i\bar{\Psi}S^\dagger\gamma^\mu\Psi\partial_\mu S \\ &= \mathcal{L}_{\text{YM}} + i\bar{\Psi}S^\dagger\gamma^\mu\Psi\partial_\mu S. \end{aligned} \quad (9.56)$$

Isso pode ser resolvido substituindo a derivada usual pela derivada covariante:

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi, \quad (9.57)$$

onde:

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + iq\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}_\mu. \quad (9.58)$$

Além disso, devemos impor que  $\mathcal{D}_\mu\Psi$  se transforme da seguinte maneira:

$$\mathcal{D}_\mu\Psi \rightarrow \mathcal{D}'_\mu\Psi' = S(\mathcal{D}_\mu\Psi), \quad (9.59)$$

<sup>7</sup>A demonstração também se encontra no Apêndice B.

pois assim:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_{\text{YM}} &= i\bar{\Psi}'\gamma^\mu\mathcal{D}'_\mu\Psi' - m\bar{\Psi}'\Psi' \\
&= i\bar{\Psi}S^\dagger\gamma^\mu S\mathcal{D}_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \\
&= i\bar{\Psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \\
&= \mathcal{L}_{\text{YM}}.
\end{aligned} \tag{9.60}$$

O problema agora se resume a descobrir como os campos  $\mathbf{A}_\mu$  devem se transformar para que a condição (9.59) seja satisfeita. Não vamos resolver isso explicitamente — nos limitaremos a apresentar o resultado aproximado para o caso onde  $|\boldsymbol{\lambda}| \ll 1^8$ :

$$\mathbf{A}'_\mu \cong \mathbf{A}_\mu + \partial_\mu\boldsymbol{\lambda} + 2q(\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{A}_\mu). \tag{9.61}$$

Substituindo (9.58) em (9.57), obtemos:

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - q\bar{\Psi}\gamma^\mu(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}_\mu)\Psi. \tag{9.62}$$

Note que os dois primeiros termos representam a lagrangiana livre de Yang-Mills. Todavia, ao impor a invariância local de gauge, acabamos obtendo um termo que representa a interação dos campos  $\mathbf{A}_\mu$  com os campos  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$ , análogo ao que ocorreu no caso da lagrangiana de Dirac. Portanto, para obter uma descrição completa do sistema, devemos introduzir a lagrangiana livre dos campos  $\mathbf{A}_\mu$ . Novamente, encontramos a resposta na lagrangiana de Proca, (9.16). De fato, precisamos de três termos deste tipo, um para cada componente de  $\mathbf{A}_\mu$ :

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{16\pi}\mathbf{F}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi}m^2\mathbf{A}^\mu \cdot \mathbf{A}_\mu. \tag{9.63}$$

Note que o termo  $\mathbf{A}^\mu \cdot \mathbf{A}_\mu$  não é invariante quando aplicamos (9.61), de modo que as massas dos campos  $\mathbf{A}^\mu$  devem ser nulas. Além disso, devemos definir:

$$\mathbf{F}^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu\mathbf{A}^\nu - \partial^\nu\mathbf{A}^\mu - 2q(\mathbf{A}^\mu \times \mathbf{A}^\nu), \tag{9.64}$$

onde  $-2q(\mathbf{A}^\mu \times \mathbf{A}^\nu)$  é um termo antissimétrico introduzido para que  $\mathbf{F}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu}$  também seja invariante sob (9.61).

Finalmente, obtemos a lagrangiana completa de Yang-Mills:

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{16\pi}\mathbf{F}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu} - q\bar{\Psi}\gamma^\mu(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}_\mu)\Psi, \tag{9.65}$$

que descreve dois campos de Dirac de massa  $m$  e spin  $\frac{1}{2}$  interagindo com três campos vetoriais  $\mathbf{A}_\mu$  sem massa.

## 9.4 Cromodinâmica Quântica

A cromodinâmica quântica (QCD)<sup>9</sup> é a teoria que descreve a interação forte. De acordo com o modelo padrão, os hádrons são constituídos de partículas ainda mais fundamentais:

<sup>8</sup>Este resultado é demonstrado em detalhes na referência [19], capítulo 10.

<sup>9</sup>QCD - Quantum Chromodynamics.

os quarks<sup>10</sup>, que são partículas de spin  $\frac{1}{2}$ . Assim como a interação eletromagnética se dá por causa da carga elétrica, os quarks interagem fortemente em razão da sua carga de cor.

Há três tipos de carga de cor: vermelho (r), verde (g) e azul (b). A lagrangiana que descreve um determinado sabor de quark é dada pela soma de três lagrangianas de Dirac, uma para cada cor:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi, \quad (9.66)$$

onde

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_r \\ \Psi_b \\ \Psi_g \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\Psi} = (\bar{\Psi}_r \quad \bar{\Psi}_b \quad \bar{\Psi}_g). \quad (9.67)$$

A estrutura dessa equação é muito similar à lagrangiana de Yang-Mills — vamos focar apenas nas principais diferenças entre as duas teorias, sem refazer todos os cálculos.

Note que  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  é invariante sob transformações globais  $U(3)$  do tipo:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = U\Psi, \quad (9.68)$$

onde  $U$  é uma matriz  $3 \times 3$  unitária. Vimos que qualquer matriz deste tipo pode ser escrita na forma:

$$U = e^{iH}, \quad (9.69)$$

sendo  $H$  uma matriz hermitiana  $3 \times 3$ .

De acordo com (9.52), qualquer matriz hermitiana  $2 \times 2$  pode ser escrita em termos das matrizes de Pauli. De forma análoga, qualquer matriz hermitiana  $3 \times 3$  pode ser decomposta como se segue:

$$H = \theta\mathbb{I} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{a}, \quad (9.70)$$

onde  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_8)$  são as oito *matrizes de Gell-Mann*<sup>11</sup> e  $\{\theta, a_1, a_2, \dots, a_8\} \in \mathbb{R}$ . Isso implica que a matriz de transformação (9.69) pode ser reescrita como:

$$U = e^{i\theta} e^{i\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{a}}. \quad (9.71)$$

A situação que nos encontramos é análoga a (9.53): o termo  $e^{i\theta}$  representa uma transformação  $U(1)$  global, enquanto  $e^{i\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{a}}$  é uma matriz unitária com determinante 1, e portanto representa uma transformação global do grupo  $SU(3)$ .

Seguindo a prescrição das seções anteriores, vamos impor que (9.66) seja invariante sob *transformações locais do grupo  $SU(3)$* , isto é:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = S\Psi, \quad \text{onde } S = e^{-iq\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\phi}(x)}. \quad (9.72)$$

sendo  $\boldsymbol{\phi}(x)$  um novo fator definido de tal forma que  $\mathbf{a}(x) = -q\boldsymbol{\phi}(x)$ . Também vamos definir a derivada covariante:

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + iq\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}_\mu, \quad (9.73)$$

<sup>10</sup>Há 6 tipos (ou sabores) de quarks: quark-up (u), quark-down (d), quark-botton (b), quark-top (t), quark-strange (s) e o quark-charm (c). Para uma revisão histórica sobre o desenvolvimento do modelo dos quarks, veja [19], capítulo 1.

<sup>11</sup>As matrizes de Gell-Mann são de fundamental importância no estudo da força forte. Para encontrá-las e obter mais informações sobre a sua relevância na física de partículas, veja [19], capítulo 8.

onde agora  $\mathbf{A}_\mu = (A_\mu^1, A_\mu^2, \dots, A_\mu^8)$  representa oito campos vetoriais. Definimos a lagrangiana da QCD em termos da derivada covariante da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi. \quad (9.74)$$

Note que se a derivada covariante satisfaz a condição

$$\mathcal{D}_\mu\Psi \rightarrow \mathcal{D}'_\mu\Psi' = S(\mathcal{D}_\mu\Psi), \quad (9.75)$$

então:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{QCD}} &= i\bar{\Psi}'\gamma^\mu\mathcal{D}'_\mu\Psi' - m\bar{\Psi}'\Psi' \\ &= i\bar{\Psi}S^\dagger\gamma^\mu S\mathcal{D}_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \\ &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \\ &= \mathcal{L}_{\text{QCD}}. \end{aligned} \quad (9.76)$$

Portanto, nosso problema se resume a encontrar a lei de transformação para  $\mathbf{A}_\mu$  tal que (9.75) seja satisfeito. De fato, no caso particular em que  $|\phi(x)| \ll 1$ , o resultado é análogo a (9.61):

$$\mathbf{A}'_\mu \cong \mathbf{A}_\mu + \partial_\mu\boldsymbol{\beta} + 2q(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{A}_\mu). \quad (9.77)$$

Note que que  $\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{A}_\mu$  não é o produto vetorial usual, pois envolve vetores com oito componentes. Essa é uma notação simplificada para a seguinte quantidade:

$$(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{A}_\mu)_i = \sum_{j,k=1}^8 f_{ijk}\beta^j A_\mu^k, \quad (9.78)$$

onde  $f_{ijk}$  são coeficientes chamados de *constantes de estrutura do grupo*  $SU(3)$ <sup>12</sup>.

Substituindo (9.73) em (9.74), obtemos a forma da lagrangiana da QCD que temos até então:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - q\bar{\Psi}\gamma^\mu(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}_\mu)\Psi. \quad (9.79)$$

Ainda nos resta introduzir um termo associado a lagrangiana livre dos campos  $\mathbf{A}_\mu$ . Como de costume, teremos um lagrangiana de Proca para cada componente  $\mu = 0, 1, \dots, 8$ . Todos esses campos devem ter massa nula, a fim de que a lagrangiana completa seja invariante sob transformações do tipo (9.77). Satisfazendo todos estes requisitos, a lagrangiana final da QCD é análoga a (9.65):

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{16\pi}\mathbf{F}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu} - q\bar{\Psi}\gamma^\mu(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}_\mu)\Psi, \quad (9.80)$$

onde

$$\mathbf{F}^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu\mathbf{A}^\nu - \partial^\nu\mathbf{A}^\mu - 2q(\mathbf{A}^\mu \times \mathbf{A}^\nu). \quad (9.81)$$

A equação (9.80) descreve três campos de Dirac,  $\Psi_r, \Psi_b, \Psi_g$  que interagem com oito campos vetoriais sem massa, dados pelas componentes de  $\mathbf{A}_\mu$ . Os glúons são as partículas mediadoras da interação forte na formalismo da teoria quântica de campos, sendo  $\mathbf{A}_\mu$  chamado de campo gluônico.

<sup>12</sup>As constantes de estrutura do grupo  $SU(3)$  são discutidas no capítulo 8 da referência [19].

### 9.4.1 Diagramas de Feynman na QCD

Em termos dos diagramas de Feynman, o vértice fundamental da QCD é representado na Figura 9.4.

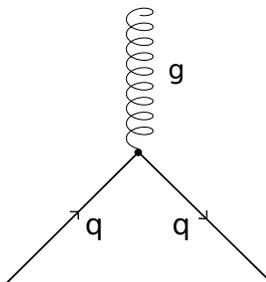


Figura 9.4: Vértice fundamental da QCD.

Enquanto os quarks carregam uma carga de cor, os glúons carregam uma carga de cor e uma de anticor. Em razão disso, um quark pode mudar de cor mediante a emissão ou absorção de um glúon, como mostra Figura 9.5. Neste diagrama, um quark-up azul se converte em um quark-up vermelho — sendo o glúon responsável por assegurar a conservação de cor. É válido destacar que este processo não modifica o sabor do quark.

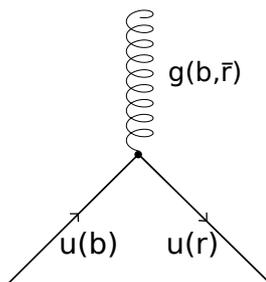


Figura 9.5: Um quark pode variar de cor mediante emissão/absorção de um glúon.

Podemos combinar vértices do diagrama fundamental para descrever a interação entre dois quarks, como mostrado em Figura 9.6. Por possuírem carga de cor, os glúons também

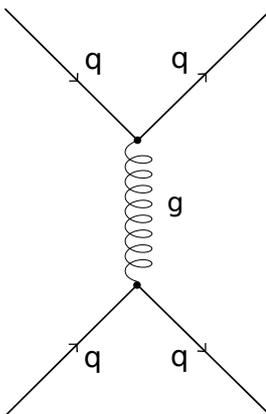


Figura 9.6: Diagrama de interação entre dois quarks mediante a troca de um glúon.

podem interagir diretamente entre si, formando vértices glúon-glúon, representados na Figura 9.7.

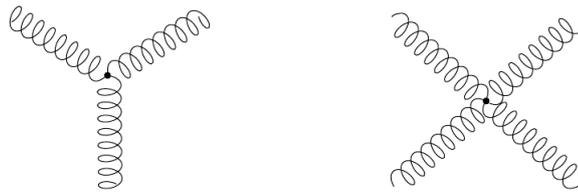


Figura 9.7: Os glúons também interagem entre si, formando vértices glúon-glúon.

Assim como na QED, podemos classificar os diagramas de interação forte pelos seus respectivos números de vértices. Cada vértice contribui com um fator associado com a constante de acoplamento da interação. Na QCD, esse valor não é realmente uma constante, mas varia com a energia. Em regimes de baixas energias, a constante de acoplamento é um número maior que um, logo, diagramas com um número cada vez maior de vértices contribuem cada vez mais para o cálculo da amplitude de um processo. Isso faz com que a QCD seja uma teoria impossível de ser tratada por métodos perturbativos em certas escalas de energia.

## 9.5 Conclusão

Neste capítulo, introduzimos o formalismo lagrangiano da mecânica quântica relativística, enunciando as lagrangianas de Klein-Gordon, Dirac e Proca. Vimos que a lagrangiana de Dirac é invariante sob transformações  $U(1)$  globais, e ao impor que essa invariância se mantenha para transformações locais, introduzimos um novo campo  $A^\mu$  que se acopla ao campo de Dirac da partícula. Concluimos que a lagrangiana resultante (9.42) descreve a eletrodinâmica quântica, sendo o fóton o *quantum* do campo eletromagnético.

Usando os diagramas de Feynman, representamos alguns processos envolvendo a interação entre elétrons e pósitrons, como o espalhamento *Møller* e o espalhamento *Bhabha*. Por fim, destacamos que a amplitude de um determinado processo é calculada por uma soma da contribuição de todos os diagramas que o representam. Tendo em vista que a constante de acoplamento da interação eletromagnética é muito pequena, é possível aplicar métodos perturbativos para resolver problemas na QED.

Ao combinar dois campos de Dirac, obtivemos a lagrangiana de Yang-Mills (9.45). Vimos que ela inicialmente apresenta invariância sob transformações  $U(2)$  globais, que por sua vez, pode ser decomposta em uma transformação global  $U(1)$  e uma transformação global pertencente ao grupo  $SU(2)$ . Ao promover esta última a uma transformação local, introduzimos três campos vetoriais  $\mathbf{A}_\mu$  sem massa que se acoplam aos campos de Dirac, obtendo a lagrangiana completa em (9.65).

Por fim, ao estender a lagrangiana de Yang-Mills para uma combinação de três campos de Dirac, introduzimos a lagrangiana da cromodinâmica quântica (9.66), que por sua vez, é originalmente invariante sob transformações  $U(3)$  globais. Essa simetria pode ser decomposta em uma transformação global  $U(1)$  e uma transformação global pertencente ao grupo  $SU(3)$ . Impondo que  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  também seja invariante sob transformações  $SU(3)$  locais, introduzimos oito campos gluônicos  $\mathbf{A}_\mu$  sem massa, que interagem com o campo de Dirac do quark. Essa dinâmica é resultado da lagrangiana completa da QCD, obtida em (9.80). Destacamos que os glúons são as partículas mediadoras da interação forte no contexto da teoria quântica de campos.

Usando os diagramas de Feynman, vimos como representar processos envolvendo a

interação entre quarks. Vimos que os glúons carregam uma carga de cor e uma de anticor, o que assegura que essa quantidade seja conservada em cada vértice. Por fim, chamamos atenção para a dificuldade de aplicar métodos perturbativos na QCD: uma vez que a constante de acoplamento é grande em regime de baixas energias, os diagramas com um número cada vez maior de vértices contribuem mais para o cálculo da amplitude de um determinado processo.

# Capítulo 10

## Conclusão

O objetivo principal deste trabalho foi abordar, da forma mais ampla possível, os três tópicos que precisamos conhecer para entender e aplicar a correspondência AdS/CFT. A Parte I abrangeu o desenvolvimento da teoria bosônica de cordas, desde a sua formulação clássica até a quantização canônica. Vimos que a teoria bosônica de cordas fechadas apresenta estados que estão naturalmente associados ao gráviton, o que é um forte indicativo de que uma formulação mais realista da teoria de cordas possa ser a resposta para a gravitação quântica. Também destacamos o fato de que a motivação para o desenvolvimento da correspondência AdS/CFT surgiu da identificação que uma teoria de cordas formulada em  $N$   $Dp$ -Branas corresponde a uma teoria de gauge com  $N$  cores, no limite em que  $N \rightarrow \infty$ .

A Parte II buscou desenvolver a nossa intuição a respeito do significado das equações de Einstein. Vimos que a gravidade não é uma força no sentido usual, mas sim uma consequência da deformação da geometria do espaço-tempo na presença de matéria. Enunciamos algumas soluções das equações de Einstein, como o buraco negro de Schwarzschild em  $D$  dimensões e o espaço-tempo anti-de Sitter. Vimos que com o uso de diferentes sistemas de coordenadas, o espaço  $AdS$  pode ser visto como o espaço plano de Minkowski, somado a uma dimensão com curvatura. Esses resultados nos dão uma visão geral do espaço-tempo onde o lado  $AdS$  da correspondência AdS/CFT é definido.

Finalmente, vimos na Parte III a formulação da mecânica quântica relativística. Partindo da equação de Schrödinger, obtivemos as equações de Klein-Gordon e Dirac, que descrevem partículas de spin 0 e spin  $\frac{1}{2}$ , respectivamente. Ao enunciar as lagrangianas que dão origem a essas equações, vimos que a lagrangiana de Dirac é invariante sob transformações globais de gauge. Para impor que ela também seja invariante sob transformações locais, se fez necessário introduzir um novo operador diferencial: a derivada covariante. Esta, por sua vez, introduz um campo  $A^\mu$  que se acopla ao campo de Dirac da partícula. A lagrangiana completa, após a quantização, representa a eletrodinâmica quântica. Por meio dos diagramas de Feynman, vimos que podemos usar métodos perturbativos para calcular a amplitude de processos da QED, uma vez que a constante de acoplamento é pequena.

Estendendo a simetria local de gauge para combinações de dois e três campos de Dirac, obtemos a lagrangiana de Yang-Mills e da cromodinâmica quântica. Também, mediante o uso de diagramas de Feynman, destacamos que a cromodinâmica quântica não permite o uso de métodos perturbativos em regimes onde a constante de acoplamento é maior que um.

Poderíamos continuar este processo, desenvolvendo novas teorias com simetrias cada

vez mais amplas. Em especial, em muitas aplicações da correspondência AdS/CFT, usa-se uma teoria de gauge conforme  $SU(N)$ , no limite onde  $N \rightarrow \infty$ . O termo ‘conforme’ significa que a teoria em questão é invariante de escala.

Como perspectivas futuras, desejamos continuar nos aprofundando no estudo da correspondência AdS/CFT, utilizando como base os conhecimentos adquiridos mediante este trabalho. O próximo passo é estudar o formalismo da teoria quântica de campos, para então entender o dicionário fornecido por essa dualidade entre os parâmetros da teoria de interação forte  $SU(N)$  e a teoria gravitacional clássica descrita no espaço  $AdS$ . Assim, seremos capazes de poder aplicar a correspondência AdS/CFT no estudo das propriedades do plasma de quarks e glúons.

# Apêndice A

## Mecânica Lagrangiana

As equações de movimento de um sistema clássico discreto, cujos  $m$  graus de liberdade são dados pelas coordenadas generalizadas  $q_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), podem ser obtidas construindo a *Lagrangiana* do sistema, definida como

$$L(q_i, \dot{q}_i; t) \equiv T - V, \quad (\text{A.1})$$

e então impondo que a ação, dada por

$$S[q_i, \dot{q}_i] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q_i, \dot{q}_i; t), \quad (\text{A.2})$$

seja estacionária. Isso significa que  $\delta S = S[q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i] - S[q_i, \dot{q}_i] = 0$ , onde  $\delta q_i$  é uma variação nas coordenadas generalizadas que satisfaz as seguintes condições de contorno

$$\delta q_i(t_i) = \delta q_i(t_f) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Vamos calcular  $\delta S$  explicitamente:

$$\begin{aligned} \delta S &= S[q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i] - S[q_i, \dot{q}_i] \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i; t) - \int_{t_i}^{t_f} dt L(q_i, \dot{q}_i; t). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Expandindo  $L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i; t)$  até primeira ordem

$$\begin{aligned} L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i; t) &\approx L(q_i, \dot{q}_i; t) + \left( \frac{\partial L}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial L}{\partial q_m} \delta q_m + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \delta \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \delta \dot{q}_m \right) \\ &= L(q_i, \dot{q}_i; t) + \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Com a aproximação (A.5), podemos reescrever (A.4) como:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ L(q_i, \dot{q}_i; t) + \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \right] - \int_{t_i}^{t_f} dt L(q_i, \dot{q}_i; t) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Note que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i, \quad (\text{A.7})$$

de modo que (A.6) fica

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] \\
 &= \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i + \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \\
 &= \int_{t_i}^{t_f} dt \sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i - \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \Big|_{t_i}^{t_f}. \tag{A.8}
 \end{aligned}$$

Aplicando a condição (A.3), vemos que o último termo em (A.8) é nulo:

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i. \tag{A.9}$$

Logo, sendo este resultado válido para qualquer variação  $\delta q_i$ , temos:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0. \tag{A.10}$$

Essa é a *equação de Euler-Lagrange*.

Se ao invés de um sistema discreto de partículas, desejamos estudar a dinâmica de um campo relativístico  $\phi_i(x^\mu)$ , devemos definir uma *densidade lagrangiana*  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$ , que satisfaz as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) = 0. \tag{A.11}$$

# Apêndice B

## Propriedades de Transformações Unitárias e Matrizes Hermitianas

Seja  $H$  uma matriz hermitiana. Vamos demonstrar que  $H$  pode ser escrita em termos das matrizes de Pauli da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H &= \theta I + \sigma_1 a_1 + \sigma_2 a_2 + \sigma_3 a_3 \\ &= \theta I + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Isso é evidente se considerarmos as componentes de  $H$  e  $H^\dagger$ :

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}, \quad H^\dagger = \begin{pmatrix} H_{11}^* & H_{21}^* \\ H_{12}^* & H_{22}^* \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

de modo que  $H = H^\dagger$  implica nas seguintes relações:

$$H_{11} = H_{11}^*, \quad \Rightarrow \quad H_{11} \in \mathbb{R}, \quad (\text{B.3})$$

$$H_{22} = H_{22}^*, \quad \Rightarrow \quad H_{22} \in \mathbb{R}, \quad (\text{B.4})$$

$$H_{12} = H_{21}^*. \quad (\text{B.5})$$

Escrevendo  $H$  explicitamente na forma (B.1):

$$\begin{aligned} H &= \theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \theta + a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & \theta - a_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

vemos que (B.3), (B.4) e (B.5) são automaticamente satisfeitas.

Considere uma matriz unitária escrita na forma:

$$U = e^{iH}. \quad (\text{B.7})$$

Usando (B.1) podemos escrever:

$$U = e^{i\theta} e^{i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}}. \quad (\text{B.8})$$

Vamos demonstrar que  $e^{i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}}$  é uma matriz de determinante 1. Para isso, considere a expansão:

$$e^{i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}} = 1 + i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}) - \frac{1}{2!}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})^2 - \frac{i}{3!}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})^3 + \dots \quad (\text{B.9})$$

Usando a propriedade:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad (\text{B.10})$$

temos que

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \\ &= a^2, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

de modo que (B.9) fica:

$$\begin{aligned} e^{i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}} &= 1 + i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}) - \frac{1}{2!}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})^2 - \frac{i}{3!}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})^3 + \dots \\ &= 1 + i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}) - \frac{1}{2!}a^2 - \frac{i}{3!}a^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}) + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}a^2 + \dots\right) + i\frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})}{a} \left(a - \frac{1}{3!}a^3 + \dots\right) \\ &= \cos(a) + i\frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})}{a} \sin(a) \\ &= \cos(a) + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{a}} \sin(a), \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

onde  $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3)$ , sendo  $\hat{a}_i = \frac{a_i}{|\mathbf{a}|}$ , para  $i = 1, 2, 3$ .

Reescrevendo (B.12) na forma matricial:

$$\begin{aligned} e^{i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}} &= \begin{pmatrix} \cos(a) & 0 \\ 0 & \cos(a) \end{pmatrix} + i \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{a}_1 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \hat{a}_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \hat{a}_3 \right] \sin(a) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(a) & 0 \\ 0 & \cos(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i\hat{a}_3 \sin(a) & (\hat{a}_2 + i\hat{a}_1) \sin(a) \\ -(\hat{a}_2 - i\hat{a}_1) \sin(a) & -i\hat{a}_3 \sin(a) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(a) + i \sin(a) \hat{a}_3 & (\hat{a}_2 + i\hat{a}_1) \sin(a) \\ -(\hat{a}_2 - i\hat{a}_1) \sin(a) & \cos(a) - i\hat{a}_3 \sin(a) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

para então tomar o determinante:

$$\begin{aligned} \det(e^{i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}}) &= (\cos(a) + i \sin(a) \hat{a}_3) (\cos(a) - i\hat{a}_3 \sin(a)) \\ &\quad + ((\hat{a}_2 - i\hat{a}_1) \sin(a)) (\cos(a) - i\hat{a}_3 \sin(a)) \\ &= \cos^2(a) + \underbrace{(\hat{a}_1^2 + \hat{a}_2^2 + \hat{a}_3^2)}_{=1} \sin^2(a) \\ &= 1. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Demonstramos que  $\det(e^{i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}}) = 1$ , como desejado.

# Apêndice C

## Transformações de Lorentz para Espinores de Dirac

Considere dois referenciais,  $K'$  e  $K$ , sendo  $v$  a velocidade do primeiro em relação ao segundo na direção do eixo  $x$ . A equação de Dirac no referencial  $K'$  é:

$$i\gamma^\mu \partial'_\mu \Psi' - m\Psi' = 0. \quad (\text{C.1})$$

Podemos usar a regra da cadeia para escrever:

$$\partial'_\mu = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \partial_\lambda, \quad (\text{C.2})$$

e então substituir este resultado junto com (8.36) em (C.1):

$$i\gamma^\mu \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \partial_\lambda (S\Psi) - m(S\Psi) = 0. \quad (\text{C.3})$$

A matriz de transformação  $S$  não depende das coordenadas  $x^\lambda$ , então podemos tirá-la da derivada. Aplicando  $S^{-1}$  à esquerda:

$$iS^{-1}\gamma^\mu S \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \partial_\lambda \Psi - m\Psi = 0 \quad (\text{C.4})$$

Escrevendo a equação de Dirac no referencial  $K$ :

$$i\gamma^\lambda \partial_\lambda \Psi - m\Psi = 0, \quad (\text{C.5})$$

e comparando com (C.4), obtemos como as matrizes  $\gamma$  se transformam:

$$\gamma^\lambda = (S^{-1}\gamma^\mu S) \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}. \quad (\text{C.6})$$

Para cada valor de  $\lambda$  temos uma somatória sobre o índice  $\mu$  no lado direito. De fato, este é um conjunto de quatro equações matriciais que define a matriz  $S$ :

$$\gamma^0 = (S^{-1}\gamma^0 S) \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} + (S^{-1}\gamma^1 S) \frac{\partial x^0}{\partial x'^1} + (S^{-1}\gamma^2 S) \frac{\partial x^0}{\partial x'^2} + (S^{-1}\gamma^3 S) \frac{\partial x^0}{\partial x'^3}, \quad (\text{C.7})$$

$$\gamma^1 = (S^{-1}\gamma^0 S) \frac{\partial x^1}{\partial x'^0} + (S^{-1}\gamma^1 S) \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} + (S^{-1}\gamma^2 S) \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} + (S^{-1}\gamma^3 S) \frac{\partial x^1}{\partial x'^3}, \quad (\text{C.8})$$

$$\gamma^2 = (S^{-1}\gamma^0 S) \frac{\partial x^2}{\partial x'^0} + (S^{-1}\gamma^1 S) \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} + (S^{-1}\gamma^2 S) \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} + (S^{-1}\gamma^3 S) \frac{\partial x^2}{\partial x'^3}, \quad (\text{C.9})$$

$$\gamma^3 = (S^{-1}\gamma^0 S) \frac{\partial x^3}{\partial x'^0} + (S^{-1}\gamma^1 S) \frac{\partial x^3}{\partial x'^1} + (S^{-1}\gamma^2 S) \frac{\partial x^3}{\partial x'^2} + (S^{-1}\gamma^3 S) \frac{\partial x^3}{\partial x'^3}. \quad (\text{C.10})$$

Usando as transformações de Lorentz inversas, vemos que os coeficientes  $\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}$  são os elementos da matriz de Lorentz:

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu^\lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.11})$$

onde  $\gamma = (1 + v^2/c^2)^{-1/2}$  é o fator Lorentz usual e não deve ser confundido com as matrizes  $\gamma$ . Portanto:

$$\gamma^0 = (S^{-1}\gamma^0 S)\gamma + (S^{-1}\gamma^1 S)\gamma\beta, \quad (\text{C.12})$$

$$\gamma^1 = (S^{-1}\gamma^0 S)\gamma\beta + (S^{-1}\gamma^1 S)\gamma, \quad (\text{C.13})$$

$$\gamma^2 = (S^{-1}\gamma^2 S), \quad (\text{C.14})$$

$$\gamma^3 = (S^{-1}\gamma^3 S). \quad (\text{C.15})$$

Aplicando  $S$  à esquerda em ambos os lados de todas essas relações:

$$S\gamma^0 = (\gamma^0 S)\gamma + (\gamma^1 S)\gamma\beta, \quad (\text{C.16})$$

$$S\gamma^1 = (\gamma^0 S)\gamma\beta + (\gamma^1 S)\gamma, \quad (\text{C.17})$$

$$S\gamma^2 = \gamma^2 S, \quad (\text{C.18})$$

$$S\gamma^3 = \gamma^3 S. \quad (\text{C.19})$$

Podemos verificar que a matriz  $S$  que satisfaz essas quatro equações é dada por:

$$S = a_+ \mathbb{I} + a_- \gamma^0 \gamma^1, \quad a_\pm = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\gamma \pm 1)}. \quad (\text{C.20})$$

# Apêndice D

## Equações de Continuidade na Mecânica Quântica Relativística

### D.1 Equação de Klein-Gordon

Dada a equação de Klein-Gordon:

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\Psi = 0, \quad (\text{D.1})$$

vamos derivar a equação de continuidade para o quadrivetor corrente de probabilidade,  $j^\mu$ .

Primeiro, vamos tomar o complexo conjugado de (D.1):

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\Psi^* = 0. \quad (\text{D.2})$$

Multiplicando (D.1) à esquerda por  $\Psi^*$  e (D.2) à esquerda por  $\Psi$ , e então subtraindo ambas as equações, obtemos:

$$\Psi^* \left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\Psi - \Psi \left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\Psi^* = 0. \quad (\text{D.3})$$

Simplificando, chegamos ao resultado:

$$\Psi^*\partial_\mu\partial^\mu\Psi - \Psi\partial_\mu\partial^\mu\Psi^* = 0, \quad (\text{D.4})$$

que pode ser reescrito de forma mais conveniente, como se segue:

$$\partial_\mu \left(\Psi^*\partial^\mu\Psi - \Psi\partial^\mu\Psi^*\right) = 0. \quad (\text{D.5})$$

Vamos definir o quadrivetor corrente de probabilidade,  $j^\mu$ , como sendo:

$$j^\mu \equiv \frac{i}{2m} \left(\Psi^*\partial^\mu\Psi - \Psi\partial^\mu\Psi^*\right). \quad (\text{D.6})$$

Logo, decorre imediatamente de (D.5) que:

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (\text{D.7})$$

Essa é a equação de continuidade associada à equação de Klein-Gordon. Como esperado, a componente  $j^0$  representa a densidade de probabilidade:

$$j^0 = \frac{i}{2m} \left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right). \quad (\text{D.8})$$

APÊNDICE D. EQUAÇÕES DE CONTINUIDADE NA MECÂNICA QUÂNTICA RELATIVÍSTICA

Vamos verificar que  $j^0$  pode assumir valores positivos e negativos. Para isso, tomemos a solução da equação de Klein-Gordon para uma partícula livre:

$$\psi(x) = e^{-ip_\mu x^\mu} = e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)}. \quad (\text{D.9})$$

Substituindo (D.9) em (D.8), obtemos:

$$j^0 = \frac{i}{2m} \left[ \left( e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)} \right) \left( -iE e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)} \right) - \left( e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)} \right) \left( iE e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)} \right) \right] \quad (\text{D.10})$$

$$= \frac{i}{2m} (-2iE) \quad (\text{D.11})$$

$$= \frac{E}{m} \quad (\text{D.12})$$

$$= \pm \frac{1}{m} \sqrt{p^2 + m^2}, \quad (\text{D.13})$$

onde usamos  $E = \pm \sqrt{p^2 + m^2}$  para uma partícula livre.

# Referências Bibliográficas

- [1] Raghav Chaturvedi and Ajay Kumar Rai. Mass spectra and decay properties of the  $c\bar{c}$  meson. *The European Physical Journal Plus*, 133(6):220, 2018.
- [2] Michael B Green and John H Schwarz. Anomaly cancellations in supersymmetric D=0 gauge theory and superstring theory. *Physics Letters B*, 149(1-3):117–122, 1984.
- [3] Juan Maldacena. The large-N limit of superconformal field theories and supergravity. *International journal of theoretical physics*, 38(4):1113–1133, 1999.
- [4] David J Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Physical Review Letters*, 30(26):1343, 1973.
- [5] T Ludlam. Experimental results from the early measurements at RHIC; hunting for the quark–gluon plasma. *Nuclear Physics A*, 750(1):9–29, 2005.
- [6] Somdeb Chakraborty and Najmul Haque. Holographic quark–antiquark potential in hot, anisotropic Yang-Mills plasma. *Nuclear Physics B*, 874(3):821–851, 2013.
- [7] Somdeb Chakraborty and Najmul Haque. Drag force in strongly coupled, anisotropic plasma at finite chemical potential. *Journal of High Energy Physics*, 2014(12):175, 2014.
- [8] Giuseppe Policastro, Dan T Son, and Andrei O Starinets. Shear viscosity of strongly coupled N=4 supersymmetric Yang-Mills plasma. *Physical Review Letters*, 87(8):081601, 2001.
- [9] Thiago Araujo, Georgios Itsios, Horatiu Nastase, and Eoin Ó Colgáin. Penrose limits and spin chains in the GJV/CS-SYM duality. *Journal of High Energy Physics*, 2017(12):137, 2017.
- [10] Liza Huijse, Subir Sachdev, and Brian Swingle. Hidden fermi surfaces in compressible states of gauge-gravity duality. *Physical Review B*, 85(3):035121, 2012.
- [11] Omid Saremi and Dam Thanh Son. Hall viscosity from gauge/gravity duality. *Journal of High Energy Physics*, 2012(4):91, 2012.
- [12] Robert Brandenberger, Renato Costa, Guilherme Franzmann, and Amanda Weltman. Dual spacetime and nonsingular string cosmology. *Physical Review D*, 98(6):063521, 2018.
- [13] Miao Li. A model of holographic dark energy. *Physics Letters B*, 603(1-2):1–5, 2004.

- [14] Miao Li, Xiao-Dong Li, Shuang Wang, Yi Wang, and Xin Zhang. Probing interaction and spatial curvature in the holographic dark energy model. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2009(12):014, 2009.
- [15] Barton Zwiebach. *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press, 2009.
- [16] Harold Edwards. *Riemann's Zeta Function*. Dover Publications, INC., 1974.
- [17] Horatiu Nastase. *Introduction to the ADS/CFT Correspondence*. Cambridge University Press, 2015.
- [18] Makoto Natsuume. *AdS/CFT Duality User Guide*, volume 903. Springer, 2015.
- [19] David Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. John Wiley & Sons, 2008.
- [20] Bernard Schutz. *Gravity from the Ground Up*. Cambridge University Press, 2003.
- [21] Sean Carroll. *Spacetime and Geometry*. Cambridge University Press, 2019.
- [22] Charles Misner, Kip Thorne, and John Wheeler. *Gravitation*. Princeton University Press, 2017.
- [23] Peter Szekeres. *A Course in Modern Mathematical Physics: Groups, Hilbert space and differential geometry*. Cambridge University Press, 2004.
- [24] Robert Wald. *General Relativity*. Chicago, University of Chicago Press, 1984.
- [25] Martin Ammon and Johanna Erdmenger. *Gauge/Gravity Duality*. Cambridge University Press, 2015.
- [26] Robert Eisberg and Robert Resnick. *Quantum physics of atoms, molecules, solids, nuclei, and particles*. John Wiley & Sons, 1985.
- [27] Evgeny Lifshitz and Lev Landau. *The classical theory of fields*, volume 2. Butterworth Heinemann, 1980.
- [28] Horatiu Nastase. *Classical Field Theory*. Cambridge University Press, 2019.
- [29] Chris Quigg. *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions*. Princeton University Press, 2013.