



Universidade Federal do Rio Grande
Instituto de Matemática, Estatística e Física
Graduação em Física Bacharelado

**Mecânica de Fluidos e sua Aplicação nas
Colisões Ultrarrelativísticas de Íons Pesados**

Dener de Souza Lemos
Orientador: Prof. Dr. Otavio Socolowski Jr.

Rio Grande
Janeiro de 2015



Universidade Federal do Rio Grande
Instituto de Matemática, Estatística e Física
Graduação em Física Bacharelado

**Mecânica de Fluidos e sua Aplicação nas
Colisões Ultrarrelativísticas de Íons Pesados**

Dener de Souza Lemos
Orientador: Prof. Dr. Otavio Socolowski Jr.

Trabalho apresentado como exigência para
conclusão do curso de Graduação em
Física Bacharelado à banca examinadora
da Universidade Federal do Rio Grande.

Rio Grande
Janeiro de 2015



Universidade Federal do Rio Grande
Instituto de Matemática, Estatística e Física
Graduação em Física Bacharelado

Mecânica de Fluidos e sua Aplicação nas Colisões Ultrarrelativísticas de Íons Pesados

Dener de Souza Lemos

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Otavio Socolowski Jr.
Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF - FURG

Prof. Dr. Cristiano Brenner Mariotto
Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF - FURG

Prof. Dr. João Thiago de Santana Amaral
Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF - FURG

Rio Grande
Janeiro de 2015

*Aos meus pais,
Rudimar e Maria Terezinha.*

Agradecimentos

Aos meus pais Rudimar José Moraes de Lemos e Maria Terezinha de Souza Lemos, por todo apoio, amor, carinho, amizade, dedicação e confiança depositado em mim ao longo da minha vida. Por terem acreditado e por serem estas pessoas maravilhosas que eu tenho o maior orgulho em dizer serem meus pais. Não tenho palavras para descrever o quanto vocês são importantes e o quanto amo vocês.

À minha avó Deni Moraes de Lemos, por todo carinho ao longo da minha vida. Por ser minha segunda mãe e por estar sempre ao meu lado.

Ao Prof. Dr. Otavio Socolowski Jr. por ter me orientado. Pela confiança em mim depositada e por estar sempre presente quando tive dúvidas ou dificuldades.

Aos meus padrinhos Claudeci Vieira da Costa e Janete Moraes de Lemos, por terem me acolhido como um filho.

À Syndell Fernandes, por todo apoio, compreensão, por ter me “aturado” nos momentos de estresse e por estar sempre me apoiando. Você é muito importante e especial para mim.

Ao meu colega e amigo Rafael Reimbrecht, por todo o esforço e noites em claro, estudando, para chegar até o presente momento.

Aos amigos do Laboratório de Oceanografia Costeira e Estuarina (LOCOSTE), pelos tempo que trabalhamos juntos, e por poder sempre contar com a amizade de vocês.

Aos meus colegas, amigos e professores que estiveram presentes ao longo de toda a minha graduação.

Resumo

Realizamos neste trabalho um estudo sobre a mecânica de fluidos e sua aplicação às colisões ultrarrelativísticas de íons pesados. O objetivo geral deste estudo é aprimorar o conhecimento da hidrodinâmica clássica, relativística e as colisões ultrarrelativísticas de íons pesados. Começamos abordando os conceitos mais básicos dos fluidos, sua definição e as suas principais propriedades e características. Após o estudo inicial sobre fluidos, derivamos as principais equações da hidrodinâmica clássica: equação da continuidade que é a lei conservação de massa; equação de Cauchy que é a lei de conservação de momentum; equações de Navier-Stokes que é a equação de movimento para fluidos reais, equação de Euler que é a equação de movimento para fluidos perfeitos, entre outras. Após conhecermos a hidrodinâmica clássica, podemos fazer um estudo mais detalhado sobre hidrodinâmica relativística e compará-las. Por fim estudamos a aplicação da hidrodinâmica relativística nas colisões ultrarrelativísticas de íons pesados. Mostraremos o que ocorre em uma colisão e como o modelo hidrodinâmico pode ser aplicado e quais os ingredientes necessários para isto. A abordagem da hidrodinâmica relativística na descrição do processo de colisão vem sendo aplicada ao longo dos anos [4, 5, 17, 18, 20, 30], com resultados satisfatórios. Desta aplicação podemos calcular, diversos observáveis do sistema como, por exemplo, distribuição em rapidez $\left(\frac{dN}{dy}\right)$, distribuição de momento transverso $\left(\frac{dN}{p_T dp_T}\right)$, fluxo elíptico (v_2), entre outros.

Palavras-Chave: Mecânica de Fluidos; Hidrodinâmica; Cromodinâmica Quântica; Colisão Ultrarrelativística de Íons Pesados;

Convenções e Notações Adotadas

Ao longo deste trabalho, usaremos a convenção de unidades naturais $c = \hbar = k_B = 1$, em que c é a velocidade da luz, \hbar é a constante de Planck dividido por 2π e k_B é a constante de Boltzman. Abaixo seguem algumas convenções adotadas no texto.

| | |
|---|--------------------------|
| $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ | tensor métrico |
| $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ | 4 – vetor posição |
| $u^\mu = (u^0, u^1, u^2, u^3) = \gamma(1, \vec{v})$ | 4 – vetor velocidade |
| $p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3)$ | 4 – vetor momentum |
| $\gamma = \sqrt{1 - \vec{v}^2}$ | fator gama de Lorentz |
| $y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E+p_z}{E-p_z} \right)$ | Rapidez do fluido |
| $\eta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{ \vec{p} +p_z}{ \vec{p} -p_z} \right)$ | Pseudo-rapidez do fluido |
| $v_2 = \langle \cos [2(\phi - \varphi)] \rangle$ | Fluxo Elíptico |

No caso relativístico não adotaremos a notação com índices, 1,2,3, assumiremos, x, y, z , por facilidade na notação. Por exemplo, p^1 é p_x .

Sumário

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 6 |
| 1.1 | Histórico | 7 |
| 1.2 | Hidrostática | 8 |
| 2 | Fluidos | 10 |
| 2.1 | Definição de Fluido | 10 |
| 2.1.1 | A Hipótese do Contínuo | 10 |
| 2.1.2 | Campo de Velocidades | 11 |
| 2.1.3 | Campo de Tensão | 11 |
| 2.1.4 | Tensão Superficial | 13 |
| 2.1.5 | Taxa de deformação | 13 |
| 2.2 | Classificação dos fluidos | 14 |
| 2.2.1 | Fluidos Newtonianos | 15 |
| 2.2.2 | Fluidos Não-Newtonianos | 15 |
| 2.2.3 | Tensor das Tensões | 16 |
| 2.3 | Escoamentos | 18 |
| 2.3.1 | Escoamento Estacionário | 18 |
| 2.3.2 | Escoamento Uniforme e Não-Uniforme | 18 |
| 2.3.3 | Escoamento Viscoso e Invíscidos | 19 |
| 2.3.4 | Escoamento Laminar e Turbulento | 19 |
| 2.3.5 | Escoamento Compressível e Incompressível | 19 |
| 2.3.6 | Escoamento Interno e Externo | 19 |
| 2.3.7 | Escoamento Rotacional e Irrotacional | 20 |
| 3 | Hidrodinâmica Clássica | 21 |
| 3.1 | Equação da Continuidade (Conservação de Massa) | 21 |
| 3.2 | Equação de Cauchy (Conservação de Momentum) | 23 |
| 3.3 | Hipótese de Stokes | 24 |
| 3.4 | Equações de Movimento | 25 |
| 3.4.1 | Equações de Navier-Stokes | 25 |
| 3.4.2 | Equação de Euler | 26 |
| 3.4.3 | Equação de Bernoulli | 26 |
| 3.5 | Vorticidade e Circulação | 27 |
| 3.5.1 | Vorticidade | 27 |
| 3.5.2 | Circulação | 28 |
| 3.6 | Fluxos | 28 |
| 3.6.1 | Fluxo de Energia | 28 |
| 3.6.2 | Fluxo de Momentum | 31 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4 | Hidrodinâmica Relativística | 33 |
| 4.1 | Fluido Perfeito | 33 |
| 4.2 | Velocidade no Fluido Relativístico | 33 |
| 4.3 | Leis de Conservação | 34 |
| 4.3.1 | Conservação de Corrente de Cargas Generalizadas | 34 |
| 4.3.2 | Conservação de Energia-Momentum | 35 |
| 4.3.3 | Conservação de Entropia | 36 |
| 4.4 | Tensor Energia-Momentum | 36 |
| 4.4.1 | Fluidos Perfeitos | 37 |
| 4.4.2 | Fluidos Reais | 39 |
| 4.5 | Equações de Movimento | 39 |
| 4.5.1 | Equação de Euler Relativística | 40 |
| 4.5.2 | Equação de Bernoulli Relativística | 43 |
| 4.6 | Comparando os Casos, Clássico e Relativístico | 45 |
| 5 | Aplicação em Colisão Ultrarrelativísticas de Íons pesados | 46 |
| 5.1 | Cromodinâmica Quântica (QCD) | 46 |
| 5.2 | Colisões Ultrarrelativísticas de Íons Pesados | 49 |
| 5.2.1 | Participantes, Espectadores, Parâmetro de Impacto e Centralidade | 49 |
| 5.2.2 | Representação Pictórica de uma Colisão de Íons Pesados Relativísticos | 51 |
| 5.3 | Condições Iniciais | 52 |
| 5.4 | Desacoplamento | 54 |
| 5.5 | Observáveis | 55 |
| 5.5.1 | Distribuição de Momentum Transversal ou Distribuição de Massa Transversal | 55 |
| 5.5.2 | Distribuição de Rapidez e Distribuição de Pseudo-Rapidez | 57 |
| 5.5.3 | Fluxo Elíptico | 59 |
| 6 | Considerações Finais e Perspectivas | 62 |
| 7 | Apêndices | 63 |
| 7.1 | A: Operador Derivada Material | 63 |
| 7.2 | B: Princípio do Equilíbrio da Tensão | 64 |
| 7.3 | C: Teorema do Transporte de Reynolds | 65 |
| 7.4 | D: Cálculo da Pressão Média | 68 |
| 7.5 | E: Equações de Navier-Stokes para Escoamentos Incompressíveis | 69 |
| 7.6 | F: Demonstração da Lei de Conservação de Energia-Momentum $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ | 71 |
| 7.7 | G: Demonstração da lei de conservação de entropia $\partial_\mu S^\mu = 0$ | 73 |

Capítulo 1

Introdução

Fluidos, como a água e o ar, são essenciais para nossa vida. O movimento dos fluidos pode ser estudado utilizando as leis fundamentais da física juntamente com as propriedades dos fluidos. Conforme a complexidade do escoamento, será a dificuldade no estudo do movimento dos fluidos. O movimento das ondas do mar, furacões e outros fenômenos atmosféricos são exemplos de escoamentos muito complexos. Contudo, podemos realizar análises com uma certa exatidão quando são feitas simplificações devido ao escoamento.

A mecânica dos fluidos estuda o comportamento físico dos fluidos e suas propriedades. A mecânica dos fluidos é dividida em dois ramos, a hidrostática (que será apresentada brevemente na introdução) e a hidrodinâmica (que será abordada ao longo do trabalho). A hidrostática trata das propriedades e leis físicas que regem o comportamento dos fluidos livre da ação de forças externas, ou seja, quando o fluido encontra-se em repouso. A hidrodinâmica estuda fluidos em movimento, no qual, está presente a ação de forças externas responsáveis pelo transporte de massa. Uma descrição relativística da hidrodinâmica é necessária em situações onde a velocidade local do fluxo está perto da velocidade da luz no vácuo (c).

Vamos agora, apresentar como este trabalho está estruturado. Neste capítulo faremos uma breve introdução histórica e uma revisão de hidrostática. No capítulo 2, faremos uma definição geral dos fluidos. Em seguida, é feita a classificação dos fluidos como: Newtoniano e Não-Newtoniano e os respectivos tensor das tensões. Por fim, são apresentados os tipos de escoamentos possíveis para fluidos. No capítulo 3, faremos um estudo sobre a hidrodinâmica clássica. Iniciamos apresentando a equação da continuidade e a equação de Cauchy. Posteriormente apresentamos a hipótese proposta por Stokes, no que se refere a viscosidade volumétrica. Em seguida, derivamos as equações de movimento da hidrodinâmica, a partir dos conceitos apresentados. Também neste capítulo, apresentamos os conceitos de vorticidade e circulação. Por fim, são apresentados os conceitos de fluxos de energia e de momentum. No capítulo 4, faremos a descrição da hidrodinâmica relativística para fluidos perfeitos, iniciando com uma definição formal de fluidos perfeitos e do conceito de velocidade em um fluido relativístico. Logo após, serão apresentadas algumas das leis de conservação importantes para o estudo da hidrodinâmica relativística. Em seguida, faremos uma descrição do tensor de energia-momentum para um fluido perfeito e para um fluido real. A partir destas informações derivamos as equações de movimento para fluidos perfeitos relativísticos. Por fim, será apresentada uma comparação entre os casos clássico e

relativístico. No capítulo 5, iniciamos com uma breve introdução da cromodinâmica quântica (QCD) e a formação do plasma de quarks e glúons (QGP). Em seguida, são apresentadas as colisões ultrarrelativísticas de íons pesados. Posteriormente, são apresentados os tipos de condições iniciais que descrevem a hidrodinâmica. E por fim, apresentamos os observáveis, que são obtidos nestas colisões. No capítulo 6, apresentamos as considerações finais e perspectivas futuras. Nos apêndices A, B, C, D, E, F, G são apresentados conceitos e cálculos citados ao longo do trabalho.

1.1 Histórico

Acredita-se que o estudo da mecânica de fluidos teve sua origem com os gregos [1, 2]. Porém, os primeiros escritos sobre mecânica de fluidos são os de Arquimedes (287-212 a.C), abordando os princípios da flutuação e da hidrostática. Durante o Renascimento, novas contribuições são alcançadas no campo da hidráulica e mecânica experimental por Leonardo da Vinci (1452-1519) que expressou o princípio da continuidade de modo elementar, observou e fez análises de muitos escoamentos básicos e projetou algumas máquinas hidráulicas. Na primeira metade do século XVII, Evangelista Torricelli (1608-1647) relacionou altura barométrica com o peso da atmosfera e a forma do jato de líquido com as trajetórias relativas à queda livre. Em seguida, Blaise Pascal (1623-1662) esclareceu totalmente o princípio de funcionamento do barômetro, da prensa hidráulica e da transmissibilidade de pressão. Na primeira metade do século XVIII, Isaac Newton (1642-1727) enunciou as leis do movimento e ele explorou os vários aspectos da resistência aos escoamentos, incluindo a chamada lei da viscosidade dinâmica de Newton [3]. Explorou também a natureza das ondas e descobriu as contrações nos jatos. Ainda no século XVIII, temos Henri de Pitot (1695-1771) que construiu um duplo tubo para indicar a velocidade nos escoamentos de água a partir da diferença de altura entre as colunas de líquido. Em seguida, Daniel Bernoulli (1700-1782) fez muitas experiências e escreveu sobre o movimento dos fluidos, organizou as técnicas manométricas de medidas e, adotando o princípio primitivo de conservação de energia, formulou a conhecida equação de movimento de Bernoulli. Logo após, Leonard Euler (1707-1783) explicou o papel da pressão nos escoamentos, introduziu o conceito de cavitação, descreveu os princípios de operação das máquinas centrífugas e formulou a equação diferencial que explica o movimento de fluidos perfeitos, a chamada equação de Euler e também formulou o chamado teorema de Bernoulli. Na segunda metade do século XVIII e no começo do século XIX, Giovanni Batista Venturi (1746-1822) fez o estudo dos fluxos, os chamados tubos de Venturi. Também neste período Louis Marie Henri Navier (1785-1836) entendeu as equações do movimento para incluir forças "moleculares". No século XIX, baseada nas idéias de Navier, George Gabriel Stokes (1819-1903) derivou analiticamente a equação de movimento para um fluido viscoso, ou seja, um fluido real. Esta equação ficou conhecida como equação de Navier-Stokes [1, 2, 3, 8, 12]. Por volta de 1950, Lev Davidovich Landau, escreveu as equações da hidrodinâmica com as correções relativísticas, surgindo assim a hidrodinâmica relativística [4].

O uso da hidrodinâmica relativística para descrever colisões hadrônicas, foi feita pelo próprio Landau [4], como aperfeiçoamento das idéias de Fermi [5]. No início dos anos 1950s, Fermi assume que numa colisão hadrônica, a energia disponível no centro de massa do sistema é liberada em um pequeno

volume com tamanho típico de uma nuvem de píons em torno de um núcleon. Ele ainda assumiu que o sistema atinge o equilíbrio numa fase de compressão máxima, e em seguida se quebra instantaneamente emitindo hádrons. Landau usa a mesma representação física para a fase inicial da colisão, porém ao invés de assumir a quebra instantânea, ele permite uma expansão da matéria antes que os hádrons desacoplem. Baseado nas idéias de Landau, o modelo hidrodinâmico é utilizado até hoje.

1.2 Hidrostática

A hidrostática é o estudo de fluidos que se encontram em repouso.

Considere, por exemplo, um elemento de fluido submetido a um gradiente de pressão e a um campo gravitacional, ambos na direção x_3 , conforme a figura (1.1).

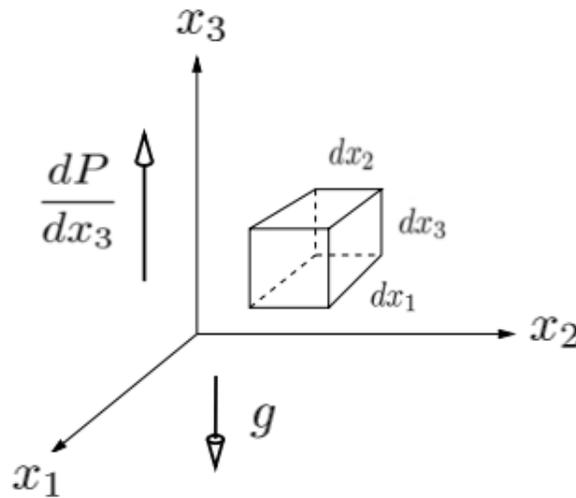


Figura 1.1 - Elemento de fluido, submetido á força gravitacional e a um gradiente de pressão.

Podemos utilizar a 2ª lei de Newton

$$\sum \vec{F} = m\vec{a},$$

em que, m é a massa e \vec{a} é o vetor aceleração. Para este caso, se o fluido encontra-se em repouso, então temos que a aceleração é nula ($\vec{a} = 0$). Logo, temos

$$\vec{F}_P + \vec{F}_G = \vec{0}, \quad (1.2.1)$$

em que \vec{F}_P é o vetor força devido ao gradiente de pressão e \vec{F}_G é o vetor força gravitacional. Estas forças são dadas pelas seguintes expressões

$$\vec{F}_p = PdA - \left(P + \frac{dP}{dx_3} dx_3 \right) dA \hat{x}_3, \quad (1.2.2)$$

$$\vec{F}_G = -\rho g dV \hat{x}_3, \quad (1.2.3)$$

em que ρ, g, dA, dV são, respectivamente, a densidade, a aceleração da gravidade, o elemento de área e o elemento de volume.

Logo, substituindo as equações (1.2.3) e (1.2.2) na equação (1.2.1), temos

$$-\frac{dP}{dx_3} dx_3 dA - \rho g dV = 0.$$

Como $dA = dx_1 dx_2$, então

$$\frac{dP}{dx_3} dV = -\rho g dV.$$

Escrevendo $dx_3 = dz$, temos

$$dP = -\rho g dz.$$

Esta é a equação diferencial da hidrostática. Considerando a densidade constante, integramos ambos os lados e obtemos

$$P = P_0 - \rho g z, \quad (1.2.4)$$

em que, P_0 é a pressão referente ao ponto $z = 0$. A equação (1.2.4) é o chamado teorema de Stevin, a principal equação da hidrostática.

Capítulo 2

Fluidos

Em breve descrição, este capítulo tem por objetivo demonstrar algumas das propriedades dos fluidos, seu aspecto geral, os tipos de tensões aplicadas e os diversos tipos de escoamentos que podem estar presentes.

2.1 Definição de Fluido

A definição mais elementar diz: “Fluido é uma substância que não tem forma própria, assume o formato do recipiente.” [10]

Um fluido é caracterizado como uma substância que se deforma continuamente quando submetida a uma tensão de cisalhamento. Os fluidos abrangem gases, líquidos, plasmas e de certa forma sólidos plásticos. A sua principal característica é assumir o formato do recipiente. Isto acontece pela sua incapacidade de suportar uma tensão de cisalhamento em equilíbrio estático.

Um fluido que apresenta resistência à redução do volume próprio é denominado fluido incompressível, enquanto o fluido que responde com uma redução de seu volume próprio ao ser submetido a ação de uma força é denominado fluido compressível.

2.1.1 A Hipótese do Contínuo

Os fluidos vistos em escalas microscópicas são compostos de moléculas individuais e suas propriedades físicas (densidade, velocidade, entre outras) tem um comportamento não uniforme. Entretanto na dinâmica dos fluidos são estudados os fenômenos macroscópicos, de modo que deixamos de lado o comportamento molecular. Em vez disso, considera-se o fluido como sendo um contínuo, ou seja, um fluido é tratado como uma substância infinitamente divisível [6, 7, 8, 9, 10].

Sendo assim pode-se descrever o movimento de um fluido imaginando que ele pode ser subdividido em pequenos elementos de volume, que podem ser tratados como uma partícula e, posteriormente, descrever cada uma destas partículas de fluido individualmente [9]. Em consequência desta hipótese, cada propriedade do fluido tem seu valor definido em cada ponto do espaço, podendo depender do tempo ou não. Por exemplo, a densidade $\rho = \rho(\vec{r}, t)$.

Definimos a densidade específica num ponto fixo no espaço como:

$$\rho \equiv \lim_{\delta V \rightarrow \delta V'} \frac{\delta m}{\delta V}, \quad (2.1.1)$$

em que δm é a massa e δV o volume de um elemento fluido específico, e $\delta V'$ é o volume mínimo.

A densidade média é dada pela seguinte expressão:

$$\rho \equiv \frac{\Delta m}{\Delta V}, \quad (2.1.2)$$

em que Δm é a variação de massa e ΔV a variação de volume.

2.1.2 Campo de Velocidades

Para o caso de fluidos em movimento, estamos interessados em um campo de velocidades para este fluido, que deve ser definido em cada ponto do espaço em determinado tempo. Assim, em geral

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t).$$

Podemos escrever o vetor velocidade como

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \hat{x}_i,$$

em que v_i é a componente da velocidade na direção i e \hat{x}_i é o vetor normal na direção i .

2.1.3 Campo de Tensão

Em meios contínuos estão presentes forças superficiais e forças de campo.

- Forças de superfície são aquelas que atuam nas fronteiras de um meio através do contato direto.
- Forças de campo são desenvolvidas sem contato físico e distribuídas por todo o volume do fluido.

O conceito de tensão nos dá uma maneira conveniente de descrever como as forças atuantes nas fronteiras do meio são transmitidas através dele.

Considere um elemento de área, $\delta \vec{A}_i$, da superfície na vizinhança do ponto C, orientado no sentido do vetor unitário \hat{n} , normal à superfície apontando no sentido da transmissão da força de contato, (ver figura 2.1).

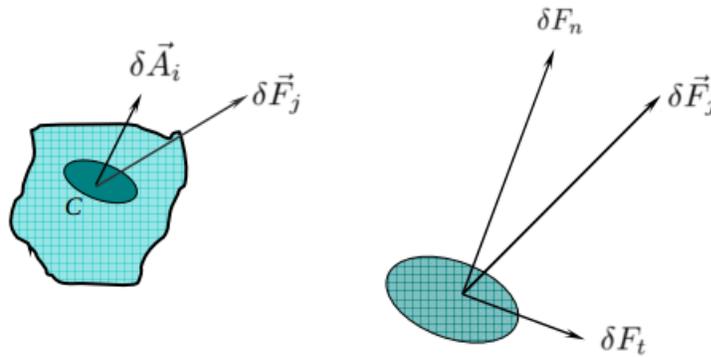


Figura 2.1 - Elemento de fluido e forças agindo sobre o elemento de área δA_i .

A força, $\delta \vec{F}_j$, atuando sobre a área $\delta \vec{A}_i$, pode ser decomposta em duas componentes: uma normal e a outra tangencial à área, conforme a figura 2.1. O tensor das tensões pode ser escrito como:

$$T_{ij} = \lim_{\delta A_i \rightarrow 0} \frac{\delta F_j}{\delta A_i}, \quad (2.1.3)$$

em que $i = j$ é a tensão normal e $i \neq j$ são outras tensões aplicadas sobre o fluido.

Utilizando coordenadas cartesianas, a tensão num ponto pode ser descrita especificando as tensões atuantes em três planos, mutuamente perpendiculares, que passam por este ponto. A tensão (tensor das tensões) num ponto é então especificada por nove componentes:

$$(T_{ij}) = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.1.4)$$

em que T_{ij} é o chamado Tensor das Tensões.

A representação gráfica desta tensão é dado pela figura (2.2).

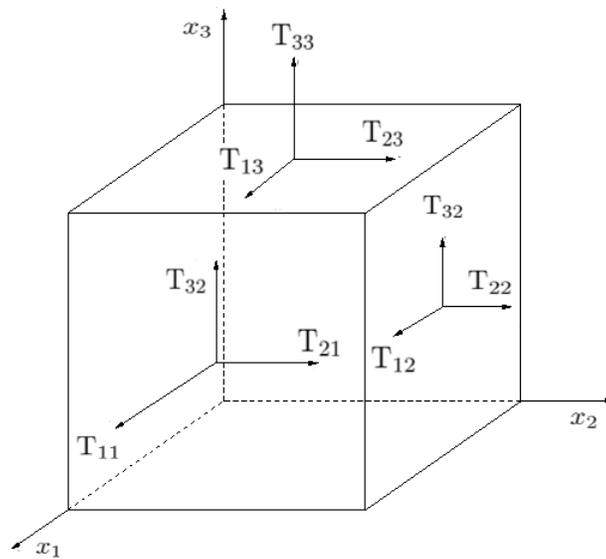


Figura 2.2 - Representação das tensões.

2.1.4 Tensão Superficial

Esta tensão faz com que a camada superficial de um líquido comporte-se como uma membrana elástica. Esta propriedade é causada pelas forças de coesão entre moléculas semelhantes, cuja resultante vetorial é diferente na interface. Enquanto as moléculas situadas no interior de um líquido são atraídas em todas as direções pelas moléculas vizinhas, as moléculas da superfície do líquido sofrem apenas atrações laterais e internas. Este desequilíbrio de forças de atração faz com que a interface se comporte como uma película elástica [8, 9, 10, 12].

2.1.5 Taxa de deformação

Considerando um elemento de fluido localizado entre duas placas infinitas paralelas conforme a figura (2.3), uma delas movendo-se à velocidade v_1 em relação à outra, devido à aplicação de uma força externa no sentido do eixo- x_1 . Chamando de δA_2 a superfície de contato do elemento com a placa que se movimenta e δF_1 à força exercida pela placa sobre o elemento de fluido. No elemento de fluido aparecerá então uma tensão.

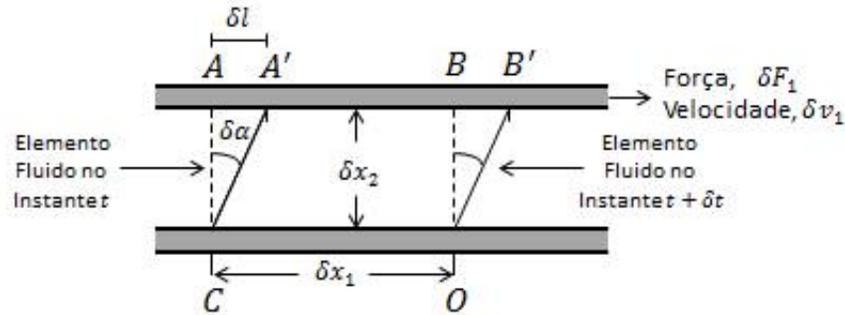


Figura 2.3 - Deformação de um elemento de fluido.

Durante um certo intervalo de tempo δt , o elemento fluido é deformado da posição ACOB para a posição A'COB'. Escrevemos a taxa de deformação como:

$$\text{Taxa de Deformação} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \alpha}{\delta t} = \frac{d\alpha}{dt}. \quad (2.1.5)$$

Escrevemos a distância entre os pontos A e A' como

$$\delta l = \delta v_1 \delta t, \quad (2.1.6)$$

ou para pequenos ângulos,

$$\delta l = \delta x_2 \delta \alpha. \quad (2.1.7)$$

Igualando as equações (2.1.6) e (2.1.7) obtemos:

$$\frac{\delta \alpha}{\delta t} = \frac{\delta v_1}{\delta x_2}. \quad (2.1.8)$$

Tomando os limites em ambos os lados da igualdade, ficamos com

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dv_1}{dx_2}. \quad (2.1.9)$$

Assim, a taxa de deformação para a tensão de cisalhamento τ_{12} é dada por dv_1/dx_2 .

2.2 Classificação dos fluidos

Os fluidos podem ser classificados como: Fluido Newtoniano ou Fluido Não-Newtoniano. Esta classificação esta associada à caracterização da tensão, como linear ou não-linear no que diz respeito à dependência com relação à deformação e à sua derivada.

2.2.1 Fluidos Newtonianos

Fluidos newtonianos são os tipos de fluidos mais comuns, como a água, o ar e a gasolina. Sendo assim para um fluido newtoniano temos que a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional a taxa de deformação

$$\tau_{12} \propto \frac{\partial v_1}{\partial x_2}.$$

Na sua forma geral é dada por:

$$\tau_{ij} \propto \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

A constante de proporcionalidade é a viscosidade de cisalhamento ou viscosidade absoluta μ , então temos

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.2.1)$$

Essa equação é conhecida como a lei da viscosidade de Newton [3].

Fluidos newtonianos também podem ser classificados como:

- Fluidos Reais: são aqueles que possuem viscosidade, são compressíveis, não homogêneos e conduzem calor.
- Fluidos Perfeitos: são aqueles invíscidos, possuem pressão isotrópica e não conduzem calor.

2.2.2 Fluidos Não-Newtonianos

Esses fluidos são aqueles nos quais a tensão de cisalhamento não é diretamente proporcional a taxa de deformação, por exemplo a pasta de dentes. Os fluidos não-newtonianos são geralmente classificados como tendo comportamento independente ou dependendo do tempo. Para este caso a tensão de cisalhamento aplicada fica sendo:

$$\tau_{ij} = k \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right|^{n-1} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.2.2)$$

em que o expoente n é o índice de comportamento do escoamento e k é índice de consistência. No caso de $n = 1$ e $k = \mu$, esta equação se reduz a lei de Newton para a viscosidade.

O termo $\Upsilon = k \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right|^{n-1}$ é chamado de viscosidade aparente.

- Para $n < 1$, a viscosidade aparente do fluido diminui com o aumento da deformação. Estes fluido são chamados de pseudoplásticos;
- Para $n > 1$, a viscosidade aparente aumenta com o aumento da deformação. Estes fluidos são chamados dilatantes;

Pode-se dizer que para estes tipos de fluidos existe uma tensão de cisalhamento limiar τ_T . Fluidos com essa característica, dos quais a argila e a lama são exemplos, são chamados plásticos perfeitos (ou plásticos de Bingham) e podem ser modelados pela equação:

$$\tau_{ij} = \tau_T + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

No caso em que $\tau_T = 0$, voltamos a lei de Newton para a viscosidade.

O estudo de fluidos não-newtonianos é muito complicado pois a viscosidade aparente pode ser dependente do tempo.

- Fluidos tixotrópicos mostram um decréscimo de Υ com o tempo sob uma tensão tangencial constante.
- Fluidos reopéticos mostram um aumento de Υ com o tempo.

2.2.3 Tensor das Tensões

O tensor das tensões para um fluido newtoniano é dado, de forma geral, pela expressão [6, 7, 8, 12, 13, 14]

$$\mathbb{T}_{ij} = -P\delta_{ij} + d_{ij}, \quad (2.2.3)$$

em que δ_{ij} é o delta de Kronecker e d_{ij} é o tensor das tensões viscoso. No caso de fluidos perfeitos $d_{ij} = 0$.

O tensor d_{ij} foi derivado por Stokes [8, 13]. Ele é dado pela seguinte expressão

$$d_{ij} = A_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad (2.2.4)$$

onde a derivada pode ser decomposta como a soma de um parte simétrica e uma antissimétrica

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_l} = \beta_{kl} + \alpha_{kl}$$

em que, β_{kl} é o tensor simétrico e α_{kl} é o tensor antissimétrico. Estes são dados pelas expressões

$$\beta_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right)$$

e

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right).$$

Logo, podemos escrever a expressão (2.2.4), como

$$d_{ij} = A_{ijkl}\beta_{kl} + A_{ijkl}\alpha_{kl} \quad (2.2.5)$$

Porém, podemos escrever a parte antissimétrica usando a vorticidade (ω),

$$\alpha_{kl} = +\frac{1}{2}\varepsilon_{klm}\omega_m.$$

Então a expressão (2.2.5) fica,

$$d_{ij} = A_{ijkl}\beta_{kl} + \frac{1}{2}A_{ijkl}\varepsilon_{klm}\omega_m$$

em que ε_{klm} é o tensor de Levi-Cevita. Que possui valores

$$\varepsilon_{klm} = \begin{cases} 1, & \text{Se } k, l, m = 1, 2, 3 \text{ ou } 2, 3, 1 \text{ ou } 3, 1, 2 \\ -1, & \text{Se } k, l, m = 1, 3, 2 \text{ ou } 2, 1, 3 \text{ ou } 3, 2, 1 \\ 0, & \text{Caso os índices se repitam} \end{cases}.$$

Em coordenadas cartesianas o tensor A_{ijkl} pode ser descrito pela seguinte expressão [8]:

$$A_{ijkl} = \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \varrho\delta_{il}\delta_{jk} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}$$

em que μ, ϱ, λ são coeficientes lineares ou coeficientes de viscosidade.

Para que A_{ijkl} seja simétrico em i e j , devemos ter

$$\mu = \varrho,$$

então

$$A_{ijkl} = \mu[\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}] + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl},$$

devido a esta simetria em A_{ijkl} , o termo que contém a vorticidade é nulo (devido ao tensor de Levi-Cevita). Com isto, ficamos apenas com

$$d_{ij} = \mu\delta_{ik}\delta_{jl}\beta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}\beta_{kl} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}\beta_{kl}.$$

Usando as propriedades da delta de Kronecker, podemos escrever

$$d_{ij} = 2\mu\beta_{ij} + \lambda\delta_{ij}\beta_{kk}$$

em que

$$\beta_{kk} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$$

e

$$2\mu\beta_{ij} = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

é igual ao τ_{ij} , dado pela equação (2.2.1). Logo, o tensor das tensões viscoso é dado pela expressão

$$d_{ij} = \tau_{ij} + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k}. \quad (2.2.6)$$

Substituindo a equação (2.2.6) em (2.2.3), temos a forma geral do tensor das tensões

$$T_{ij} = -P \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \quad (2.2.7)$$

ou

$$\overleftrightarrow{T} = -P \overleftrightarrow{I} + \overleftrightarrow{\tau} + \lambda (\nabla \cdot \vec{v}) \quad (2.2.8)$$

em que μ é a viscosidade de cisalhamento e o λ é a segunda viscosidade ou viscosidade de dilatação.

Para os fluidos não-newtonianos, não há, até o presente momento, uma forma geral para o tensor das tensões.

2.3 Escoamentos

Nesta secção, serão apresentados os tipos de escoamentos que são frequentemente estudados na mecânica de fluidos.

2.3.1 Escoamento Estacionário

Escoamento estacionário é quando o campo de velocidade do fluido não varia com o tempo, ou seja,

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}).$$

Isso significa que diferentes partículas do fluido passam pelo mesmo ponto com a mesma velocidade, embora \vec{v} possa variar de ponto a ponto.

2.3.2 Escoamento Uniforme e Não-Uniforme

Se no escoamento a velocidade tem a mesma magnitude e direção em todo ponto do fluido é dito ser uniforme. Isto se aplica em geral para todas as propriedades do fluido numa determinada secção reta de um sistema em estudo.

Se em um dado instante, a velocidade não é a mesma em todo ponto (numa determinada secção reta) o escoamento é não-uniforme. Na prática, devido a esta definição, todo fluido que escoar próximo de uma fronteira sólida é não-uniforme. O fluido na fronteira deve tomar a velocidade da fronteira, geralmente zero. Entretanto se o tamanho e a forma da seção da corrente de fluido é constante o fluxo é considerado uniforme.

2.3.3 Escoamento Viscoso e Invíscidos

Viscosidade é uma medida da aderência interna de um fluido, e é causada por forças coesivas entre as moléculas nos líquidos e por colisões moleculares nos gases. Não existe fluido com viscosidade nula, apenas há casos em que a viscosidade é desprezível. Os escoamentos em que os efeitos de atrito são significativos chamam-se escoamentos viscosos. Os escoamentos onde as forças viscosas são desprezíveis (quando relacionadas às forças inerciais e de pressão) são chamados de escoamento invíscidos.

2.3.4 Escoamento Laminar e Turbulento

No escoamento laminar a estrutura do escoamento é feito através de lâminas ou camadas, ou seja, as partículas do fluido tendem a percorrer trajetórias paralelas.

No escoamento turbulento a estrutura do escoamento é caracterizada por movimentos aleatórios de partículas fluidas e sua velocidade varia com o tempo.

Estes escoamentos podem ser descritos utilizando o Número de Reynolds (Re), que de forma simples é dado pela expressão:

$$Re = d \frac{\rho}{\mu} \bar{v},$$

em que Re é o Número de Reynolds, \bar{v} é a velocidade média do fluido e d é o diâmetro do tubo de escoamento.

Em um escoamento laminar o Re é

$$Re < 2000,$$

e em um escoamento turbulento Re é

$$Re > 3000,$$

nos casos entre 2000 e 3000 o escoamento é instável, podendo variar de um escoamento para o outro.

2.3.5 Escoamento Compressível e Incompressível

Escoamento incompressível é aquele em que as variações de densidade são desprezíveis, ou seja, $\rho \cong cte$.

Escoamento compressível é aquele em que as variações de densidade não são desprezíveis, ou seja, a densidade ρ varia.

2.3.6 Escoamento Interno e Externo

Escoamentos externos são aqueles que não possuem limitação de um fluido sobre uma superfície.

Escoamentos internos são aqueles que são completamente envoltos por sólidos, também chamados de escoamentos em dutos. Para o caso do escoamento interno em líquidos nos quais os dutos não são completamente preenchidos é denominado escoamento em canal aberto.

2.3.7 Escoamento Rotacional e Irrotacional

Escoamento rotacional é aquele em que a partícula de fluido está sujeita a uma velocidade angular, em relação ao seu centro de massa. Neste caso deve-se considerar a vorticidade.

Escoamento irrotacional é aquele em que a partícula de fluido não possui velocidade angular, é o caso onde a vorticidade é considerada nula.

Capítulo 3

Hidrodinâmica Clássica

Hidrodinâmica é uma das áreas de estudo da mecânica dos fluidos que lida com fluidos em movimento, tanto líquidos quanto gases. Este capítulo pretende apresentar tópicos da hidrodinâmica clássica, ou seja, sem efeitos relativísticos, para que este venha a ser abordado posteriormente, tendo assim o conhecimento necessário da hidrodinâmica clássica.

3.1 Equação da Continuidade (Conservação de Massa)

Os resultados da dinâmica dos fluidos geralmente decorrem de leis de conservação. A equação da continuidade é a lei de conservação de massa aplicada ao movimento do fluido.

Para formular a equação da continuidade de uma forma geral, podemos considerar um volume V fixo no fluido, limitado por uma superfície fechada S , e seja \hat{n} , o vetor normal a esta superfície (Fig. 3.1) [11].

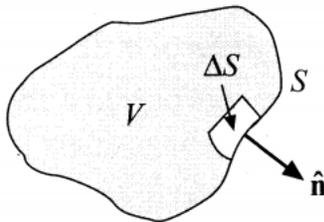


Figura 3.1 - Vetor normal a superfície S . Retirada da referência [11]

O fluxo de massa que atravessa a área ΔS é dado pela expressão

$$\frac{dm}{dt} = - \oiint_A \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}. \quad (3.1.1)$$

Porém, a massa pode ser escrita como

$$\Delta m = \rho \Delta V$$

ou também

$$m = \iiint_V \rho dV. \quad (3.1.2)$$

Logo, substituindo a equação (3.1.2) na equação (3.1.1), obtemos

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = - \oiint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

ou

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \rho dV = - \oiint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}.$$

Utilizando o teorema da divergência

$$\left(\oiint_S \vec{b} \cdot d\vec{S} = \iiint_V [\nabla \cdot \vec{b}] dV \right)$$

na integral de superfície, temos

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \iiint_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV,$$

reescrevendo:

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV = 0.$$

Para o resultado da integral ser zero, o integrando deve ser igual a zero, logo, se obtem a equação da continuidade ou equação de conservação de massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (3.1.3)$$

Aplicando o operador derivada material (ver apêndice A) a equação da continuidade fica:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (3.1.4)$$

No caso de um fluido incompressível, ou seja, densidade ρ é constante, então $d\rho/dt = 0$, temos

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

3.2 Equação de Cauchy (Conservação de Momentum)

Pela segunda lei de Newton, o somatório das forças agindo sobre um corpo é igual a taxa de variação do momento linear deste corpo em relação ao referencial inercial:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

em que \vec{F} é o vetor força e \vec{p} é o vetor momento linear.

Aplicando isso a um volume material do fluido, temos

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt} \left[\iiint_V \rho \vec{v} dV \right].$$

Existem dois tipos de forças:

- forças externas, como por exemplo a gravidade,
- forças superficiais, forças do material fora do volume V agindo sobre V .

Podemos escrever:

$$\vec{F}_V + \vec{F}_S = \frac{d}{dt} \left[\iiint_V \rho \vec{v} dV \right],$$

em que \vec{F}_V são as forças externas e \vec{F}_S as forças superficiais [12], Logo,

$$\iiint_V \rho \vec{f} dV + \oint_A \vec{t} dA = \frac{d}{dt} \left[\iiint_V \rho \vec{v} dV \right], \quad (3.2.1)$$

em que \vec{f} é o vetor força externa do corpo por unidade de massa, e \vec{t} é o vetor de tensão.

Aplicando o princípio do equilíbrio da tensão ($\vec{t} = \overleftarrow{\mathbf{T}} \cdot \hat{n}$, ver apêndice B) e o teorema do transporte de Reynolds (ver apêndice C). Podemos escrever (3.2.1) como

$$\iiint_V \rho \vec{f} dV + \oint_A \overleftarrow{\mathbf{T}} \cdot \hat{n} dA = \iiint_V \left[\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \cdot \vec{v}) \right] dV. \quad (3.2.2)$$

Aplicando o teorema da divergência na integral de área, e colocando toda expressão em uma única integral, temos

$$\iiint_V \left[\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \cdot \vec{v}) - \rho \vec{f} - \nabla \cdot \overleftarrow{\mathbf{T}} \right] dV = 0.$$

Para que o resultado desta integral seja igual a zero, então o integrando tem que ser nulo. Assim:

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \cdot \vec{v}) - \rho \vec{f} - \nabla \cdot \overleftarrow{\mathbf{T}} = 0. \quad (3.2.3)$$

Podemos escrever

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} = \rho \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial\rho}{\partial t} \quad (3.2.4)$$

e

$$\nabla \cdot (\rho\vec{v} \cdot \vec{v}) = \vec{v}\nabla \cdot (\rho\vec{v}) + \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}. \quad (3.2.5)$$

Substituindo as equações (3.2.5) e (3.2.4) em (3.2.3), temos

$$\rho \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) \right] + \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \rho\vec{f} + \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}}.$$

Pela equação da continuidade temos que o termo entre colchetes é nulo, logo

$$\rho \left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \right] = \rho\vec{f} + \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}}$$

Utilizando o operador derivada material (ver apêndice A), chega-se à equação de conservação de momentum de Cauchy:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{f} + \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}}. \quad (3.2.6)$$

3.3 Hipótese de Stokes

Considerando o tensor de tensões para fluidos newtonianos, na sua forma indicial, em que se assume a dependência linear entre o tensor de tensões e o tensor taxa de deformação, dado pela equação (2.2.7), temos

$$T_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij}.$$

Podemos escrever a pressão média como

$$\bar{P} = -\frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33}). \quad (3.3.1)$$

Substituindo a equação (2.2.7) em (3.2.1), verificamos que a pressão média encontrada num fluido não é exatamente a mesma pressão hidrostática do fluido (ver apêndice D). Ela é dada pela seguinte equação:

$$\bar{P} = P - \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda \right) (\nabla \cdot \vec{v}),$$

em que μ e λ são respectivamente a viscosidade de cisalhamento e a viscosidade de dilatação ou segunda viscosidade. O termo

$$\kappa = \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda \right)$$

é chamado de viscosidade volumétrica.

Como as pressões deveriam ser as mesmas em qualquer tipo de escoamento. Stokes [13] propôs que a viscosidade volumétrica fosse nula:

$$\left(\frac{2}{3}\mu + \lambda \right) = 0.$$

Segundo Stokes, a segunda viscosidade ou viscosidade de dilatação é dada em termos da viscosidade de cisalhamento:

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu. \quad (3.3.2)$$

3.4 Equações de Movimento

3.4.1 Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes são equações diferenciais que descrevem o escoamento de fluidos. Elas foram criadas por Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836) e George Gabriel Stokes (1819-1903).

Partindo da equação da conservação do momentum proposta por Cauchy, equação (3.2.6), e sabendo que o tensor de tensões para um fluido newtoniano é dado pela equação (2.2.8), temos

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \left(-P \overleftrightarrow{\Gamma} + \overleftrightarrow{\tau} + \lambda (\nabla \cdot \vec{v}) \overleftrightarrow{\Gamma} \right). \quad (3.4.1)$$

Utilizando a seguinte propriedade do divergente

$$\nabla \cdot (\overleftrightarrow{A} + \overleftrightarrow{B}) = \nabla \cdot \overleftrightarrow{A} + \nabla \cdot \overleftrightarrow{B},$$

e utilizando a hipótese de Stokes $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$, a equação de Navier-Stokes fica:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} - \nabla P + \nabla \cdot \left(\mu \left\{ \left[\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T \right] - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \overleftrightarrow{\Gamma} \right\} \right). \quad (3.4.2)$$

Esta é a equação completa sem nenhuma restrição a respeito de escoamento ou propriedade do fluido, e é portanto válida para qualquer fluido newtoniano. Na sua forma indicial essa equação é escrita como:

$$\rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left\{ \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right\} \right). \quad (3.4.3)$$

Para o caso em que temos um escoamento incompressível, ou seja, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, e com viscosidade constante, as equações de Navier-Stokes ficam:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v}.$$

Podemos escrevê-la em termos da sua viscosidade cinemática $\nu = \mu/\rho$, como

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v}. \quad (3.4.4)$$

Podemos escrever o significado de cada termo na equação de Navier-Stokes da seguinte forma [14]:

$$\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\text{Termo de Aceleração}} = \underbrace{\vec{f}}_{\text{Termo de Força Externa (ex:gravitacional)}} - \underbrace{\frac{\nabla p}{\rho}}_{\text{Termo Gradiente de Pressão}} + \underbrace{\nu \nabla^2 \vec{v}}_{\text{Termo de Atrito}}.$$

Na forma indicial, temos

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = \rho f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}. \quad (3.4.5)$$

Esta equação pode ser expressa tanto em coordenadas cartesianas como em coordenadas esféricas e cilíndricas (ver apêndice E). As equações de Navier-Stokes descrevem os escoamento de fluidos reais.

3.4.2 Equação de Euler

A equação de Euler é um caso simplificado das equações de Navier-Stokes, onde considera-se que os termos viscosos são muito pequenos, considerados desprezíveis ($\mu = 0$), ou seja, um fluido perfeito. Partindo da equação (3.3.4) a consideração $\mu = 0$, a equação de Navier-Sokes fica:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{\nabla P}{\rho}. \quad (3.4.6)$$

Esta equação foi inicialmente derivada por Euler, e é denominada equação de Euler para fluidos perfeitos.

Escrita na sua forma indicial:

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i}. \quad (3.4.7)$$

3.4.3 Equação de Bernoulli

A Equação de Bernoulli é uma derivação da equação de Euler. Trata-se também de um fluido perfeito, porém, supomos que este fluido esteja sob o regime dos escoamentos irrotacional ($\vec{\omega} = \vec{0}$) e estacionário.

Utilizando a seguinte propriedade:

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \vec{v} \times \vec{\omega}, \quad (3.4.8)$$

onde $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ é a vorticidade (esta será apresentada posteriormente na secção 3.5). Substituindo (3.4.8) na equação de Euler (3.4.6), obtemos:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = \vec{f} - \frac{\nabla P}{\rho}. \quad (3.4.9)$$

Para um escoamento estacionário, temos a seguinte condição

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0.$$

Logo, da equação (3.4.9), temos

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 = \vec{f} - \frac{\nabla P}{\rho}.$$

Podemos escrever a força por unidade de massa \vec{f} , como o gradiente do potencial, $\vec{f} = -\nabla\phi$. Em que ϕ é o potencial por unidade de massa. Logo, temos

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 = -\nabla\phi - \frac{\nabla P}{\rho}$$

Agrupando todos os termos dentro do gradiente:

$$\nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{P}{\rho} + \phi \right) = 0.$$

Para que este gradiente seja nulo, os termos devem ser constantes. Assim, obtemos a equação de Bernoulli:

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{P}{\rho} + \phi = \text{constante},$$

Se considerarmos ϕ como o potencial gravitacional por unidade de massa, ou seja, $\phi = gz$. Temos

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{P}{\rho} + gz = \text{constante}.$$

3.5 Vorticidade e Circulação

3.5.1 Vorticidade

O escoamento também pode ser expresso pela variação da velocidade angular das partículas de fluido. Alguns fenômenos são mais fáceis de serem estudados através da rotação do fluido. Sendo assim é introduzido o conceito de vorticidade. A vorticidade é definida como o rotacional da velocidade [9]

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}. \quad (3.5.1)$$

Na sua forma indicial

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}, \quad (3.5.2)$$

em que ε_{ijk} o tensor de Levi-Cevita.

3.5.2 Circulação

Circulação é a medida macroscópica da rotação de um fluido. Está é definida como

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}. \quad (3.5.3)$$

Utilizando o Teorema de Stokes

$$\left(\oint \vec{b} \cdot d\vec{l} = \iint \nabla \times \vec{b} \cdot d\vec{A} \right),$$

podemos escrever a circulação em termos da vorticidade como

$$\Gamma = \iint_A \vec{\omega} \cdot d\vec{A}. \quad (3.5.4)$$

Tomando a derivada temporal da circulação

$$\frac{d}{dt} \Gamma = \frac{d}{dt} \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}.$$

No caso de um escoamento irrotacional, $\vec{\omega} = \vec{0}$, temos

$$\frac{d}{dt} \Gamma = \frac{d}{dt} \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (3.5.5)$$

Para este caso, a circulação é constante.

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \text{constante}. \quad (3.5.6)$$

3.6 Fluxos

3.6.1 Fluxo de Energia

A Energia pode ser escrita como uma soma das energias cinética e molecular. Logo, podemos escrever

$$E = E_c + E_i,$$

estas energias são dadas por

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_i = m \varepsilon,$$

em que m é a massa, \vec{v} é o vetor velocidade e ε é a energia interna por unidade de massa. Logo, ficamos com

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + m\varepsilon.$$

Podemos escrever a densidade de energia $e = E/V$, como

$$e = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varepsilon$$

A variação da energia no tempo é dada por

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varepsilon \right)$$

ou

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\rho v^2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho\varepsilon).$$

- Para a primeira derivada: $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\rho v^2 \right)$, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\rho v^2 \right) = \frac{1}{2}v^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t},$$

Utilizamos a equação da continuidade equação (3.1.3), a de Euler (3.4.6) (desprezando a força \vec{f}), temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\rho v^2 \right) = -\frac{1}{2}v^2 \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \vec{v} \cdot \nabla P - \rho \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}, \quad (3.6.1)$$

o termo $\vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ pode ser escrito como

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \nabla v^2. \quad (3.6.2)$$

Utilizando relação termodinâmica [15, 16]:

$$dh = Tds + (1/\rho)dP,$$

em que h , s e T são respectivamente, entalpia por unidade de massa e entropia por unidade de massa e temperatura. Assim, podemos escrever

$$\nabla P = \rho \nabla h - T \rho \nabla s. \quad (3.6.3)$$

Substituindo as equações (3.6.3) e (3.6.2) em (3.6.1), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\rho v^2 \right) = -\frac{1}{2}v^2 \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \rho \vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2}v^2 + h \right) + \rho T \vec{v} \cdot \nabla s. \quad (3.6.4)$$

- Para a segunda derivada: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)$

Podemos escrever esta derivada como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) = \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3.6.5)$$

Utilizando a relação termodinâmica[15, 16]:

$$d\varepsilon = Tds - Pdv. \quad (3.6.6)$$

em que v é volume por unidade de massa. Podemos escrever o volume por unidade de massa como

$$v = \frac{1}{\rho}.$$

Logo, a equação (3.6.6) se torna

$$d\varepsilon = Tds - Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = Tds + \frac{P}{\rho^2}d\rho. \quad (3.6.7)$$

Introduzindo a entalpia por unidade de massa h , temos:

$$h = \varepsilon + \frac{P}{\rho} = \varepsilon + Pv. \quad (3.6.8)$$

Substituindo as equações (3.6.8) e (3.6.7) em (3.6.5), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) = h \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho T \frac{\partial s}{\partial t}. \quad (3.6.9)$$

Considerando um sistema adiabático

$$\frac{ds}{dt} = 0,$$

que pode ser reescrito utilizando o operador derivada material (ver apêndice A) da seguinte forma

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla s = 0$$

ou

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla s. \quad (3.6.10)$$

E pela equação da continuidade (3.1.3), temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}). \quad (3.6.11)$$

Substituindo as equações (3.6.11) e (3.6.10) em (3.6.9), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) = -h\nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \rho T \vec{v} \cdot \nabla s. \quad (3.6.12)$$

Somando as equações (3.6.4) e (3.6.12), obtem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon \right) = -\frac{1}{2} v^2 \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \rho \vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) - h \nabla \cdot (\rho \vec{v}).$$

Simplificando,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon \right) = -\nabla \cdot \left[\rho \vec{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) \right].$$

Integrando os dois lados em um certo volume V ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon \right) dV = - \iiint_V \nabla \cdot \left[\rho \vec{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) \right] dV.$$

Aplicando o teorema da divergência:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varepsilon \right) dV = - \iint_A \left[\rho \vec{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) \right] \cdot d\vec{A}.$$

A expressão contida na integral de área:

$$\rho \vec{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + h \right), \quad (3.6.13)$$

é chamado de vetor densidade de fluxo de energia.

3.6.2 Fluxo de Momentum

Partindo da equação do momento linear

$$p_i = m v_i,$$

dividindo pelo volume e fazendo a taxa de variação temporal desta quantidade. Temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (3.6.14)$$

Podemos escrever a equação da continuidade (3.1.3) da seguinte forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j}, \quad (3.6.15)$$

e a equação de Euler (3.3.6) na seguinte forma (desprezando a força \vec{f}):

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (3.6.16)$$

Substituindo as equações (3.6.16) e (3.6.15) em (3.6.14), obtemos:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j}, \quad (3.6.17)$$

Rearranjando alguns termos, temos

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j}. \quad (3.6.18)$$

Escrevendo

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \delta_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j}. \quad (3.6.19)$$

Temos

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j}, \quad (3.6.20)$$

o tensor Π_{ij} o chamado tensor densidade de fluxo de momento que é dado por

$$\Pi_{ij} = p\delta_{ij} + \rho u_i u_j, \quad (3.6.21)$$

Este caso é válido para fluidos perfeitos, para o caso de fluidos reais o tensor densidade de fluxo de momento recebe o decréscimo do tensor das tensões viscoso,

$$\Pi_{ij} = p\delta_{ij} + \rho u_i u_j - d_{ij}, \quad (3.6.22)$$

o tensor d_{ij} também pode ser escrito como:

$$d_{ij} = T_{ij} + p\delta_{ij}, \quad (3.6.23)$$

substituindo a equação (3.6.23) na equação (3.6.22), ficamos com:

$$\Pi_{ij} = \rho u_i u_j - T_{ij}. \quad (3.6.24)$$

Capítulo 4

Hidrodinâmica Relativística

Uma descrição relativística da hidrodinâmica é necessária em situações onde a velocidade local do fluxo está perto da velocidade da luz no vácuo (c). No caso mais simples assume-se um fluido perfeito. Ultimamente tem-se estudado fluidos relativísticos com viscosidade, porém, a aproximação de fluidos perfeitos é considerada satisfatória em alguns casos.

4.1 Fluido Perfeito

Fluidos perfeitos podem ser completamente caracterizados pelas suas densidade de energia, ϵ , e pressão isotrópica, P [18]. Neste caso podemos desprezar fenômenos como: tensões de cisalhamento, viscosidade ou condução de calor. Será apresentada um breve discussão sobre fluidos relativísticos reais, porém, sem aprofundar muito no assunto, devido a dificuldade encontrada neste estudo.

4.2 Velocidade no Fluido Relativístico

A 4-velocidade u^μ de um fluido ou elemento de fluido é definida como [17, 18, 19, 20, 21]:

$$u^\mu = \gamma(1, \vec{v}), \quad (4.2.1)$$

onde $\gamma = (1 - \vec{v}^2)^{-\frac{1}{2}}$, considerando unidades naturais ($c = 1$), é o fator gama de Lorentz.

A condição de normalização é dada por:

$$u^\mu u_\mu = (u^0)^2 - \vec{u}^2 = 1. \quad (4.2.2)$$

A velocidade do fluido é uma função de (t, x, y, z) , assim como são as quantidades termodinâmicas ϵ , P e n . A velocidade do fluido, como no caso clássico, também é representada por um campo.

4.3 Leis de Conservação

No estudo da hidrodinâmica relativística algumas leis de conservação são muito importantes: a lei conservação de cargas generalizadas, a lei conservação de energia-momentum, a lei de conservação de entropia, entre outras. A seguir apresentamos estas leis.

4.3.1 Conservação de Corrente de Cargas Generalizadas

Conhecendo uma função de distribuição [18] $f(x, p)$, podemos calcular várias quantidades macroscópicas importantes. Em particular, a densidade de partículas (n^0) e a sua 3-vetor corrente de partículas (\vec{n}), dadas pelas expressões:

$$n^0(x) = \int d^3p f(x, p), \quad (4.3.1)$$

$$\vec{n}(x) = \int d^3p \frac{\vec{p}}{p^0} f(x, p), \quad (4.3.2)$$

em que \vec{p} é o vetor momento linear.

Podemos notar que a medida de integração $d^3p/p^0 = d^3p/E$ é invariante de Lorentz. Esta propriedade é vista ao realizar a transformação de Lorentz com a velocidade v , por exemplo, ao longo do eixo- x . Neste caso, aplicam-se as seguintes regras de transformação:

$$E' = \gamma(E - p_x v), \quad p'_x = \gamma(p_x - Ev),$$

$$p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z.$$

Podemos escrever:

$$d^3p' = dp'_x dp'_y dp'_z = \gamma \left(1 - \frac{p_x v}{E}\right) dp_x dp_y dp_z = \frac{E'}{E} d^3p. \quad (4.3.3)$$

Logo, concluímos que:

$$\frac{d^3p}{E} = \frac{d^3p'}{E'}. \quad (4.3.4)$$

Utilizando a equação (4.3.4) e as propriedades das transformadas de Lorentz para um volume d^3x , podemos verificar que o volume do espaço em fase $d^3p d^3x$ é invariante de Lorentz. Então temos que a função distribuição no espaço de fase $f(x, p)$ é um escalar de Lorentz. Com essas propriedades podemos então escrever um 4-vetor corrente de cargas generalizadas (j^μ), dado por:

$$j^\mu = (n^0(x), \vec{n}(x)) = \int \frac{d^3p}{p^0} p^\mu f(x, p). \quad (4.3.5)$$

Que também pode ser escrita como:

$$j^\mu = n u^\mu \quad (4.3.6)$$

A partir disto, podemos fazer um análogo à lei de conservação de massa da hidrodinâmica clássica equação (3.1.3), e assim podemos chegar à lei de conservação de cargas generalizadas. Relembrando a equação (3.1.3):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Podemos escrever $\vec{u} = \gamma \vec{v}$ e $u^0 = \gamma$, e substituímos a densidade ρ por nu^0 , temos:

$$\partial_0(nu^0) + \nabla \cdot \left(nu^0 \frac{\vec{u}}{u^0} \right) = 0,$$

$$\partial_0(nu^0) - \partial_1(nu^1) - \partial_2(nu^2) - \partial_3(nu^3) = 0.$$

Colocando os termos espaciais juntos temos:

$$\partial_0(nu^0) - \partial_j(nu^j) = 0.$$

Juntando os termos espaciais e temporal chegamos a expressão:

$$\partial_\mu(nu^\mu) = 0.$$

Logo, a lei de conservação de corrente de cargas generalizadas é dada pela expressão:

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{4.3.7}$$

Esta lei de conservação é válida para número bariônico, entre outras cargas conservadas.

4.3.2 Conservação de Energia-Momentum

Podemos escrever, de forma similar ao de j^μ , um tensor energia-momentum ($T^{\mu\nu}$). A forma deste tensor varia com as propriedades dos fluidos. Sua forma explicita para fluidos perfeitos e reais será demonstrada posteriormente na secção (4.4). Podemos escrever então:

$$T^{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^3 p}{p^0} p^\mu p^\nu f(x, p),$$

Assim como no caso da conservação de cargas generalizadas a lei de conservação de energia-momentum é dada por:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{4.3.8}$$

Esta demonstração está presente no apêndice F.

4.3.3 Conservação de Entropia

De modo análogo à lei de conservação de cargas generalizadas e à lei de conservação de energia-momentum, temos uma lei de conservação de entropia, que é dada pela seguinte expressão:

$$\partial_\mu (su^\mu) = 0$$

em que s é a densidade de entropia. Logo podemos escrever $S^\mu = su^\mu$. Então temos

$$\partial_\mu S^\mu = 0, \quad (4.3.9)$$

em que S^μ é a corrente de densidade de entropia. Esta demonstração está presente no apêndice G.

4.4 Tensor Energia-Momentum

O tensor energia-momentum de um sistema descreve a densidade e o fluxo de energia e momentum no espaço-tempo. De acordo com as equações de conservação (4.3.7) e (4.3.8)

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0,$$

cada valor de ν corresponde a um componente do 4-momentum e cada valor de μ é um componente da 4-corrente associada [21, 30], sendo uma equação para a conservação de energia, três equações para o 3-momentum e N equações para as cargas generalizadas.

Podemos escrever de modo mais específico:

1. T^{00} é a densidade de energia;
2. T^{0j} é a densidade da j -ésima componente do momentum, em que $j = 1, 2, 3$;
3. T^{i0} é o fluxo de energia ao longo do eixo i ; e
4. T^{ij} é o fluxo ao longo do eixo i do j -ésima componente do momentum;

Assim, existem $4 + N$ equações para $10 + N$ variáveis independentes, onde temos 10 componentes independentes para o tensor energia-momentum e 4 componentes independentes da 4-corrente, para N cargas generalizadas. Vemos que o sistema de equações da hidrodinâmica é um sistema que não é fechado e, a princípio, não pode ser resolvido por completo. Logo, é necessário de hipóteses adicionais [17, 18, 20, 21]. Neste trabalho será utilizada apenas a simplificação de fluido perfeito e como dito anteriormente uma breve discussão sobre fluidos reais.

4.4.1 Fluidos Perfeitos

Podemos descrever um tensor de energia-momentum para um fluido perfeito relativístico. No referencial de repouso não temos fluxo de energia, nem densidade de momentum. Então podemos escrever o tensor energia-momentum num referencial de repouso apenas com sua diagonal principal, em que os valores são descritos por:

$$\epsilon = T^{00}, \quad (4.4.1)$$

e

$$P = \frac{1}{3} \sum_i T^{ii}, \quad (4.4.2)$$

em que ϵ é a densidade de energia local e P é a pressão local.

Então podemos escrever o tensor energia-momentum na sua forma matricial no referencial de repouso ($T_{(0)}^{\mu\nu}$) como:

$$\left(T_{(0)}^{\mu\nu} \right) = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (4.4.3)$$

A componente da força sobre um elemento de área dA é dada por $T^{ij} dA_j$. No referencial de repouso podemos escrever $T^{ij} dA_j = P \delta^{ij} dA_j = P dA^i$.

Podemos escrever o tensor energia-momentum em um referencial qualquer, aplicando uma transformação de Lorentz

$$T^{\mu\nu} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} T_{(0)}^{\alpha\beta}, \quad (4.4.4)$$

em que Λ é a matriz de transformação de Lorentz.

A 4-velocidade do fluido também pode ser escrita através destas matrizes de transformação de Lorentz como

$$u^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} u_{(0)}^{\nu}.$$

Logo, podemos escrever esta equação em termos das suas componentes espaciais e temporais

$$u^{\mu} = \Lambda_0^{\mu} u^0 + \Lambda_i^{\mu} u^i = \Lambda_0^{\mu}. \quad (4.4.5)$$

Podemos também, fazer esta transformação no tensor métrico, que no espaço de Minkowski[22] ele é dado por:

$$(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando a transformação, temos:

$$g^{\mu\nu} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} g_{(0)}^{\alpha\beta}, \quad (4.4.6)$$

Abrindo as componentes espaciais e temporais

$$g^{\mu\nu} = \Lambda_0^{\mu} \Lambda_0^{\nu} g_{(0)}^{00} + \Lambda_i^{\mu} \Lambda_j^{\nu} g_{(0)}^{ij},$$

temos

$$g^{\mu\nu} = \Lambda_0^{\mu} \Lambda_0^{\nu} - \Lambda_i^{\mu} \Lambda_j^{\nu} \delta^{ij}.$$

Temos então

$$\Lambda_i^{\mu} \Lambda_j^{\nu} \delta^{ij} = \Lambda_0^{\mu} \Lambda_0^{\nu} - g^{\mu\nu}. \quad (4.4.7)$$

Por fim, abrindo a equação (4.4.4) em componentes espaciais e temporais,

$$T^{\mu\nu} = \Lambda_0^{\mu} \Lambda_0^{\nu} T_{(0)}^{00} + \Lambda_i^{\mu} \Lambda_j^{\nu} T_{(0)}^{ij},$$

e utilizando (4.4.1) e (4.4.5), temos que:

$$T^{\mu\nu} = u^{\mu} u^{\nu} \epsilon + \Lambda_i^{\mu} \Lambda_j^{\nu} T_{(0)}^{ij}.$$

Sabendo que $T^{ij} = P \delta^{ij}$, então

$$T^{\mu\nu} = u^{\mu} u^{\nu} \epsilon + \Lambda_i^{\mu} \Lambda_j^{\nu} \delta^{ij} P.$$

Usando a equação (4.4.7) e (4.4.5), obtemos

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P) u^{\mu} u^{\nu} - g^{\mu\nu} P. \quad (4.4.8)$$

Este é o tensor energia-momentum para fluidos perfeitos relativísticos.

4.4.2 Fluidos Reais

O caso de fluidos relativísticos reais é considerado importante para casos onde a viscosidade não pode ser considerada desprezível. Este é objeto de frequente pesquisa atualmente. Se para o caso de fluidos perfeitos já é encontrada uma certa dificuldade, para o caso de fluidos reais, este estudo é bem mais complexo. Já existem programas com métodos numéricos para a resolução deste problema. Porém, esta é só uma breve introdução ao assunto devido ao fato deste trabalho ser baseado em fluidos relativísticos perfeitos.

Para o caso de fluidos reais o tensor de energia-momentum é dado da seguinte forma:

$$T^{\mu\nu} = \epsilon u^\mu u^\nu - (P + \Pi) \Delta^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu}, \quad (4.4.9)$$

e a corrente de cargas generalizada é dada pela expressão

$$j^\mu = nu^\mu + V^\mu, \quad (4.4.10)$$

em que Π é a viscosidade volumétrica, $\pi^{\mu\nu}$ é o tensor viscosidade de cisalhamento, V^μ são as correntes de difusão de cargas e o projetor espacial é $\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu$.

Estas viscosidades podem ser escritas para o análogo a Navier-Stokes.

$$\Pi_{NS} = -\xi \partial_{;\lambda} u^\lambda, \quad (4.4.11)$$

$$\pi_{NS}^{\mu\nu} = \zeta (\Delta^{\mu\lambda} \partial_{;\lambda} u^\nu + \Delta^{\nu\lambda} \partial_{;\lambda} u^\mu) - \frac{2}{3} \zeta \Delta^{\mu\nu} \partial_{;\lambda} u^\lambda \quad (4.4.12)$$

Estes valores ξ e ζ são, respectivamente, os coeficientes de viscosidade volumétrica e viscosidade de cisalhamento. Porém, estas equações violam o princípio da causalidade e portanto, ainda são feitas correções para conseguir implementar a viscosidade na hidrodinâmica relativística. Como podemos ver, pela complexibilidade do assunto, este trabalho seguirá apenas para fluidos perfeitos. Um estudo mais detalhado poderá ser abordado em uma futura pós-graduação.

Para mais informações consultar as referências [23, 24, 25].

4.5 Equações de Movimento

Para o estudo da hidrodinâmica relativística, assim como na hidrodinâmica clássica, precisamos de equações de movimento. Para descrever o movimento do fluido, para o caso relativístico, temos o análogo à equação de Euler e de Bernoulli, porém no caso de Navier-Stokes, temos problemas na causalidade. A solução deste problema vem sido muito estudada ultimamente, quando aplicamos a viscosidade ao tensor de energia-momentum, e são necessárias correções para que cheguemos a uma equação análoga a Navier-Stokes.

4.5.1 Equação de Euler Relativística

Para derivarmos a equação de Euler, assim como no caso clássico, consideramos um fluido perfeito. O tensor de energia-momentum para fluidos perfeitos é dado pela equação (4.4.8):

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} P.$$

Utilizando a lei de conservação de energia-momentum, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, temos:

$$\partial_\mu [(\epsilon + P)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} P] = 0$$

$$\partial_\mu [(\epsilon + P)u^\mu u^\nu] - g^{\mu\nu} \partial_\mu P = 0$$

$$(\epsilon + P)u^\mu \partial_\mu u^\nu + u^\nu \partial_\mu [(\epsilon + P)u^\mu] - g^{\mu\nu} \partial_\mu P = 0.$$

Passando o índice ν para baixo, temos:

$$(\epsilon + P)u^\mu \partial_\mu u_\nu + u_\nu \partial_\mu [(\epsilon + P)u^\mu] - g_\nu^\mu \partial_\mu P = 0.$$

Ficamos, então, com

$$(\epsilon + P)u^\mu \partial_\mu u_\nu + u_\nu \partial_\mu [(\epsilon + P)u^\mu] - \partial_\nu P = 0.$$

Podemos rearranjar esta equação da seguinte forma:

$$(\epsilon + P)u^\mu \partial_\mu u_\nu = \partial_\nu P - u_\nu \partial_\mu [(\epsilon + P)u^\mu],$$

Abrindo a derivada do lado direito da equação, temos:

$$(\epsilon + P)u^\mu \partial_\mu u_\nu = \partial_\nu P - u_\nu u^\mu \partial_\mu (\epsilon + P) - u_\nu (\epsilon + P) \partial_\mu u^\mu$$

$$(\epsilon + P)u^\mu \partial_\mu u_\nu = \partial_\nu P - u_\nu u^\mu \partial_\mu \epsilon - u_\nu u^\mu \partial_\mu P - u_\nu (\epsilon + P) \partial_\mu u^\mu.$$

Logo, chegamos a expressão:

$$(\epsilon + P)u^\mu \partial_\mu u_\nu = \partial_\nu P - u_\nu u^\mu \partial_\mu P - u_\nu [u^\mu \partial_\mu \epsilon + (\epsilon + P) \partial_\mu u^\mu]. \quad (4.5.1)$$

Agora, utilizando novamente a lei de conservação de energia-momentum:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0,$$

e contraindo com u_ν , obtemos que:

$$u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0,$$

Então,

$$u_\nu \partial_\mu [(\epsilon + P)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} P] = 0$$

$$u_\nu \partial_\mu [(\epsilon + P)u^\mu u^\nu] - u_\nu g^{\mu\nu} \partial_\mu P = 0$$

$$u_\nu \partial_\mu [(\epsilon + P)u^\mu u^\nu] - u^\mu \partial_\mu P = 0$$

$$(\epsilon + P) \underbrace{u^\nu u_\nu}_{=1} \partial_\mu u^\mu + u_\nu u^\mu \partial_\mu [(\epsilon + P)u^\nu] - u^\mu \partial_\mu P = 0$$

$$(\epsilon + P) \partial_\mu u^\mu + \underbrace{u^\nu u_\nu}_{=1} u^\mu \partial_\mu (\epsilon + P) + (\epsilon + P) u_\nu u^\mu \partial_\mu u^\nu - u^\mu \partial_\mu P = 0$$

Só que $u_\nu \partial_\mu u^\nu = \frac{1}{2} \partial_\mu (u_\nu u^\nu) = 0$. Então

$$(\epsilon + P) \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu \epsilon + u^\mu \partial_\mu P - u^\mu \partial_\mu P = 0.$$

Desta expressão obtemos que:

$$(\epsilon + P) \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu \epsilon = 0. \quad (4.5.2)$$

Substituindo (4.5.2) em (4.5.1), ficamos com:

$$(\epsilon + P) u^\mu \partial_\mu u_\nu = \partial_\nu P - u_\nu u^\mu \partial_\mu P \quad (4.5.3)$$

- Abrindo esta equação em termos das coordenadas espaciais temos, $\nu = i$:

$$(\epsilon + P) u^\mu \partial_\mu u_i = \partial_i P - u_i u^\mu \partial_\mu P$$

Elevando os índices i , ficamos com:

$$-(\epsilon + P) u^\mu \partial_\mu u^i = \partial_i P + u^i u^\mu \partial_\mu P$$

Sabendo que $u^i = u^0 v^i$, temos, então, para as coordenadas espaciais:

$$-(\epsilon + P) u^\mu \partial_\mu (u^0 v^i) = \partial_i P + u^0 v^i u^\mu \partial_\mu P \quad (4.5.4)$$

- Em termos da coordenada temporal, temos, $\nu = 0$:

$$(\epsilon + P)u^\mu \partial_\mu u_0 = \partial_0 P - u_0 u^\mu \partial_\mu P$$

Elevando os índices 0, ficamos com:

$$(\epsilon + P)u^\mu \partial_\mu u^0 = \partial_0 P - u^0 u^\mu \partial_\mu P \quad (4.5.5)$$

Utilizando (4.5.4) e (4.5.5), temos:

$$\begin{aligned} -(\epsilon + P)u^\mu \partial_\mu (u^0 v^i) &= \partial_i P + u^0 v^i u^\mu \partial_\mu P \\ -(\epsilon + P)u^\mu v^i \partial_\mu u^0 - (\epsilon + P)u^\mu u^0 \partial_\mu v^i &= \partial_i P + u^0 v^i u^\mu \partial_\mu P \\ -v^i (\partial_0 P - u^0 u^\mu \partial_\mu P) - (\epsilon + P)u^\mu \partial_\mu v^i &= \partial_i P + u^0 v^i u^\mu \partial_\mu P \\ -v^i \partial_0 P + v^i u^0 u^\mu \partial_\mu P - (\epsilon + P)u^\mu \partial_\mu v^i &= \partial_i P + u^0 v^i u^\mu \partial_\mu P \\ -v^i \partial_0 P - (\epsilon + P)u^\mu \partial_\mu v^i &= \partial_i P \\ u^\mu \partial_\mu v^i &= -\frac{1}{(\epsilon + P)} (\partial_i P + v^i \partial_0 P). \end{aligned}$$

Expandindo a soma em μ , temos:

$$u^0 u^0 \partial_0 v^i + u^j u^0 \partial_j v^i = -\frac{1}{(\epsilon + P)} (\partial_i P + v^i \partial_0 P).$$

Sendo $u^j = u^0 v^j$, ficamos com:

$$\begin{aligned} u^0 u^0 \partial_0 v^i + v^j u^0 u^0 \partial_j v^i &= -\frac{1}{(\epsilon + P)} (\partial_i P + v^i \partial_0 P) \\ (\partial_0 v^i + v^j \partial_j v^i) &= -\frac{1}{(\epsilon + P)u^0 u^0} (\partial_i P + v^i \partial_0 P), \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

Como, $u^0 = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, podemos reescrever esta equação da forma:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{(1-v^2)}{(\epsilon + P)} \left(\nabla P + \vec{v} \frac{\partial P}{\partial t} \right).$$

E esta é a equação de Euler relativística.

4.5.2 Equação de Bernoulli Relativística

Assim como no caso de Euler, temos o análogo à equação de Bernoulli para fluidos relativísticos. Para chegar a esta expressão, devemos fazer algumas considerações a respeito da termodinâmica envolvida.

A partir da relação termodinâmica

$$dw = Tds + dP,$$

onde $w = (\epsilon + P)$ é a densidade de entalpia, T a temperatura, P a pressão e s é a densidade de entropia.

Considerando que a densidade de entropia é constante, ou seja, $s = \text{constante}$, temos

$$dw = dP.$$

Podemos escrever

$$\partial_\nu w = \partial_\nu P. \quad (4.5.7)$$

Partindo da equação (4.5.3), temos:

$$(\epsilon + P)u^\mu \partial_\mu u_\nu + u_\nu u^\mu \partial_\mu P = \partial_\nu P, \quad (4.5.8)$$

Podemos escrever:

$$u^\mu \partial_\mu [(\epsilon + P) u_\nu] = (\epsilon + P)u^\mu \partial_\mu u_\nu + u_\nu u^\mu \partial_\mu P \quad (4.5.9)$$

Comparando as equações (4.5.9) e (4.5.8), obtemos:

$$u^\mu \partial_\mu [(\epsilon + P) u_\nu] = \partial_\nu P.$$

Utilizando (4.5.7) e a definição de entalpia específica, temos

$$u^\mu \partial_\mu [(\epsilon + P) u_\nu] = \partial_\nu (\epsilon + P). \quad (4.5.10)$$

Abrindo equação (4.5.10) em componentes espaciais e temporais, temos:

$$u^0 \partial_0 [(\epsilon + P) u_\nu] + u^0 v^i \partial_i [(\epsilon + P) u_\nu] - \partial_\nu (\epsilon + P) = 0.$$

Sabendo que $u_\nu = -\gamma v^j$ e $u^0 = \gamma$, temos

$$\gamma \partial_0 [\gamma (\epsilon + P) v^j] + \gamma v^i \partial_i [\gamma (\epsilon + P) v^j] + \partial_\nu (\epsilon + P) = 0,$$

que pode ainda ser escrita como:

$$\gamma \frac{\partial}{\partial t} [\gamma (\epsilon + P) \vec{v}] + \gamma (\vec{v} \cdot \nabla) [\gamma (\epsilon + P) \vec{v}] + \nabla (\epsilon + P) = 0. \quad (4.5.11)$$

Utilizando a propriedade vetorial

$$\vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) = \nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b},$$

podemos escrever o segundo termo da equação (4.5.11) da seguinte forma:

$$\gamma (\vec{v} \cdot \nabla) [\gamma (\epsilon + P) \vec{v}] = \gamma \nabla((\epsilon + P) \gamma v^2) - \gamma \vec{v} \times (\nabla \times \gamma (\epsilon + P) \vec{v}). \quad (4.5.12)$$

Substituindo a equação (4.5.12) em (4.5.11), temos

$$\gamma \frac{\partial}{\partial t} [\gamma (\epsilon + P) \vec{v}] + \gamma \nabla((\epsilon + P) \gamma v^2) + \nabla(\epsilon + P) = \gamma \vec{v} \times (\nabla \times \gamma (\epsilon + P) \vec{v}). \quad (4.5.13)$$

Pela regra do produto o segundo termo da equação (4.5.13), é dado por:

$$\gamma \nabla((\epsilon + P) \gamma v^2) = \gamma^2 v^2 \nabla(\epsilon + P) + \gamma (\epsilon + P) \nabla(\gamma v^2).$$

Então, temos

$$\gamma \frac{\partial}{\partial t} [\gamma (\epsilon + P) \vec{v}] + \gamma^2 v^2 \nabla(\epsilon + P) + \gamma (\epsilon + P) \nabla(\gamma v^2) + \nabla(\epsilon + P) = \gamma \vec{v} \times (\nabla \times \gamma (\epsilon + P) \vec{v}). \quad (4.5.14)$$

Só que $\gamma^2 v^2 = \gamma^2 - 1$, logo

$$\gamma^2 v^2 \nabla(\epsilon + P) + \nabla(\epsilon + P) = \gamma^2 \nabla(\epsilon + P),$$

então, a expressão (4.5.14) é dada por

$$\gamma \frac{\partial}{\partial t} [\gamma (\epsilon + P) \vec{v}] + \gamma^2 \nabla(\epsilon + P) + \gamma (\epsilon + P) \nabla(\gamma v^2) = \gamma \vec{v} \times (\nabla \times \gamma (\epsilon + P) \vec{v}). \quad (4.5.15)$$

O segundo termo da equação (4.5.15) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\gamma^2 \nabla(\epsilon + P) = \gamma \nabla(\gamma (\epsilon + P)) - \gamma (\epsilon + P) \nabla \gamma = \gamma \nabla(\gamma (\epsilon + P)) - \frac{1}{2} (\epsilon + P) \nabla \gamma^2. \quad (4.5.16)$$

Substituindo a equação (4.5.16) em (4.5.15), temos

$$\gamma \frac{\partial}{\partial t} [\gamma (\epsilon + P) \vec{v}] + \gamma \nabla(\gamma (\epsilon + P)) - \frac{1}{2} (\epsilon + P) \nabla \gamma^2 + \gamma (\epsilon + P) \nabla(\gamma v^2) = \gamma \vec{v} \times (\nabla \times \gamma (\epsilon + P) \vec{v}). \quad (4.5.17)$$

Podemos escrever,

$$\gamma (\epsilon + P) \nabla(\gamma v^2) = \frac{1}{2} (\epsilon + P) \nabla(\gamma^2 v^2).$$

Logo, a equação (4.5.17) pode ser escrita como:

$$\gamma \frac{\partial}{\partial t} [\gamma (\epsilon + P) \vec{v}] + \gamma \nabla[\gamma (\epsilon + P)] - \frac{1}{2} (\epsilon + P) \nabla \left(\underbrace{\gamma^2 v^2 - \gamma^2}_{-1} \right) = \gamma \vec{v} \times (\nabla \times \gamma (\epsilon + P) \vec{v}).$$

Por fim, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} [\gamma (\epsilon + P) \vec{v}] + \nabla[\gamma (\epsilon + P)] = \vec{v} \times (\nabla \times \gamma (\epsilon + P) \vec{v}).$$

Considerando um escoamento estacionário e também que as quantidades ϵ e P independem do tempo, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} [\gamma (\epsilon + P) \vec{v}] = 0.$$

Logo,

$$\nabla [\gamma (\epsilon + P)] = \vec{v} \times (\nabla \times \gamma (\epsilon + P) \vec{v}).$$

Multiplicando por \vec{v} , obtemos a condição:

$$\vec{v} \cdot \nabla [\gamma (\epsilon + P)] = \vec{v} \cdot [\vec{v} \times (\nabla \times \gamma (\epsilon + P) \vec{v})] = 0.$$

Para que esta expressão seja válida, temos que

$$\gamma (\epsilon + P) = \text{constante}. \quad (4.5.18)$$

Esta é a equação de Bernoulli relativística.

4.6 Comparando os Casos, Clássico e Relativístico

| Hidrodinâmica Clássica | Hidrodinâmica Relativística |
|---|--|
| Lei de Conservação de Massa $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ | Lei de Conservação de Cargas Generalizadas $\partial_\mu j^\mu = 0$ |
| Tensor das Tensões (fluidos perfeitos) $T_{ij} = -P \delta_{ij}$ | Tensor de Energia-momentum (fluidos perfeitos) $T^{\mu\nu} = (\epsilon + P) u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} P$ |
| Tensor das Tensões (fluidos reais) $T_{ij} = -P \delta_{ij} + \tau_{ij} + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$ | Tensor de Energia-momentum (fluidos reais) $T^{\mu\nu} = \epsilon u^\mu u^\nu - (P + \Pi) \Delta^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu}$ |
| Equação de Euler $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p$ | Equação de Euler $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{(1-v^2)}{(\epsilon+P)} (\nabla P + \vec{v} \frac{\partial P}{\partial t})$ |
| Equação de Bernoulli $\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} - U = \text{constante}$ | Equação de Bernoulli $\gamma (\epsilon + P) = \text{constante}$ |
| Equação de Navier-Stokes $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v}$ | Equação de Navier-Stokes Ainda não foi estudada |

Capítulo 5

Aplicação em Colisão Ultrarrelativísticas de Íons pesados

Uma das possíveis ferramentas para estudar o sistema complexo das colisões nucleares ultrarrelativísticas é o modelo hidrodinâmico. A aplicação deste modelo está fundamentada na hipótese de que este sistema atingirá, rapidamente, um estado de equilíbrio termodinâmico local e também no fato de que em uma colisão nuclear relativística um grande número de partículas é gerado. O uso da hidrodinâmica fornece uma boa descrição para algumas quantidades observáveis tais como distribuição de momento transversal, rapidez, entre outras.

5.1 Cromodinâmica Quântica (QCD)

A força forte é responsável pela estrutura dos núcleos atômicos. É a força de maior intensidade conhecida. Ela consegue manter os nucleons (prótons e nêutrons) ligados, apesar da forte repulsão coulombiana entre prótons. Nucleons são uma amostra de um grupo maior de férmions, os bárions, que por sua vez são contituídos de três partículas fundamentais os quarks. Além dos bárions, existe também outro grupo de partículas composta por quarks, os mésons, que são constituídos por um par quark-antiquark. Bárions e mésons são conhecidos coletivamente como hádrons.

A cromodinâmica quântica (QCD) é a teoria física que descreve as iterações fortes, ou seja, a iteração entre quarks via um campo de glúons. A iteração forte juntamente com a iteração fraca e a eletromagnética formam o chamado modelo padrão. De acordo com a QCD, abaixo de densidades de energia de $1 \text{ GeV}/\text{fm}^3$, os quarks estão sempre confinados em hádrons. Quando dois quarks são separados no espaço o potencial entre eles aumenta com a distância (em certas distâncias, quando a energia é muito grande, é possível a criação de um par quark-antiquark e assim a formação de outros hádrons). Sob certas condições de altas densidades e temperaturas (acerca de 170 MeV) é possível observar uma transição entre a matéria ordinária (composta por hádrons) para um plasma de quarks e glúons (QGP) (figura 5.1), em que quarks e glúons estão desconfinados (figura 5.2) [21, 27, 28, 30].

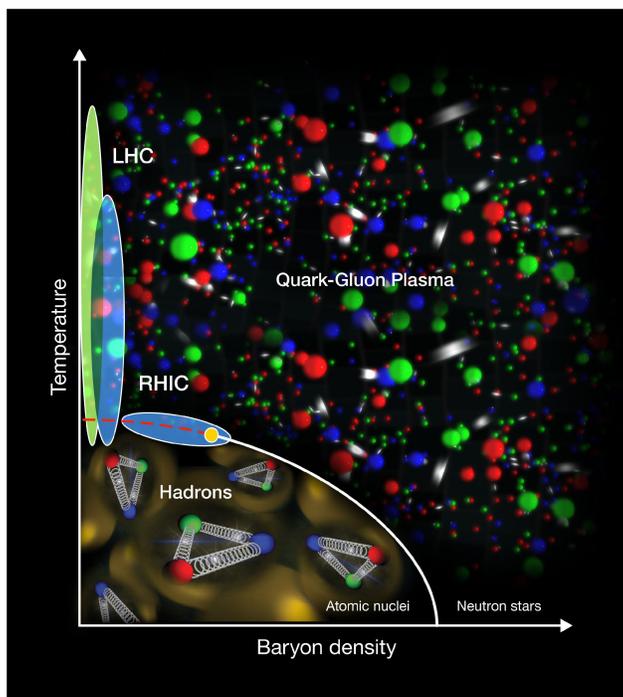


Figura 5.1 - Diagrama da temperatura versus densidade bariônica, mostrando a fase de hádrons, a fase de plasma de quarks e glúons, a transição entre elas e a área de atuação do LHC e RHIC. Imagem retirada do Brookhaven National Laboratory

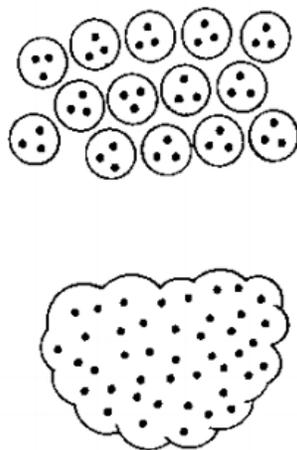


Figura 5.2 - Comparação entre uma coleção de nucleons na fase hadrônica (acima) e na descrição do QGP (abaixo).

Este plasma pode ser criado em laboratório através de colisões ultrarrelativísticas de núcleos pesados. Estas colisões vem sendo estudada frequentemente nos grandes aceleradores de partículas, destacando-se, o Large Hadrons Collider (LHC), figura (5.3), no CERN e o Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC), figura (5.4), no Broovkhaven National Laboratory.



Figura 5.3 - Imagem do acelerador LHC, imagem retirada do CERN.

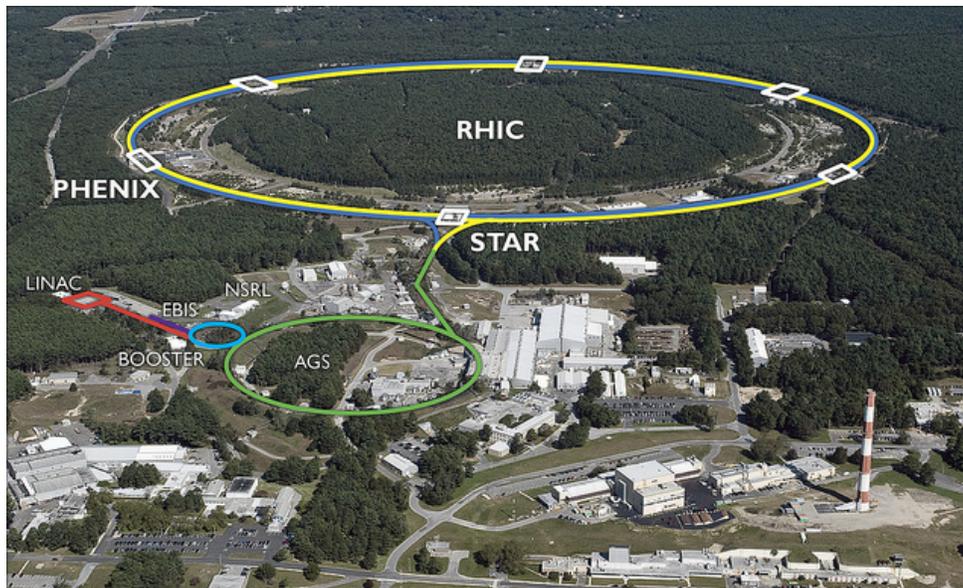


Figura 5.4 - Imagem do acelerador RHIC, imagem retirada do Brookhaven National Laboratory.

5.2 Colisões Ultrarrelativísticas de Íons Pesados

Colisões de íons pesados ultrarrelativísticos possibilitam o estudo do comportamento da matéria sob condições extremas de pressão e temperatura. Nestas condições é possível observar uma transição entre a matéria ordinária (composta por hádrons) para um plasma de quarks e glúons (QGP).

5.2.1 Participantes, Espectadores, Parâmetro de Impacto e Centralidade

Em colisões ultrarrelativísticas de íons pesados, a energia do núcleo no centro de massa é muito maior do que a massa nucleon. Em tais energias muito elevadas, conceitos geométricos simples são frequentemente utilizados. Por exemplo, existem participantes e espectadores, conforme a figura (5.5)[18]. Participantes são nucleons da região do núcleo que colide com o outro núcleo. Espectadores são nucleons da região onde não ocorre a colisão. A separação entre os centros dos núcleos é chamada de parâmetro de impacto (\vec{b}).

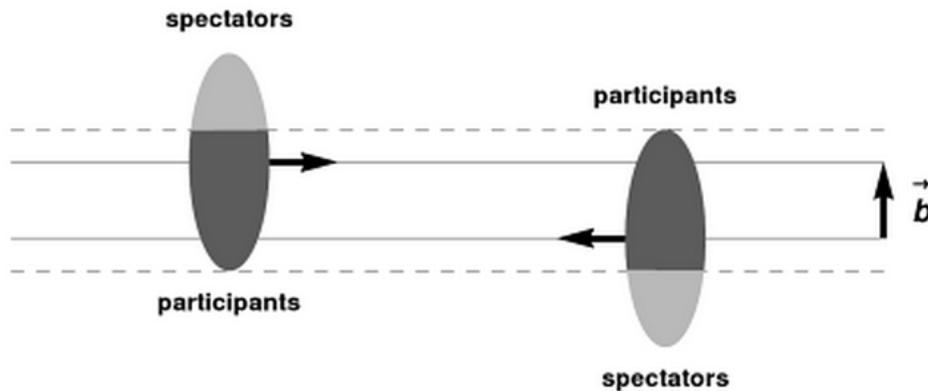


Figura 5.5 - Colisão não central de dois núcleos pesados. Espectadores na região clara e participantes na região escura. O parâmetro de impacto (\vec{b}), é mostrado na figura. Retirada da referência [18].

As classes de centralidade da colisão são definidas a partir da relação entre o número de partículas que participam da colisão e o parâmetro de impacto. Assim o número de nucleons participantes N_{part} e o número de nucleons espectadores N_{esp} dependem do parâmetro b . Em altas energias, as classes de centralidades são dados em termos de percentuais, ou seja, quanto maior o percentual, mais periférica será a colisão e quanto menor o percentual, mais central será a colisão. Sendo assim, as colisões são classificadas como centrais, semi-centrais, periféricas e semi-periféricas. Por exemplo figura (5.6), que mostra distribuição de partículas carregadas em função da pseudo-rapidez (maiores informações na seção (5.5) deste capítulo) para diversas centralidades.

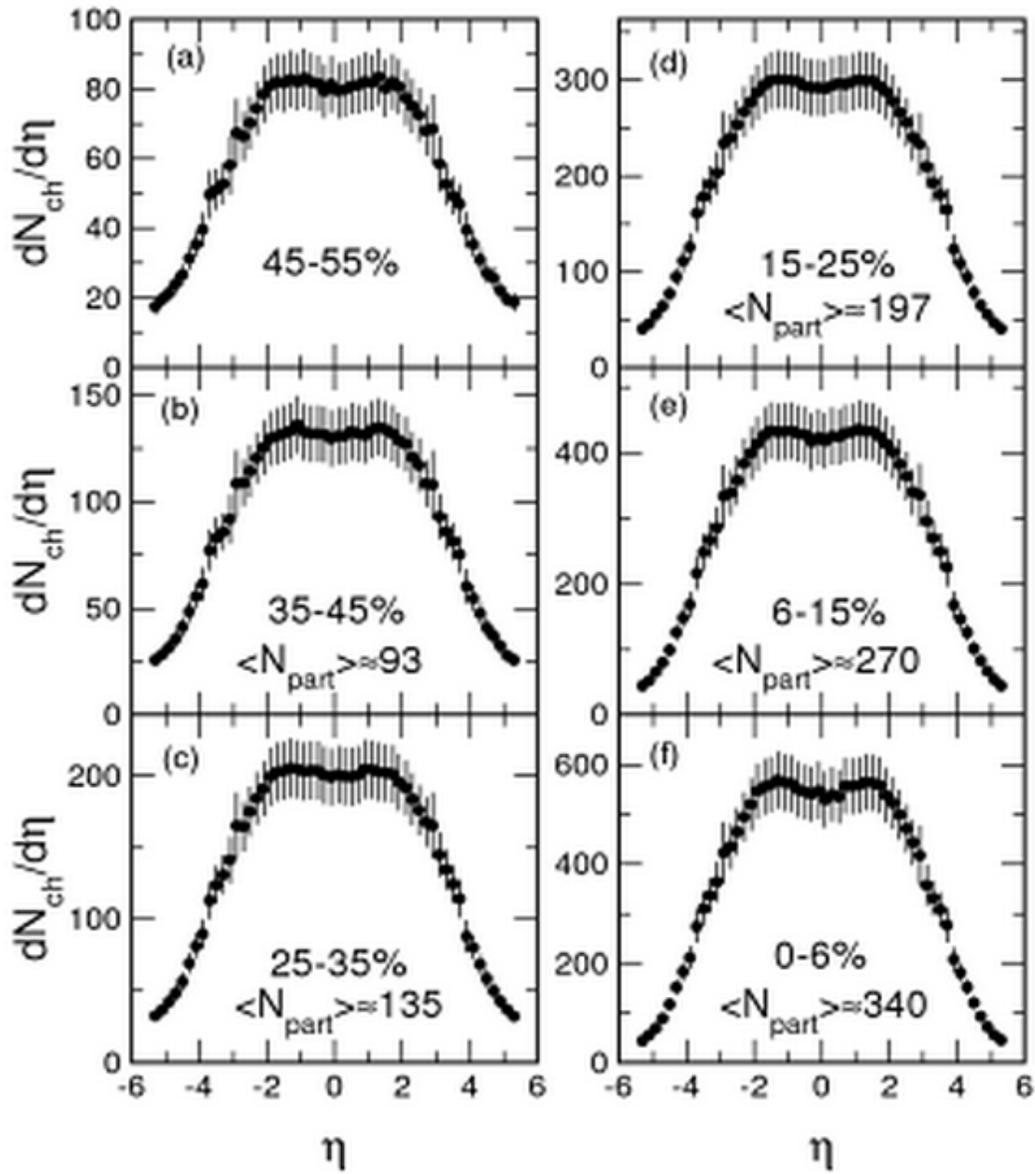


Figura 5.6 - Distribuição de partículas carregadas em função da pseudo-rapidez para várias de centralidades. Colaboração PHOBOS. Retirada da referência [18].

5.2.2 Representação Pictórica de uma Colisão de Íons Pesados Relativísticos

Podemos representar uma colisão ultrarrelativística de íons pesados, conforme a figura 5.7. Descrevemos esta colisão da seguinte forma:

- Na cena (a), os núcleos são achatados e aparentam discos finos, devido à contração de Lorentz, em $t = 0$ e $z = 0$ é o instante em que ocorre a colisão.
- Na cena (b), ocorre a colisão e o sistema entra em estado de pré-termalização até atingir seu equilíbrio e formar o QGP.
- Na cena (c), é formado o QGP e o modelo hidrodinâmico pode ser aplicado.
- Na cena (d), conforme o sistema expande e resfria-se, os quarks e glúons começam a se agrupar em hádrons novamente, temos então a fase mista, que ocorre quando temos QGP e hádrons na mesma fase
- Na cena (e) é a fase hadrônica onde já não há mais QGP, somente gás de hádrons.
- Por fim o livre caminho médio das partículas fica da ordem das dimensões do sistema, e a hipótese do equilíbrio local deixa de valer. As partículas hadrônicas enfim se desacoplam e passam a viajar livremente para o detector.

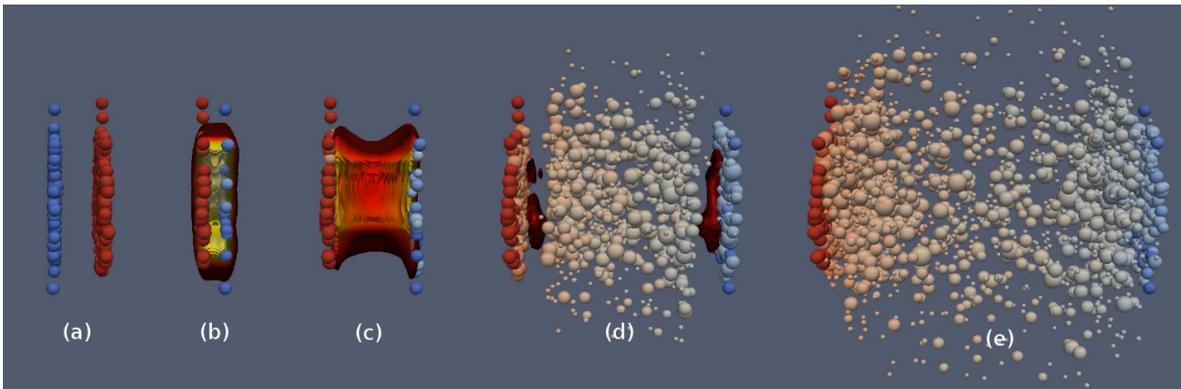


Figura 5.7 - Representação pictórica de uma colisão central.

Podemos, ainda, descrever cada cena citada acima em um diagrama espaço-tempo. Que é representado pela figura 5.8.

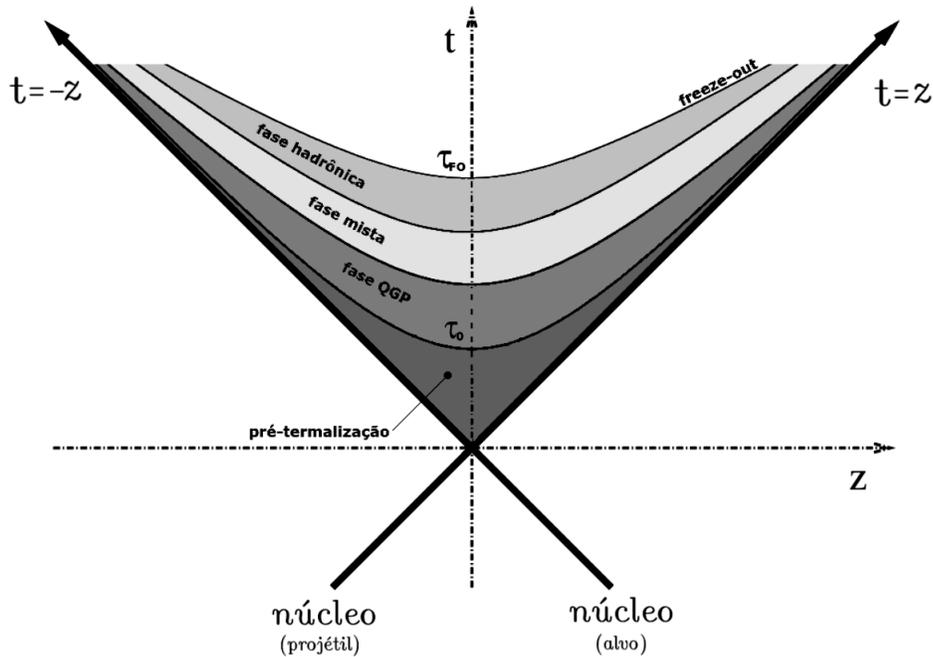


Figura 5.8 - Diagrama espaço-tempo de uma colisão central. Retirada da referência [21].

5.3 Condições Iniciais

Um dos ingredientes para resolver as equações da hidrodinâmica são as condições iniciais. As condições iniciais para as equações da hidrodinâmica são dadas pelo tensor energia-momento no referencial de laboratório, pela quadri-velocidade do fluido e pelas densidades de cargas conservadas (por exemplo, densidade de energia, densidade bariônica, densidade de estranheza, entre outros.).

As diversas condições iniciais podem ser agrupadas em dois tipos: suaves e evento-por-evento. Nas figuras (5.9) e (5.10), temos a comparação entre estes dois tipos de condições iniciais.

- Condição suave: Neste caso as densidades de energia e distribuição de velocidade correspondem a uma média estatística sobre vários eventos flutuantes. Esse processo elimina eventuais não homogeneidades nas configurações iniciais, que não são refletidas nas observáveis.
- Condição evento-por-evento: Neste caso resolve-se a hidrodinâmica e calcula-se as observáveis, para cada evento. Somente depois faz-se uma média estatística das observáveis para se comparar com os dados experimentais.

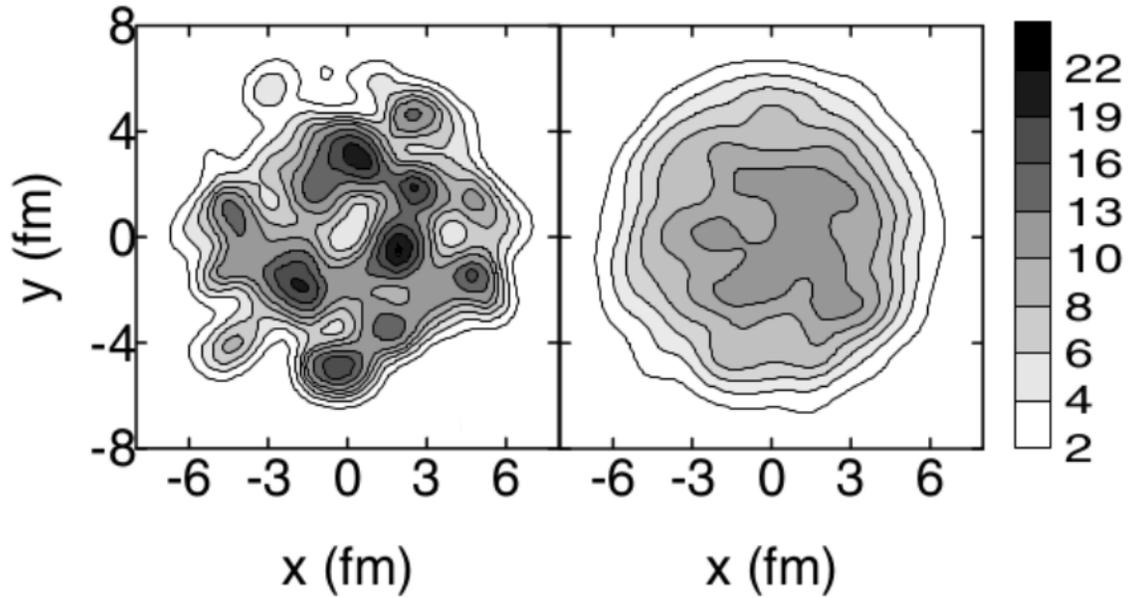


Figura 5.9 - Densidade de energia, em GeV/fm^3 , no plano de rapidez média. A esquerda, temos um único evento e a direita, uma média de 30 eventos. Retirada da referência [30].

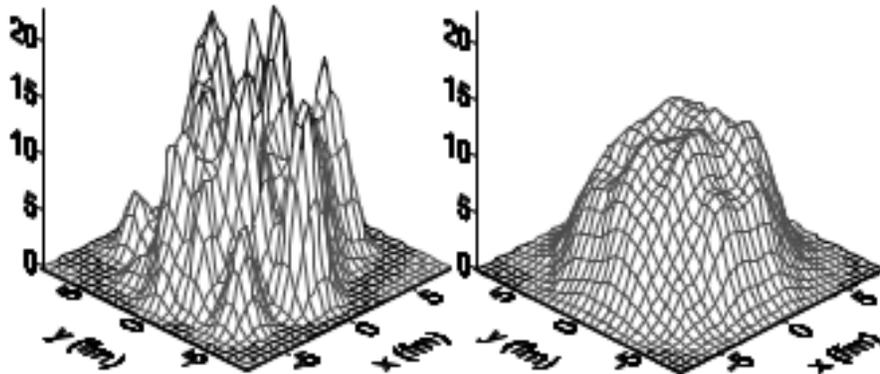


Figura 5.10 - Representação tridimensional das mesmas condições iniciais mostrada na figura 5.7, na região central de rapidez. O eixo vertical representa a densidade de energia em GeV/fm^3 .

Retirada da referência [30].

Verificou-se [30] que a inclusão de condições iniciais evento-por-evento tem sido fundamentais para explicar os resultados experimentais.

5.4 Desacoplamento

O desacoplamento ou freeze-out é a transição da matéria de um estado de equilíbrio termodinâmico com uma pressão finita, para um estado onde as partículas fluem livremente sem pressão.

Dadas as condições iniciais, a hidrodinâmica descreve a evolução temporal do sistema. Com o passar do tempo o fluido formado em uma colisão torna-se mais frio e diluído, a densidade das partículas vai diminuindo e seu livre caminho médio vai aumentando até se tornar da ordem das dimensões do sistema. Neste ponto a descrição hidrodinâmica não pode mais ser aplicada e então o sistema desacopla.

Nos anos de 1970 Cooper e Frye [31] propuseram uma aproximação para descrever esse desacoplamento baseada nas seguintes hipóteses:

- A espessura de uma hipersuperfície σ (superfície de freeze-out) é admitida infinitesimal.
- O desacoplamento das partículas que passam pela superfície é instantâneo.
- Não ocorrem interações entre partículas após o desacoplamento.

Levando-se em conta essas hipóteses e também a hipótese que define uma temperatura crítica de desacoplamento, ou temperatura de freeze-out (T_{FO}), pode-se calcular o número total de partículas atravessando um pequeno elemento de superfície de freeze-out $d\sigma$

$$dN = d\sigma_\mu j^\mu = \int \frac{d^3\vec{p}}{E} d\sigma \cdot p f_0(p, x),$$

em que j^μ é a 4-corrente de partículas, p^μ o 4-momento e f_0 uma distribuição de equilíbrio. Podemos ver que $d\sigma \cdot p f_0(p, x)$ é o espectro invariante de partículas que atravessa o elemento de superfície. Então, se integramos este termo sobre toda a superfície σ , o espectro total será:

$$E \frac{dN}{d^3\vec{p}} = \int d\sigma \cdot p f_0(p, x). \quad (5.4.1)$$

Esta que é a chamada fórmula de Cooper-Frye[31], utilizada nos códigos hidrodinâmicos. Estas informações nos permitem realizar o cálculo de observáveis e compará-los aos dados experimentais.

Podemos escrever o espectro invariante de partículas como

$$E \frac{dN}{d^3\vec{p}} = E \frac{dN}{dp_x dp_y dp_z}. \quad (5.4.2)$$

Podemos escrever $d^3\vec{p} = dp_z d^2\vec{p}_T = E p_T dy dp_T d\phi$, em que $\phi = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$ e p_T é o momento transverso. Logo da equação (5.4.2), temos

$$E \frac{dN}{d^3\vec{p}} = \frac{dN}{p_T dy dp_T d\phi}.$$

Logo, podemos separar o espectro invariante de partículas em $\left(\frac{dN}{dy}\right)$ (distribuição de rapidez), $\left(\frac{dN}{p_T dp_T}\right)$ (distribuição de momento transverso) e $\left(\frac{dN}{d\phi}\right)$ (distribuição azimutal). Em que estes são alguns observáveis das colisões.

5.5 Observáveis

Observável é uma propriedade do sistema que é medida experimentalmente. Aqui serão apresentados alguns exemplos de observáveis nas colisões ultrarrelativísticas de íons pesados, que podem ser estudados utilizando o modelo hidrodinâmico.

5.5.1 Distribuição de Momentum Transversal ou Distribuição de Massa Transversal

Distribuição de Momentum Transversal

Um dos observáveis do complexo sistema das colisões de íons pesados ultrarrelativísticos é a distribuição de momentum transversal ($\frac{1}{p_T} \frac{dN}{dp_T}$). Esta distribuição traz informação sobre o desacoplamento térmico do sistema. Isto é, quando as partículas deixam de estar em equilíbrio térmico [30]. O modelo hidrodinâmico consegue reproduzir as distribuições de momento transversal com boa acurácia. Um exemplo de distribuição de momento transversal é representado pela figura 5.11. Em que, como dito anteriormente, foi utilizado o modelo hidrodinâmico para realizar as simulações.

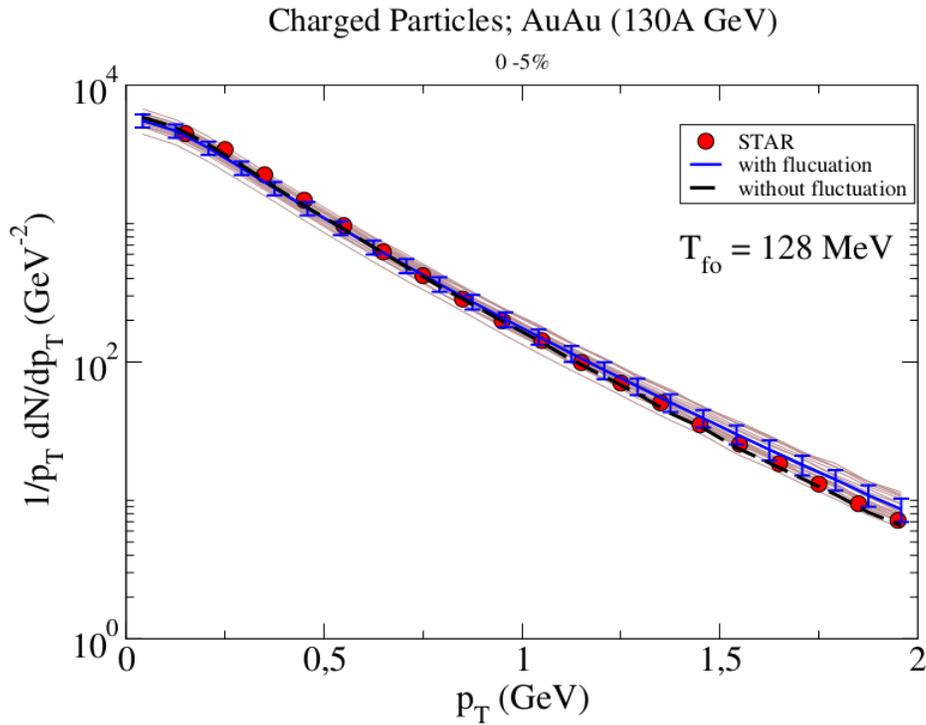


Figura 5.11 - Distribuição de momento transversal para um colisão Au+Au, com centralidade de 0-5%. Colaboração STAR. Retirada da referência [30].

Distribuição de Massa Transversal

O 4-momento de uma partícula é definido como

$$p^\mu = (p^0, \vec{p}) = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, p_x, p_y, p_z) = (E, \vec{p}).$$

Considerando o eixo- z na direção longitudinal, o vetor $\vec{p}_T \equiv (p_x, p_y)$ é o momento transversal da partícula. Podemos escrever o momento em termos das componentes transversais e longitudinais

$$p^\mu = (E, \vec{p}_T, p_z),$$

Ainda, temos que

$$p^\mu p_\mu = m_0^2,$$

em que m_0 é a massa de repouso. E esta obedece a equação $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m_0^2}$. Logo, podemos definir uma energia ou massa transversal (m_T) para a partícula:

$$m_T = \sqrt{\vec{p}_T^2 + m_0^2}.$$

Esta quantidade é análoga ao momento transversal. Logo, um dos observáveis do sistema é a distribuição de massa transversal $\left(\frac{1}{m_T} \frac{dN}{dm_T}\right)$. Um exemplo de distribuição de massa transversal é representado pela figura 5.12. neste caso, também é utilizado o modelo hidrodinâmico para realizar as simulações.

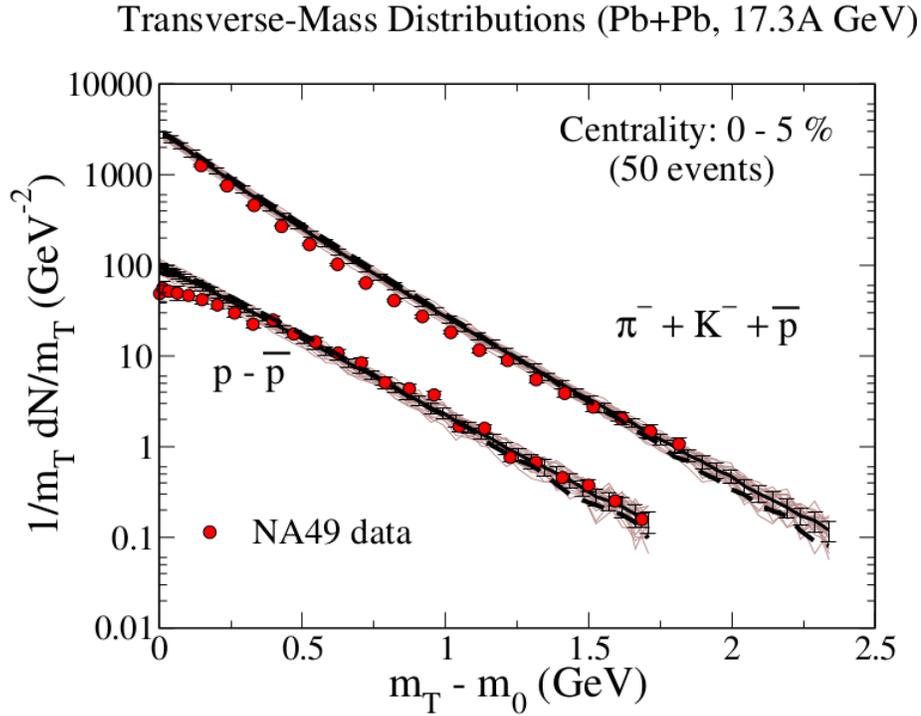


Figura 5.12 - Distribuição de massa transversal para um colisão Pb+Pb, com centralidade de 0-5%. Colaboração NA49. Retirada da referência [30].

5.5.2 Distribuição de Rapidez e Distribuição de Pseudo-Rapidez

Rapidez (y)

É uma quantidade adimensional definida por

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_z}{E - p_z} \right). \quad (5.5.1)$$

Esta pode ser tanto positiva quanto negativa. No limite clássico a rapidez de uma partícula é igual à velocidade com unidades de (c).

Para este caso um dos observáveis do sistema é a chamada distribuição de rapidez $\left(\frac{dN}{dy}\right)$, que fornece informação sobre a quantidade de energia depositada pelos nucleons participantes na região de interação. Um exemplo de distribuição de rapidez é dado pela figura 5.15. Em que são feitas simulações utilizando o modelo hidrodinâmico.

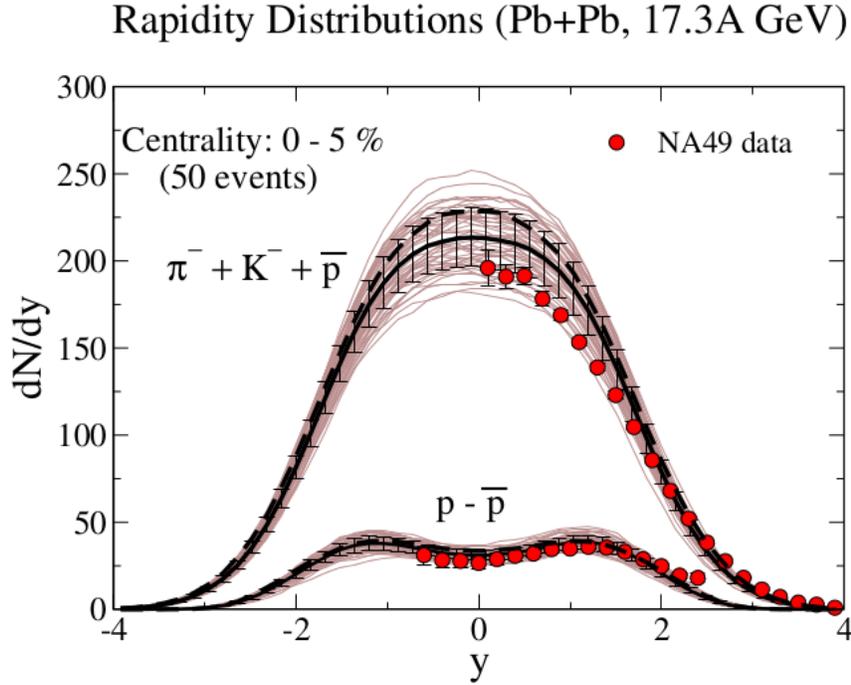


Figura 5.13 - Distribuição de rapidez para um colisão Pb+Pb, com centralidade de 0-5%. Colaboração NA49. Retirada da referência [30]

Pseudo-Rapidez (η)

Para caracterizar a rapidez é necessário medir duas quantidades, sendo elas energia e momento longitudinal. Entretanto, em muito experimentos é possível medir apenas o ângulo da partícula detectada relativo ao eixo longitudinal. Neste caso é mais conveniente a pseudo-rapidez η :

$$\eta = -\ln \left[\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right],$$

em que θ é o ângulo de espalhamento em relação ao eixo z . Em termos dos momentos a pseudo-rapidez é escrita como

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|\vec{p}| + p_z}{|\vec{p}| - p_z} \right). \quad (5.5.2)$$

No caso em que $|\vec{p}| \approx E$, temos que η coincide com y .

Assim como na rapidez, a distribuição de pseudo-rapidez $\left(\frac{dN}{d\eta} \right)$, também fornece informação sobre a quantidade de energia depositada pelos nucleons participantes na região de interação. Um exemplo de distribuição de pseudo-rapidez é mostrado na figura 5.16. Neste exemplo, as simulações também são feitas utilizando o modelo hidrodinâmico.

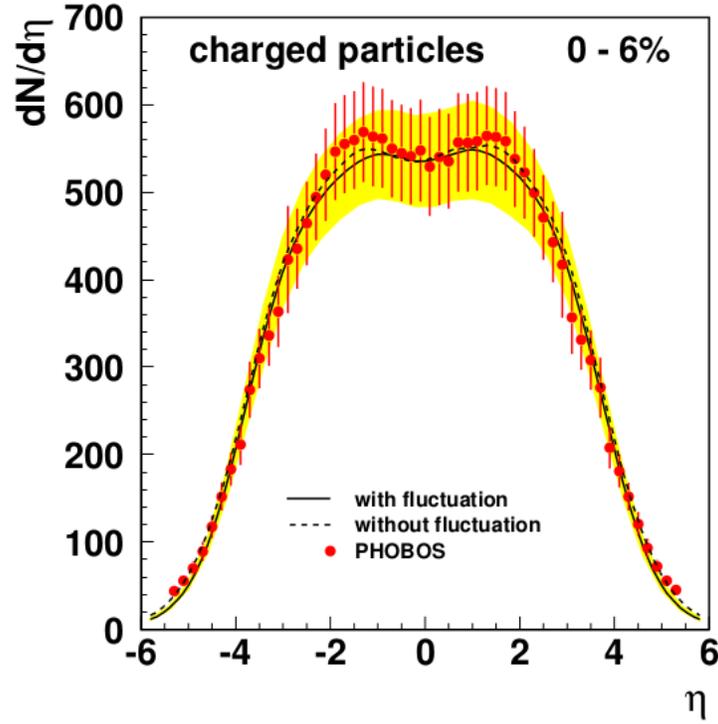


Figura 5.14 - Distribuição de pseudo-rapidez para um colisão Au+Au, com centralidade de 0-5%. Colaboração PHOBOS. Retirada da referência [30].

5.5.3 Fluxo Elíptico

Distribuição Azimutal

No caso em que o parâmetro de impacto (\vec{b}) é diferente de zero, conforme a figura (5.17), temos uma anisotropia espacial. Podemos quantificar a anisotropia no espaço de momentos, medindo-se a distribuição azimutal $\frac{dN}{d\phi}$ de partículas no plano transversal, em que o ângulo azimutal é dado por $\phi \equiv \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$. Podemos escrever a distribuição azimutal como uma expansão em série de Fourier:

$$\frac{dN}{d\phi} \propto \left(1 + 2 \sum_n v_n \cos[n(\phi - \varphi)] \right), \quad (5.5.3)$$

em que os coeficientes v_n são os chamados fluxos. O coeficiente (v_2) é o fluxo elíptico. O ângulo φ é denominado ângulo de reação.

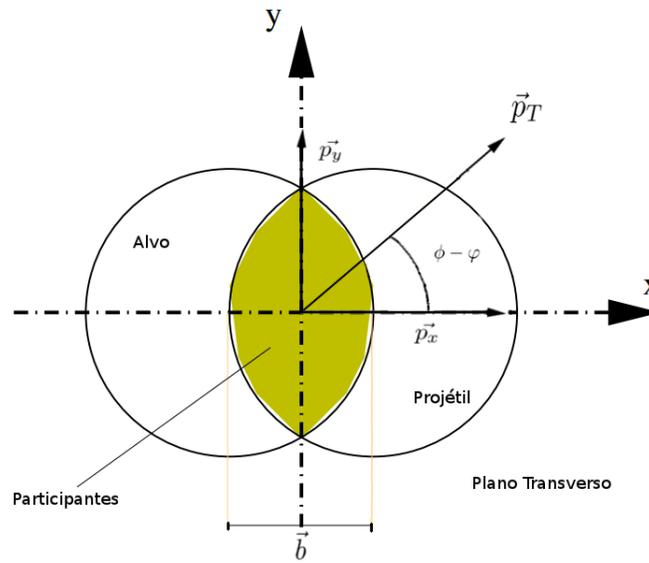


Figura 5.15 - Colisão não-central, vista do plano transverso xy .

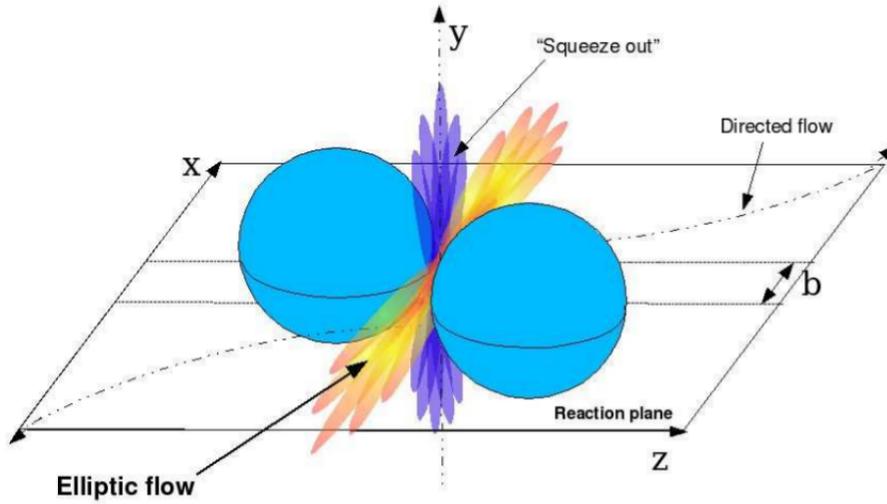


Figura 5.16 - Colisão não-central, de dois núcleos pesados no plano de reação xz . Retirada da referência [27].

O Coeficiente v_2

O parâmetro de fluxo elíptico v_2 é o segundo coeficiente da expansão, em série de Fourier, da distribuição azimutal das partículas. Este está relacionado com a anisotropia na distribuição inicial da matéria. Este parâmetro depende da geometria da colisão.

Para baixas energias de colisão, o v_2 é negativo, pois os espectadores levam um grande tempo para atravessar a região de interação. E assim as partículas escapam ortogonalmente ao plano de reação. Este é o chamado Squeeze-Out, conforme é representado na figura (5.16).

Para altas energias de colisão, que nos interessa, o coeficiente v_2 é positivo. O sistema formado possui altíssima densidade de energia no centro da reação, reduzindo-se gradualmente em direção as bordas do sistema e seguindo mais rapidamente ao longo do eixo- x do que do eixo- y . Conforme é representado na figura (5.16).

O coeficiente v_2 é definido por [29]:

$$v_2 = \langle \cos [2(\phi - \varphi)] \rangle = \left\langle \frac{p_x^2 - p_y^2}{p_x^2 + p_y^2} \right\rangle. \quad (5.5.4)$$

O resultado de v_2 pode ser representado em um gráfico de $v_2 \times p_T$ e compará-lo ao modelo hidrodinâmico, conforme a figura (5.17).

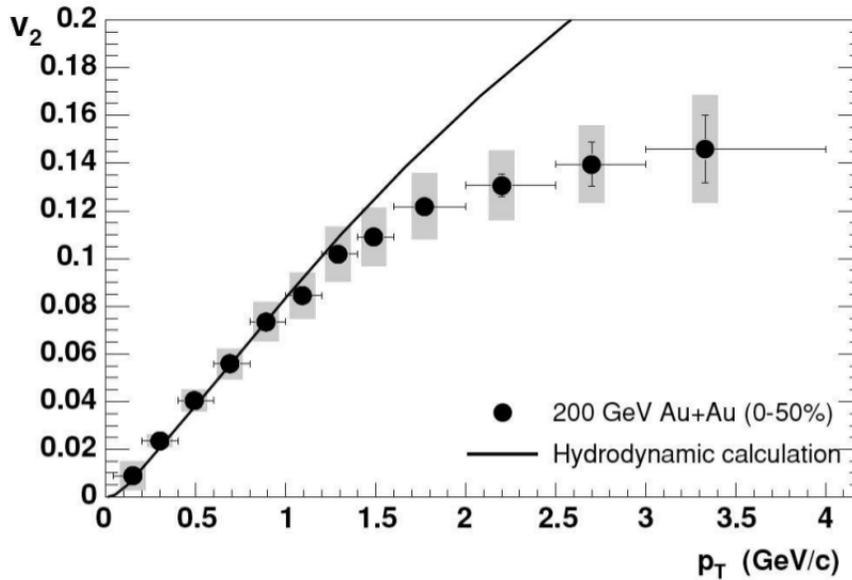


Figura 5.17 - Gráfico $v_2 \times p_T$, comparação entre os dados reais de uma colisão e o cálculo da hidrodinâmica. Retirada da referência [27]

Estas são algumas das quantidades observáveis que podemos calcular através do uso da hidrodinâmica.

Capítulo 6

Considerações Finais e Perspectivas

Neste trabalho foi feito um estudo sobre a mecânica de fluidos, que esta presente em nosso dia a dia e pode ser aplicada em diversas áreas de estudo no âmbito da física, sendo um deles a utilização do modelo hidrodinâmico para representar as colisões ultrarrelativísticas de íons pesados. Este modelo está baseado na conservação de energia, momento e cargas (generalizadas). As maiores vantagens do modelo hidrodinâmico são a sua simplicidade conceitual e emprego de poucos “ingredientes” para resolvê-lo, como por exemplo, condições iniciais, equações de estado e critério de desacoplamento. Porém, as equações da hidrodinâmica só possuem soluções analíticas em casos muito especiais. Em geral, utilizam-se métodos numéricos para resolvê-las. Atualmente tem sido criados programas que descrevem estas colisões nucleares relativísticas utilizando a hidrodinâmica, como por exemplo o SPheRIO (Smoothed Particle hydrodynamics evolution of Relativistic heavy Ion collisions) [29, 30], que utiliza o método SPH [26] e é válido para fluidos perfeitos. Há também o vHLLLE [25], que utiliza o método de volumes finitos do tipo Godunov [25, 34], que é válido tanto para fluidos perfeitos como para fluidos viscosos. Os resultados destes programas quando comparados aos dados reais tem sido satisfatórios.

As perspectivas futuras, para uma pós-graduação, seriam: um estudo mais aprofundado da aplicação do modelo hidrodinâmico aplicado às colisões ultrarrelativísticas de íons pesados; um estudo mais aprofundado sobre as equações de estado. O estudo dos efeitos da inclusão da viscosidade e a comparação entre os resultados para fluidos perfeitos e viscosos. O intuito é que isto seja feito através da utilização do programa vHLLLE.

Capítulo 7

Apêndices

7.1 A: Operador Derivada Material

Este operador é formado seguindo uma partícula que se move através do fluido. Considere uma função $f(x_1, x_2, x_3, t)$, onde $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$. Tomando a derivada total de $f(x_1, x_2, x_3, t)$ em relação a t , temos:

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dt} + \frac{dx_1}{dt} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{dt} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{dx_3}{dt} \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

Como

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1, \frac{dx_2}{dt} = v_2, \frac{dx_3}{dt} = v_3$$

Então

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

ou

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f.$$

Então o operador derivada material é definido como:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$$

7.2 B: Princípio do Equilíbrio da Tensão

O princípio do equilíbrio da tensão relaciona um vetor $\vec{t}_{(n)}$ com o tensor $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$, atuando sobre um plano com vetor normal \hat{n} . Podemos escrever este vetor em coordenadas cartesianas, como:

$$\vec{t}_{(1)} = \hat{e}_1 T_{11} + \hat{e}_2 T_{12} + \hat{e}_3 T_{13} \longrightarrow \text{Forças por unidade de área atuando sobre uma superfície com normal paralela a } x$$

$$\vec{t}_{(2)} = \hat{e}_1 T_{21} + \hat{e}_2 T_{22} + \hat{e}_3 T_{23} \longrightarrow \text{Forças por unidade de área atuando sobre uma superfície com normal paralela a } y$$

$$\vec{t}_{(3)} = \hat{e}_1 T_{31} + \hat{e}_2 T_{32} + \hat{e}_3 T_{33} \longrightarrow \text{Forças por unidade de área atuando sobre uma superfície com normal paralela a } z$$

Assim o tensor das tensões pode ser escrito como:

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}} = [\hat{e}_1 \vec{t}_{(1)} + \hat{e}_2 \vec{t}_{(2)} + \hat{e}_3 \vec{t}_{(3)}]$$

O vetor de tensão é dado por:

$$\vec{t} = \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot \hat{n}$$

ou

$$t_i = T_{ij} n_j.$$

Podemos utilizar o teorema da divergência e escrever:

$$\oint_A \vec{t} dA = \oint_A \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot \hat{n} dA = \iiint_V (\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}}) dV$$

7.3 C: Teorema do Transporte de Reynolds

O Teorema do Transporte de Reynolds (TTR) é uma generalização da regra de Leibnitz para a diferenciação de uma integral em uma dimensão, quando tanto o integrando como os limites de integração variam com o tempo.

$$\frac{d}{dt} \left[\iiint_{V(t)} B(x(t), t) dV \right] = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left[\iiint_{V(t+\delta t)} B(t+\delta t) dV - \iiint_{V(t)} B(t) dV \right] \right\} \quad (7.3.1)$$

A figura 7.1 mostra um certo volume nos tempos t e $t + \delta t$, vemos ao se mover o volume se deforma no espaço. Durante o intervalo de tempo δt , o volume varre uma “nova” região $V_{II}(\delta t)$ e deixa para trás a “velha” região $V_I(\delta t)$.

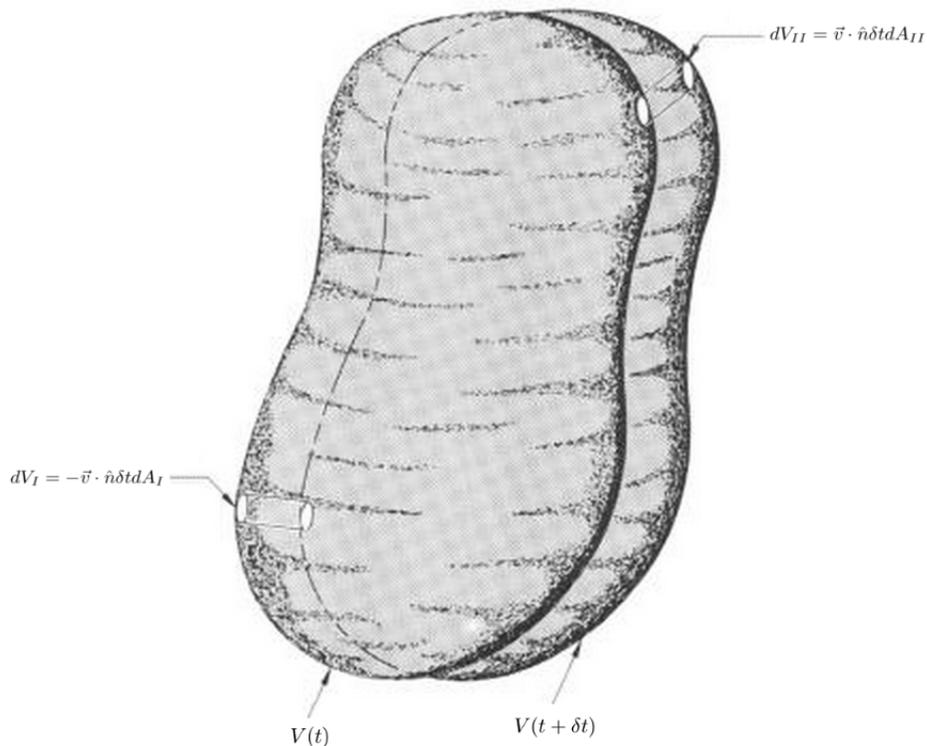


Figura 7.1 - Volume $V(t)$ em movimento. Retirada da referência [35].

Podemos escrever o volume $V(t + \delta t)$, como

$$V(t + \delta t) = V(t) + V_{II}(\delta t) - V_I(\delta t),$$

Podemos então reescrever a integral

$$\begin{aligned} \iiint_{V(t+\delta t)} B(t + \delta t) dV &= \iiint_{V(t)} B(t + \delta t) dV + \\ &\iiint_{V_{II}(\delta t)} B(t + \delta t) dV - \iiint_{V_I(\delta t)} B(t + \delta t) dV \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

Substituindo a equação (7.3.2) em (7.3.1), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\iiint_{V(t)} B(x(t), t) dV \right] &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta t} \left[\iiint_{V(t)} B(t + \delta t) dV + \iiint_{V_{II}(\delta t)} B(t + \delta t) dV_{II} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \iiint_{V_I(\delta t)} B(t + \delta t) dV_I - \iiint_{V(t)} B(t) dV \right] \right\}, \end{aligned}$$

reescrevendo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\iiint_{V(t)} B(x(t), t) dV \right] &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\iiint_{V(t)} B(t + \delta t) dV - \iiint_{V(t)} B(t) dV}{\delta t} \right\} \\ &+ \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\iiint_{V_{II}(\delta t)} B(t + \delta t) dV_{II} - \iiint_{V_I(\delta t)} B(t + \delta t) dV_I}{\delta t} \right\} \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

Para a primeira integral, temos:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\iiint_{V(t)} B(t + \delta t) dV - \iiint_{V(t)} B(t) dV}{\delta t} \right] = \iiint_{V(t)} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{B(t + \delta t) - B(t)}{\delta t} \right] dV = \iiint_{V(t)} \frac{\partial B}{\partial t} dV, \quad (7.3.4)$$

logo, substituindo (7.3.4) em (7.3.3), temos

$$\frac{d}{dt} \left[\iiint_{V(t)} B(x(t), t) dV \right] = \iiint_{V(t)} \frac{\partial B}{\partial t} dV + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\iiint_{V_{II}(\delta t)} B(t + \delta t) dV_{II} - \iiint_{V_I(\delta t)} B(t + \delta t) dV_I}{\delta t} \right\} \quad (7.3.5)$$

Para a segunda integral devemos observar a figura 7.3.1. Podemos escrever a diferencial dos volumes em termos das regiões “nova” e “velha”. Temos

$$dV_{II} = \vec{v} \cdot \hat{n} \delta t dA_{II} \quad (7.3.6)$$

$$dV_I = -\vec{v} \cdot \hat{n} \delta t dA_I. \quad (7.3.7)$$

Substituindo as equações (7.3.7) e (7.3.6) em (7.3.5), temos

$$\frac{d}{dt} \left[\iiint_{V(t)} B(x(t), t) dV \right] = \iiint_{V(t)} \frac{\partial B}{\partial t} dV + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\iint_{A_{II}} B(t + \delta t) \vec{v} \cdot \hat{n} \delta t dA_{II} + \iint_{A_I} B(t + \delta t) \vec{v} \cdot \hat{n} \delta t dA_I}{\delta t} \right\}$$

Fazendo

$$A_{II} + A_I \rightarrow A(t) \text{ e } \delta t \rightarrow 0,$$

obtemos

$$\frac{d}{dt} \left[\iiint_{V(t)} B(x(t), t) dV \right] = \iiint_{V(t)} \frac{\partial B}{\partial t} dV + \iint_{A(t)} B \vec{v} \cdot \hat{n} dA$$

Utilizando o Teorema da divergência chega-se a forma final do teorema do transporte de Reynolds:

$$\frac{d}{dt} \left[\iiint_{V(t)} B(x, t) dV \right] = \iiint_{V(t)} \left[\nabla \cdot (B \vec{v}) + \frac{\partial B}{\partial t} \right] dV$$

7.4 D: Cálculo da Pressão Média

A pressão média é definida pela expressão [8, 12, 13, 14]

$$\bar{P} = -\frac{1}{3}(\mathbb{T}_{11} + \mathbb{T}_{22} + \mathbb{T}_{33}). \quad (7.4.1)$$

O tensor das tensões para fluidos reais é dado por

$$\mathbb{T}_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij},$$

logo, temos que

$$\mathbb{T}_{11} = -P + 2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \lambda \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \quad (7.4.2)$$

$$\mathbb{T}_{22} = -P + 2\mu \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \lambda \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \quad (7.4.3)$$

$$\mathbb{T}_{33} = -P + 2\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \lambda \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right). \quad (7.4.4)$$

Substituindo as equações (7.4.4), (7.4.3) e (7.4.2) em (7.4.1), obtemos

$$\bar{P} = -\frac{1}{3} \left(-P + 2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \lambda \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + -P + 2\mu \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \lambda \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + -P + 2\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \lambda \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \right)$$

$$\bar{P} = -\frac{1}{3} \left(-3P + 2\mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) + 3\lambda \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \right),$$

$$\bar{P} = P - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) - \lambda \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right).$$

Porém, temos que

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) = \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) = \nabla \cdot \vec{v},$$

logo obtemos

$$\bar{P} = P - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) (\nabla \cdot \vec{v}).$$

7.5 E: Equações de Navier-Stokes para Escoamentos Incompressíveis

As equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v},$$

é um caso muito importante na dinâmica dos fluidos. Podemos escrevê-las em coordenadas cartesianas, esféricas ou cilíndricas.[32]

Coordenadas Cartesianas

Considerando as coordenadas $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$,

Direção x :

$$\rho \left[\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right] + \rho f_x$$

Direção y :

$$\rho \left[\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right] + \rho f_y$$

Direção z :

$$\rho \left[\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] + \rho f_z$$

Em que o Operador Nabla é dado por: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$

E o Operador Laplaciano é dado por: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Coordenadas Esféricas

Para coordenadas esféricas as equações são muito extensas, então deixarei em termos do operador Laplaciano em coordenadas esféricas, que é dado ao final desta subsecção:

Direção r :

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\theta^2}{r} - \frac{u_\phi^2}{r} \right] = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} u_\theta - \frac{2}{r^2} u_\theta \cot \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \right] + \rho f_r \end{aligned}$$

Direção θ :

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\phi^2}{r} \cot \theta \right] = \\ & = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] + \rho f_\theta \end{aligned}$$

Direção ϕ :

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_\phi u_\theta}{r} \cot \theta \right] = \\ & = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu \left[\nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right] + \rho f_\phi \end{aligned}$$

Em que o Operador Nabla é dado por: $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi}$

E o Operador Laplaciano é dado por: $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$.

Coordenadas Cilíndricas

Direção r :

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\phi^2}{r} \right] = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\phi) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z^2} \right] + \rho f_r \end{aligned}$$

Direção ϕ :

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + u_z \frac{\partial u_\phi}{\partial z} + \frac{u_r u_\phi}{r} \right] = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right] + \rho f_\phi \end{aligned}$$

Direção z :

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] + \rho f_z \end{aligned}$$

Em que o Operador Nabla é dado por: $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$

E o Operador Laplaciano é dado por: $\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

7.6 F: Demonstração da Lei de Conservação de Energia-Momentum

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

Esta demonstração pode ser feita através da ação de um sistema, utilizando a teoria de campos [33].

A ação de um sistema qualquer é dada por:

$$S = \int \mathfrak{L}(q, \partial_\mu q) dV dt = \frac{1}{c} \int \mathfrak{L}(q, \partial_\mu q) d\Omega,$$

em que $\mathfrak{L}(q, \partial_\mu q)$, é a densidade lagrangiana, que depende da coordenada q e suas derivadas. Ω é a hipersuperfície que contém todo o espaço.

Aplicando o princípio da ação mínima temos:

$$\delta S = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_\mu q)} \delta (\partial_\mu q) \right) d\Omega &= 0 \\ \frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q} \delta q + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_\mu q)} \delta q \right) - \delta q \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_\mu q)} \right) \right) d\Omega &= 0. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Gauss, a segunda integral se anula.

Logo, chegamos a equação de movimento, dada pela expressão:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_\mu q)} \right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q} = 0.$$

Utilizando,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathfrak{L} &= \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q} \partial_\mu q + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_\mu q)} \partial_\mu (\partial_\nu q) \\ &= \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q} \partial_\mu q + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_\nu q)} \partial_\nu (\partial_\mu q) \\ &= \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_\nu q)} \right) \partial_\mu q + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_\nu q)} \partial_\nu (\partial_\mu q), \end{aligned}$$

obtemos

$$\partial_\mu \mathfrak{L} = \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_\nu q)} \partial_\mu q \right].$$

Introduzindo uma delta de Kronecker δ_μ^ν , temos:

$$\delta_\mu^\nu \partial_\nu \mathfrak{L} = \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_\nu q)} \partial_\mu q \right].$$

Então temos que,

$$\partial_\nu \left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_\nu q)} \partial_\mu q - \delta_\mu^\nu \mathfrak{L} \right] = 0.$$

Na teoria quântica de campos o tensor de energia-momentum é dado pela seguinte expressão:

$$T_\mu^\nu = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_\nu q)} \partial_\mu q - \delta_\mu^\nu \mathfrak{L}.$$

Generalizando para várias coordenadas:

$$T_\mu^\nu = \sum_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_\nu q_i)} \partial_\mu q_i - \delta_\mu^\nu \mathfrak{L}.$$

Elevando o índice μ , temos:

$$T^{\nu\mu} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_\nu q)} \partial^\mu q - \delta^{\nu\mu} \mathfrak{L},$$

$$T^{\nu\mu} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_\nu q)} \partial^\mu q - g^{\nu\mu} \mathfrak{L},$$

Logo,

$$\partial_\nu T^{\nu\mu} = 0.$$

Trocando ν por μ , temos:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

Esta é a lei de conservação de energia-momentum.

7.7 G: Demonstração da lei de conservação de entropia

$$\partial_\mu S^\mu = 0.$$

Sabendo que o tensor energia-momentum é dado pela expressão:

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}P,$$

podemos calcular $u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} &= u_\nu \partial_\mu [(\epsilon + P)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}P] \\ &= u_\nu (\epsilon + P) u^\mu \partial_\mu u^\nu + u_\nu (\epsilon + P) u^\nu \partial_\mu u^\mu + u_\nu u^\mu u^\nu \partial_\mu (\epsilon + P) - u_\nu g^{\mu\nu} \partial_\mu P \\ &= (\epsilon + P) u^\mu \underbrace{u_\nu \partial_\mu u^\nu}_{=\frac{1}{2}\partial_\mu(u_\nu u^\nu)} + \underbrace{u^\nu u_\nu}_{=1} (\epsilon + P) \partial_\mu u^\mu + \underbrace{u^\nu u_\nu}_{=1} u^\mu \partial_\mu (\epsilon + P) - \underbrace{u_\nu g^{\mu\nu} \partial_\mu P}_{=u^\mu \partial_\mu P}. \end{aligned}$$

Logo, reescrevemos:

$$u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = (\epsilon + P) u^\mu \underbrace{\frac{1}{2}\partial_\mu(u_\nu u^\nu)}_{=0} + (\epsilon + P) \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu (\epsilon + P) - u^\mu \partial_\mu P,$$

$$u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = (\epsilon + P) \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu (\epsilon + P) - u^\mu \partial_\mu P$$

$$u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = (\epsilon + P) \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu \epsilon + u^\mu \partial_\mu P - u^\mu \partial_\mu P$$

$$u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = (\epsilon + P) \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu \epsilon + u^\mu \partial_\mu P - u^\mu \partial_\mu P,$$

$$u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = (\epsilon + P) \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu \epsilon$$

Sabendo que a lei de conservação de energia-momentum é dada por $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, temos $u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

Então:

$$(\epsilon + P) \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu \epsilon = 0. \quad (7.7.1)$$

Utilizando as relações termodinâmicas:

$$\epsilon + P = Ts + \mu n, \quad (7.7.2)$$

$$d\epsilon = Tds + \mu dn, \quad (7.7.3)$$

e substituindo as equações (7.7.2) e (7.7.3) na equação (7.7.1), obtemos:

$$(\epsilon + P) \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu \epsilon = (Ts + \mu n) \partial_\mu u^\mu + T (u^\mu \partial_\mu s) + \mu (u^\mu \partial_\mu n)$$

$$0 = T (s \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu s) + \mu (n \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu n). \quad (7.7.4)$$

Sabendo que

$$\partial_\mu j^\mu = \partial(nu^\mu) = n \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu n = 0$$

e

$$\partial S^\mu = \partial(su^\mu) = s \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu s.$$

Temos

$$0 = T \partial S^\mu$$

Da termodinâmica, temos que $T > 0$, logo

$$\partial_\mu S^\mu = 0.$$

Essa é a lei de conservação de corrente de entropia.

Referências Bibliográficas

- [1] Garbrecht G., "Hydrologic and hydraulic concepts in antiquity in Hydraulics and Hydraulic Research: A Historical Review", A.A. Balkema,1987.
- [2] Rodda C. J., Ubertini L., "The Bases of Civilization - Water Science?", IAHS,
- [3] Newton I., "Principia", Tertia Aucta e Emendata, 1871.
- [4] Landau L D (1953) Izv. Akad. Nauk SSSR **17** 51.
- [5] J.P.Blaizot, J.Y.Ollitrault, Adv.Ser . Direct. High Energy Phys. 6, 393-470 (1990).
- [6] E.M.Lifshitz, L.D.Landau, "Fluid Mechanics", 2 ed., Butterworth-Heinemann, 1987.
- [7] T.E.Faber, "Fluid Dynamics For Physicists", Cambridge University Press, 1995.
- [8] G.K.Batchelor, "An Introduction To Fluid Dynamics", Cambridge University Press, 1967.
- [9] A. T. McDonald, R. W. Fox, "Introdução à Mecânica dos Fluidos", 5^o edição, LTC, 1998.
- [10] F.Brunetti, "Mecânica dos Fluidos", 2 ed.rev., Pearson, 2005.
- [11] M. Nussenzveig, "Curso de Física Básica", Vol.2, Edgard Blücher, 1996
- [12] Çengel Y. A., Cimbala, J.M., "Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications", McGraw-Hill, 2006.
- [13] Mohamed Gad-el-Hak,"STOKES' HYPOTHESIS FOR A NEWTONIAN, ISOTROPIC FLUID",University of Notre Dame,1995.
- [14] Feynman R. P., Leighton R. B. and Sands M. L., "The Feynman Lecture on Physics vol. II", Addison-Wesley,1964.
- [15] F.W. Sears, G.L. Salinger, "Termodinâmica, Teoria Cinética e Termodinâmica Estatística".
- [16] W. Greiner, A. Schöfer, "Thermodynamics and Statistical Mechanics", Springer,2001.
- [17] J-Y. Ollitrault, Eur.J.Phys. 29, 2008, 275-302, arXiv:0708.2433
- [18] W. Flokowsky, "Phenomenology of Ultra-relativistic Heavy-ion Collisions", World Scientific Publishing Company, 2010.

- [19] Y. Hama, R.P.G. Andrade, F. Grassi, O. Socolowski Jr, T. Kodama, B. Tavares, S. S. Padula, arXiv:hep-ph/0510096, Nucl.Phys. A774, 2006, 169-178.
- [20] Ramona Vogt, “ultrarrelativistic Heavy-Ion Collisions”, Elsevier, 2007.
- [21] Carvalho J 2014, “A influência das condições iniciais e das equações de estado no estudo hidrodinâmico da interferometria de píons”, dissertação de mestrado, FURG, 2014.
- [22] Schutz B., “A First Course in GENERAL RELATIVITY”, Cambridge, 2009.
- [23] J. Noronha-Hostler, G. S. Denicol, J. Noronha, R. P. G. Andrade, F. Grassi, arXiv:1305.1981 [nucl-th], 2013.
- [24] L. Del Zanna, V. Chandra, G. Inghirami, V. Rolando, A. Beraudo, A. De Pace, G. Pagliara, A. Drago, F. Becattini, 2013, arXiv:1305.7052.
- [25] Iu. Karpenko, P. Houvinen, M. Bleicher, arXiv:1312.4160, Comput. Phys. Commun. 185(2014)3016.
- [26] R. A. Gingold, J. J. Monaghan, Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, p. 182:375-398, 1977.
- [27] Tavares B. M., “Estudo hidrodinâmico das colisões ultra-relativísticas de íons pesados”, tese de doutorado, UFRJ, 2006.
- [28] Andrade R. P. G., “Sobre a evolução hidrodinâmica da matéria nuclear criada em colisões de íons pesado relativísticos - um estudo das condições iniciais flutuantes”, tese de doutorado, USP, 2011.
- [29] C.E. Aguiar, T. Kodama, T. Osada and Y. Hama, J.Phys.G 27, 2001, 75; T. Kodama, C.E. Aguiar, T. Osada and Y. Hama, J. Phys.G 27, 2001, 557.
- [30] Y.Hama, T.Kodama, O.Socolowski Jr., Braz.J.Phys. 35, 2005, 24-51.
- [31] F. Cooper, G.Frye, Phys.Rev. D 10, 1974; F. Cooper, G.Frye, E.Schonberg, Phys.Rev. D 11, 1975.
- [32] J. R. Welty, C. E. Wicks, R. E. Wilson, “Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer”, John Wiley & Sons, 1984.
- [33] E.M.Lifshitz, L.D.Landau, “Theory of Field”, 2 ed., Butterworth-Heinemann, 1987.
- [34] S. Chippada, C.N. Dawson, M.L. Martinez, M.F. Wheeler, “[http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00108-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00108-4)”, 105 - 129, 1998.
- [35] S Whitaker, “Fundamental Principles of Heat Transfer”, Robert E. Krieger Publishing Company, 1977.