1 Aula 1

Conteúdo: Números reais, valor absoluto, distância entre dois pontos, coeficiente angular da reta, equação de uma reta no plano.

1.1 Objetivos

Retomar as propriedades dos números reais; Introduzir conceitos fundamentais de Geometria Analítica.

1.2 Conjuntos Numéricos

Os principais objetos com se ocupa a Matemática são os números e as figuras geométricas. Vamos recordar o que aprendemos sobre números no ensino básico. Números foram criados para contar e medir. Os números reais, suas propriedades e relações são conceitos básicos para o Cálculo.

Conjuntos Numéricos

Os números reais são $\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ que formam o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$. O Conjunto dos números inteiros é representado por:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Destacamos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

- Conjunto dos números Naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, pois $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ ou $\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Quando consideramos apenas o conjunto dos números inteiros positivos a notação é $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ (são os números inteiros não negativos que é o próprio conjuntos dos números naturais).
Quando consideramos somente o conjunto dos números inteiros negativos a notação é $\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0\}$.
Quando acrescentamos as frações positivas e negativas ao conjunto $\mathbb{Z}$, obtemos o conjunto do números racionais $\mathbb{Q}$. Por exemplo,

$$-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{3}, 2$$

Observe que todo número racional pode ser escrito como $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Por exemplo: $-\frac{3}{4} = -\frac{2}{3}, -2 = -\frac{6}{3}$. Assim, representamos:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}.$$

Observação: A restrição $b \neq 0$ é necessária, pois $\frac{a}{b}$, divisão de a por b, só tem significado se $b \neq 0$. A denominação racional surgiu porque $\frac{a}{b}$ pode ser vista como uma razão entre os inteiros a e b.
Se $b = 1$, temos $\frac{a}{b} = \frac{a}{1} = a \in \mathbb{Z}$, o que implica que $\mathbb{Z}$ é subconjunto de $\mathbb{Q}$. Portanto,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Representação Decimal dos Números Racionais

Dado um número racional $\frac{a}{b}$, a representação decimal desse número é obtida dividindo-se a por b, resultando em:

- decimais exatos, finitos, exemplos:

$$\frac{1}{4} = 0,25$$
$$\frac{4}{5} = 0,8$$

- decimais ou dízimas periódicas, infinitas, exemplos:

$$\frac{2}{3} = 0,6666\ldots = 0,\overline{6}$$

$$\frac{177}{990} = 0,1787878\ldots = 0,1\overline{78}$$

Determinação da fração geratriz do decimal: assim como um número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um decimal exato ou periódico, estes também podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, que recebe o nome de fração geratriz do decimal. Vamos escrever a fração geratriz de cada um dos exemplos:

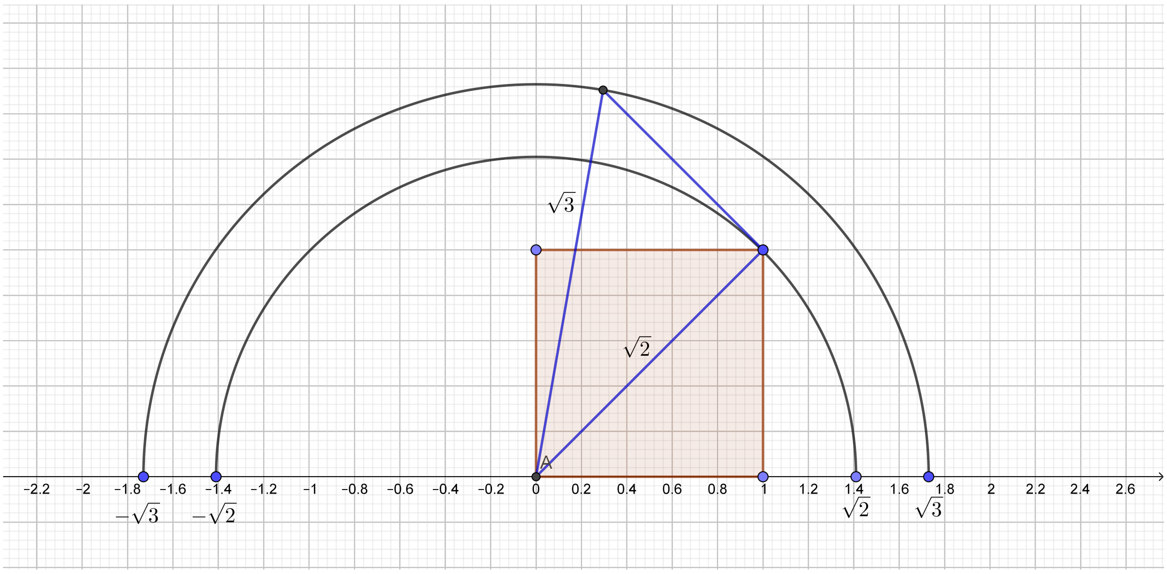
1. $0,4444\ldots = \frac{4}{9}$
2. $0,313131\ldots = \frac{31}{99}$
3. $0,275275\ldots = \frac{278}{999}$
4. $1,444\ldots = 1 + 0,4444\ldots = 1 + \frac{4}{9} = \frac{9+4}{9} = \frac{13}{9}$

Regra Geral: $x = 0,\overline{c_1 c_2 \ldots c_t} = \frac{c_1 c_2 \ldots c_t}{99\ldots9}$, onde o denominador tem tantos dígitos iguais a 9 quantos forem os algarismos de período t, nesse caso.
Observações: Entre dois números inteiros nem sempre existe outro número inteiro. Entre dois números racionais sempre existe outro racional.
Existem números decimais que não admitem a representação na forma fracionária são os decimais infinitos e não periódicos. Esses números são os Irracionais. Exemplos:

$$\sqrt{2} = 1,4142135\ldots$$

$$\pi = 3,14159265\ldots$$

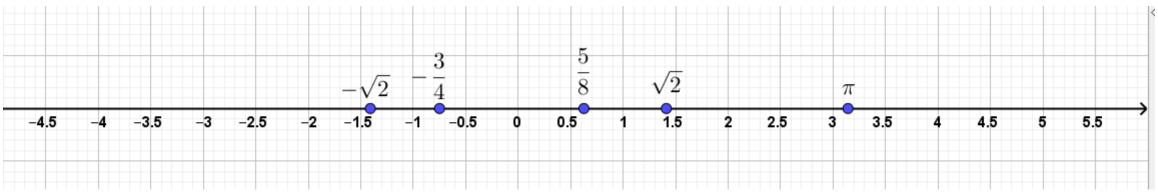
Usando a relação de Pitágoras, podemos representar alguns desses números na reta:



Observamos que a medida da diagonal do quadrado de lado 1, usando esse lado 1 como unidade, é $\sqrt{2}$. Essa diagonal é um exemplo de segmento que não pode ser medido como um número racional.
A união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais obtemos o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \{x; x \in \mathbb{Q} \text{ ou } x \in \mathbb{I}\}.$$

Com o conjunto dos números reais, a reta fica completa, ou seja, a cada ponto da reta corresponde um único número real e, reciprocamente, a cada número real corresponde um único ponto da reta. Temos assim a reta real:



Escolhemos um ponto arbitrário da reta, que denominamos origem e uma unidade de medida. A origem fica em correspondência com o número zero. Na semirreta da direita representamos os números reais positivos e na outra semirreta os números reais negativos.

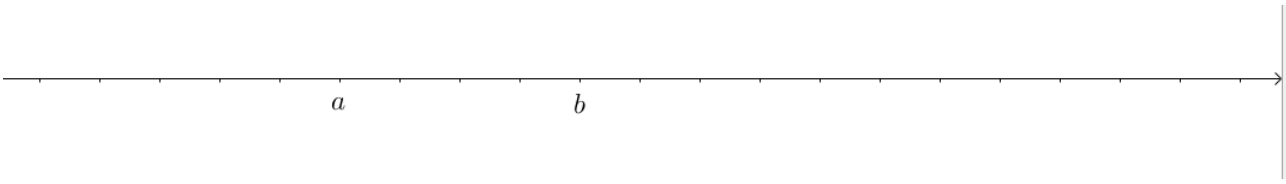
1.3 Desigualdade entre números reais

Dados dois números reais quaisquer a e b, poderá ocorrer uma e somente uma das seguintes possibilidades:

- $a < b$
- $a = b$

- $a > b$

A desigualdade $a < b$ significa que o número real a é menor que o número real b, ou seja $b - a$ é positivo. Geometricamente, $a < b$ significa na reta real, o número real a está à esquerda do número real b:



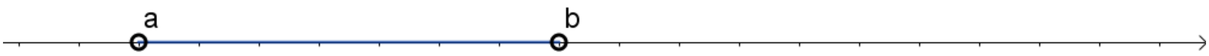
Usamos também a notação $a \leq b$, para dizer que $a < b$ ou $a = b$. Assim,

- $a \leq b$ lê-se: a é menor que ou igual a b.
- $a \geq b$ lê-se: a é maior que ou igual a b.

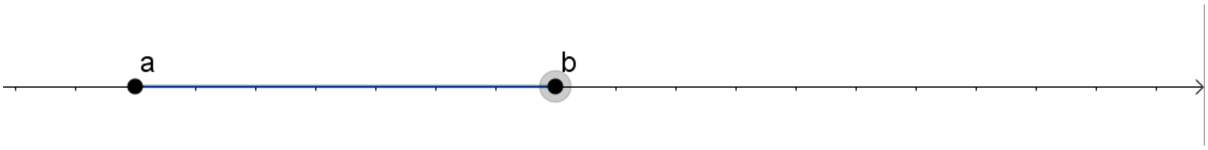
1.4 Intervalos

Certos subconjuntos de $\mathbb{R}$, determinados por desigualdades, tem grande importância no estudo da Matemática: os intervalos:

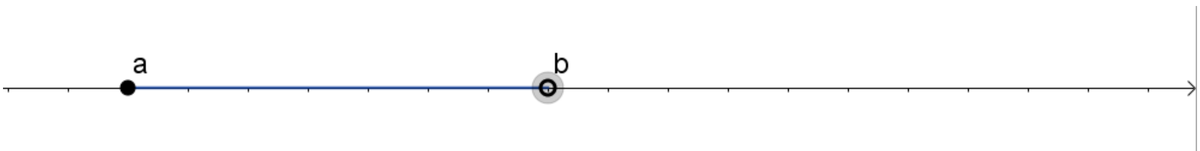
a) Intervalo aberto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$. (Observe que a bolinha (vazia) indica que os extremos a e b não pertencem ao intervalo)



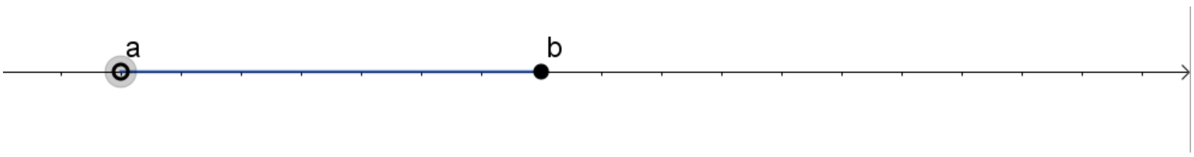
b) Intervalo fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$. (Observe que a bolinha (cheia) indica que os extremos a e b pertencem ao intervalo)



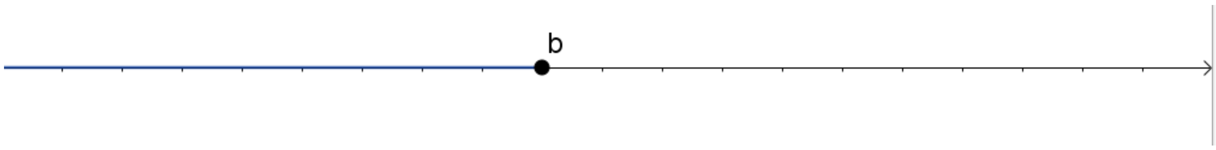
c) Intervalo fechado à esquerda: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$



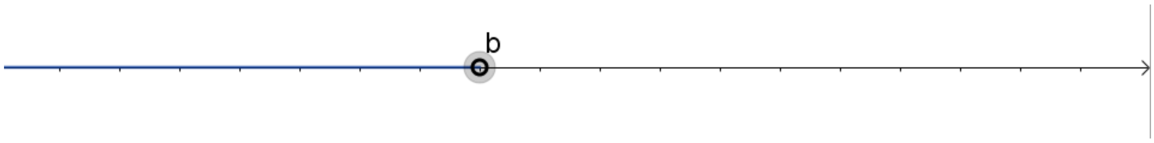
d) Intervalo fechado à direita: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$



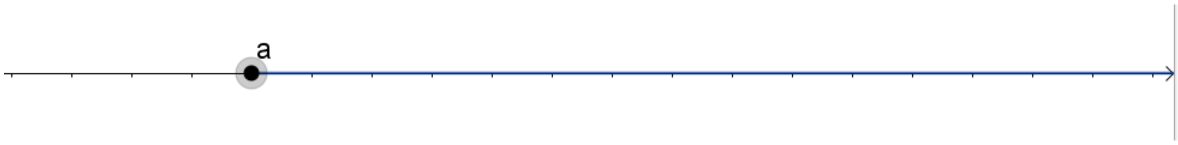
e) semirreta esquerda, fechada, de origem b: $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$



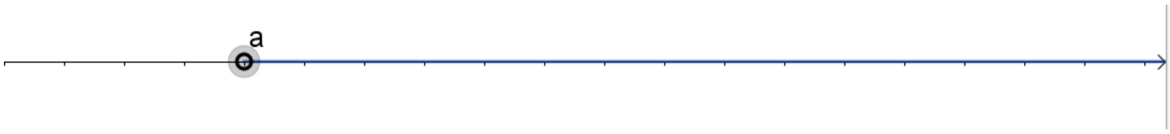
f) semirreta esquerda, aberta, de origem b: $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$



g) semirreta direita, fechada, de origem a: $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$



h) semirreta direita, aberta, de origem a: $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$



Observações:

- $-\infty$ e $+\infty$ não são números reais; apenas fazem parte das notações de intervalos ilimitados.
- Qualquer intervalo de extremos a e b, com $a \neq b$, contém números racionais e irracionais.

Exemplo 1. *: Represente graficamente o intervalo* $[-2, 6)$ *e verifique se os números* $6, \pi, \sqrt{5}, \frac{1}{2}$ *pertencem ao intervalo.*

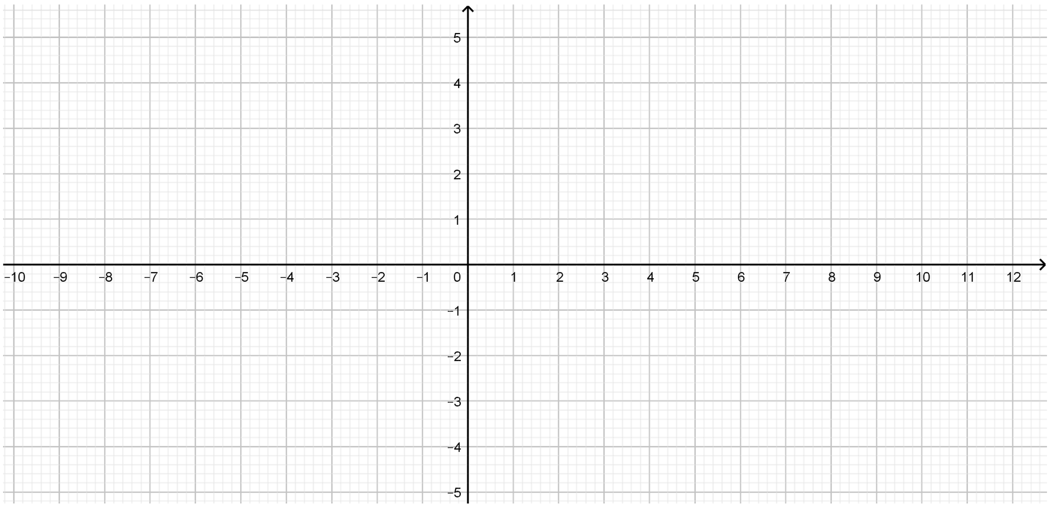
Exemplo 2. *: Usando a notação de desigualdade, vamos escrever as seguintes relações:*

a) x *está à direita de* 16 *na reta real.*

b) y *está entre* (-2) *e* 9 *na reta real.*

1.5 Sistema de Coordenadas Retangulares

No sistema cartesiano também existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de um plano e o conjunto dos pares ordenados de números reais, isto é, a cada ponto no plano cartesiano corresponde um único par ordenado.
Para estabelecer essa correspondência, usamos duas retas perpendiculares, uma horizontal outra vertical. A interseção dessas retas é denominado de **origem** do sistema de coordenadas.
A reta horizontal denominamos de eixo x ou eixo Ox, ou eixo das abscissas. A reta vertical recebe o nome de eixo y ou eixo Oy, ou eixo das ordenadas. Com o auxílio da Figura a seguir, vamos identificar os quadrantes e alguns pontos.



O plano, munido desse sistema de coordenadas, costuma ser denominado **Plano Coordenado**, **Plano** xy ou **Plano Cartesiano**.

1.6 Módulo de um número real

O módulo ou valor absoluto de um número real x, que denotamos por $|x|$, e é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Sendo assim,

- se x é positivo ou zero, $|x|$ é igual a x. Exemplos:

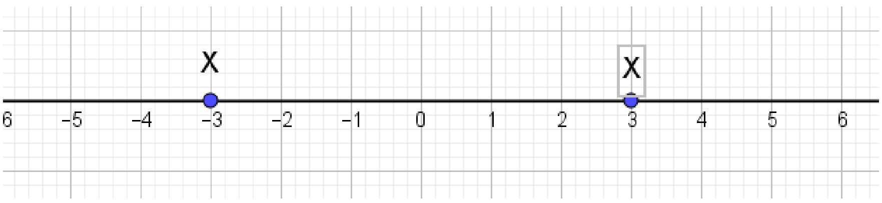
$$|2| = 2$$
$$|0| = 0$$
$$\left|\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5}$$

- se x é negativo, $|x|$ é igual a $-x$. Exemplos:

$$|-2| = -(-2) = 2$$
$$\left|-\frac{1}{5}\right| = -\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

- $|x-3| = \begin{cases} |x-3| = x-3 & \text{se} \quad x-3 \geq 0, \quad \text{ou seja, se} x \geq 3 \\ |x-3| = -(x-3) = 3-x & \text{se} \quad x-3 < 0, \quad \text{ou seja, se} x < 3 \end{cases}$

  Geometricamente, interpretamos o módulo como distância. Por exemplo, $|x| = 3$ significa que o ponto X da reta real está a uma distância 3 da origem.



Observações: Vamos relacionar o valor absoluto com a raiz quadrada de um número real. Para um número real positivo arbitrário a, o símbolo $\sqrt{a}$ representa o número real positivo cujo quadrado é a, ou seja, $\sqrt{a} = b \Longleftrightarrow b \geq 0$ e $b^2 = a$.
Por definição, não apenas o número a deverá ser positivo, para que possamos calcular sua raiz quadrada, mas também o resultado obtido ao calcularmos tal raiz deverá ser positivo.

Exemplo 3. *: Usando o valor absoluto, escreva o conjunto formado por todos:*

a) os números reais cuja distância até 7 *é menor do que* 9.

b) os números reais cuja distância até 4 *é maior que ou igual a* 3.

1.7 Distância entre dois pontos no plano

Dados dois pontos, A e B, a distância entre eles, que será indicada por $d(A, B)$, é a medida do segmento de extremidades A e B. Podemos determinar uma expressão que indica a distância entre os pontos quaisquer que sejam $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$. Considerando um triângulo retângulo no ponto $C(x_2, y_1)$, podemos usar a relação de Pitágoras:

$$[d(A,B)]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \Rightarrow d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Exemplo 4. *: Qual é a distância do ponto $A(\cos a, \sin a)$ ao ponto $B(\sin a, -\cos a)$?*

1.8 Coordenadas do ponto médio de um segmento

Considerando um segmento de extremidades $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, $M(x, y)$ será o ponto médio do segmento AB. Aplicando o teorema de Tales, podemos concluir que a abscissa do ponto médio do segmento é a média aritmética das abscissas das extremidades: $x = \frac{x_2 + x_1}{2}$. Da mesma forma, a ordenada do ponto médio do segmento é a média aritmética das ordenadas das extremidades: $y = \frac{y_2 + y_1}{2}$. Sendo assim, concluímos que o ponto médio M do segmento de reta que une dois pontos A e B do plano é dado por

$$M\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right).$$

1.9 Coeficiente Angular de uma reta no plano

Na Geometria Analítica, é possível estudar propriedades da reta por sua equação, bem como a partir de uma propriedade da reta é possível identificar uma equação.

O coeficiente angular da reta, ou inclinação da reta ou também conhecido como declividade da reta é um número que especifica a direção da reta. Esse número diz quantas unidades de crescimento (ou decaimento) vertical ocorrem quando fazemos uma varição de uma unidade na horizontal, da esquerda para direita. Dados dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, o coeficiente angular da reta que contém esses pontos é dado por

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Usamos também a notação Δx, para simbolizar a variação na coordenada x e Δy para a variação na coordenada y. Então, podemos escrever

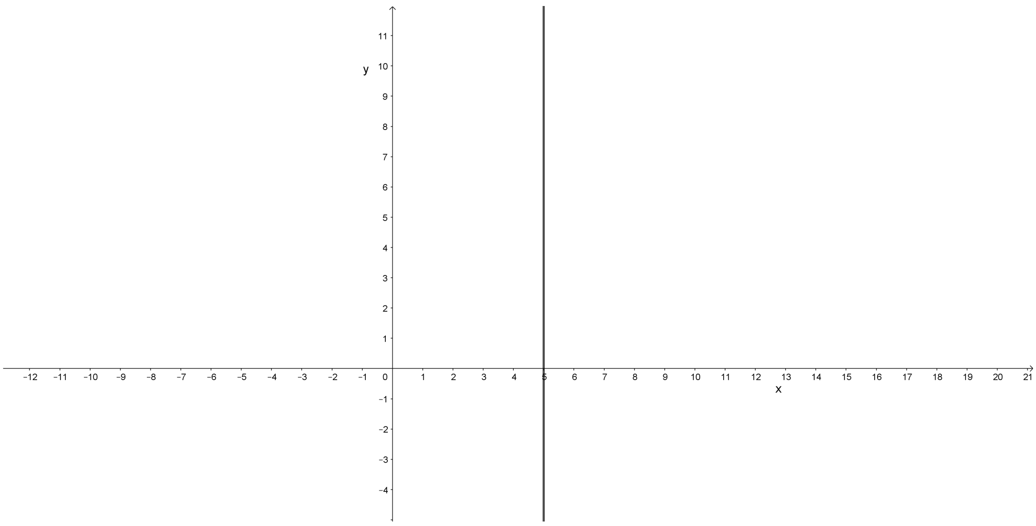
$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

1.10 Equação de uma reta no plano

1.10.1 Retas verticais

Característica: todos os seus pontos possuem a mesma abscissa. Se a reta corta o eixo x num ponto $(x_0, 0)$, então todos os pontos que pertençam a essa reta tem abscissa x_0.

Exemplo 5. *: Determine a equação da reta do gráfico a seguir e indique outros pontos que pertençam a reta:*

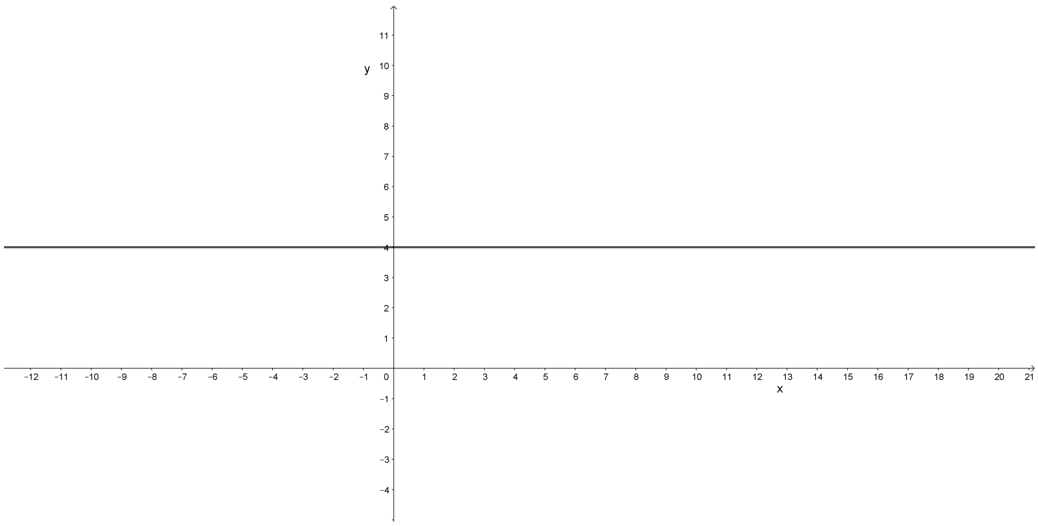


Exemplo 6. *: Determine a equação da reta e represente geometricamente que passa pelo ponto $(-4, 5)$ e é paralela ao eixo y.*

1.10.2 Retas Horizontais

Característica: todos os seus pontos possuem a mesma ordenada. Se a reta corta o eixo y num ponto $(0, y_0)$, então todos os pontos que pertençam a essa reta tem ordenada y_0.

Exemplo 7. *: Determine a equação da reta do gráfico a seguir e indique outros pontos que pertençam a reta:*



Exemplo 8. *: Determine a equação da reta e represente geometricamente que passa pelo ponto* $(5, 3)$ *e é paralela ao eixo* x*.*

1.10.3 Equações da reta

Equação da reta quando são conhecidos um ponto e o coeficiente angular (declividade):

$$y - y_1 = a(x - x_1).$$

Exemplo 9. *: Determine a equação da reta que passa pelo ponto* $P(2, -3)$ *e tem declividade igual a* 4*.*

Equação reduzida: É a equação da reta que passa pelo ponto $(0, b)$ do eixo y com inclinação a:

$$y = ax + b.$$

Exemplo 10. *: Determine a equação reduzida da reta que passa pelos pontos* $A(1, 5)$ *e* $B(-3, 4)$*.*

Equação Geral: Toda reta no plano possui uma equação da forma:

$$ax + by + c = 0.$$

Exemplo 11. *: Determine a equação geral da reta que passa pelo ponto* $(3, -2)$ *e tem coeficiente angular* $m = -\frac{1}{2}$*.*

1.10.4 Retas Paralelas e Retas Perpendiculares

As retas são paralelas se, e somente se, seus coeficientes angulares forem iguais. As retas são perpendiculares se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares for igual a -1.

$$r \parallel s \iff a_1 = a_2$$

$$r \perp s \iff a_1 = -\frac{1}{a_2}.$$

Exemplo 12. *: Determine a equação Geral da reta que passa por* $(-4, 3)$ *e é paralela à reta de equação* $2x - 8y + 7 = 0$*.*

Exemplo 13. *: Determine a equação da reta que passa pelo ponto* $P(-3, 2)$ *e é perpendicular à reta* $r : 3x + 4y - 4 = 0$*.*