

Conteúdos da aula 3

- Polinômios de grau 2;
- Algoritmo da divisão;
- Raízes racionais de polinômios com coeficientes inteiros;
- Fatoração de Polinômios;
- Sinal de um polinômio.

Exercícios da aula 3

Polinômios de grau 2

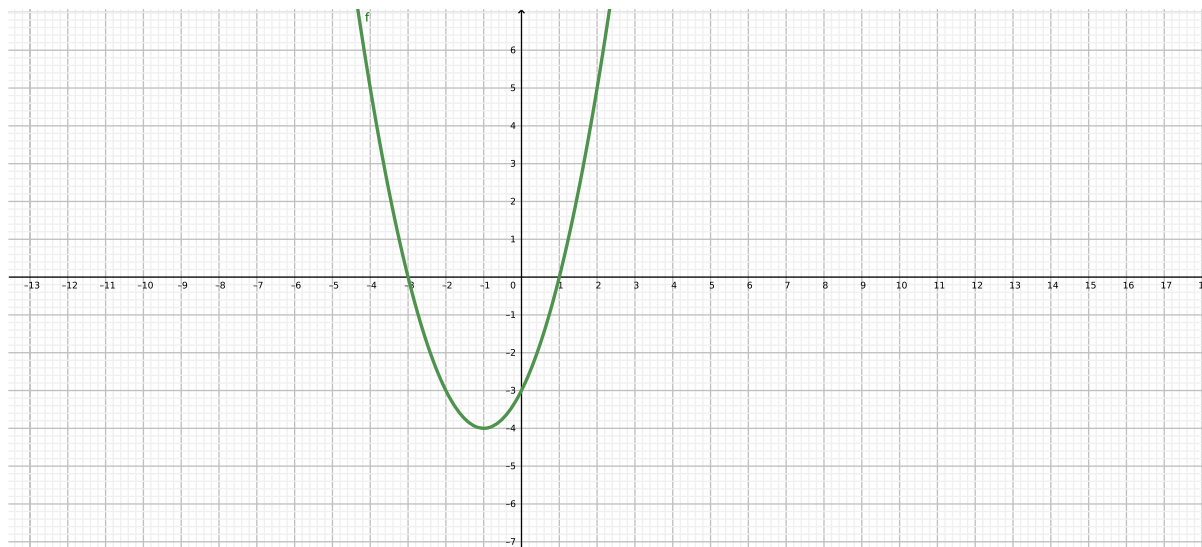
Exercício 1. Para cada uma das funções polinomiais, determine as raízes, as coordenadas do vértice e faça o esboço do gráfico.

a) $f(x) = 4x^2 + 2x - 6$;

b) $g(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}$.

Exercício 2. Esboce o gráfico de $p(x) = x^2 + 4x + 5$ usando translações.

Exercício 3. Determine a equação da parábola cujo gráfico é dado a seguir.



Algoritmo da divisão

Exercício 4. Determine o quociente e o resto na divisão de $f(x) = x^3 + 5x^2 - 20x + 4$ por $g(x) = x^2 - 4x + 5$.

Raízes racionais de polinômios com coeficientes inteiros

Proposição 1. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ um polinômio com coeficientes inteiros, isto é, $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$. Se c e $d \neq 0$ são números inteiros primos entre si tais que $\frac{c}{d}$ é uma raiz de $p(x)$, então c é um divisor de a_0 e d é um divisor de a_n .

Fatoração de Polinômios

Exercício 5. Fatore completamente o polinômio $x^3 + x^2 - 17x + 15$.

Sinal de um polinômio

Exercício 6. Determine os valores reais de x que satisfazem a desigualdade $x^3 - 2x^2 + x < 0$.

Exercício 7. Estude o sinal da função racional f , cuja lei de formação é $f(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 2x + 1}$.

Exercício 8. Faça o esboço do gráfico das funções quadráticas abaixo, utilizando translações horizontais e/ou verticais, alongamentos ou compressões e reflexões, conforme necessário.

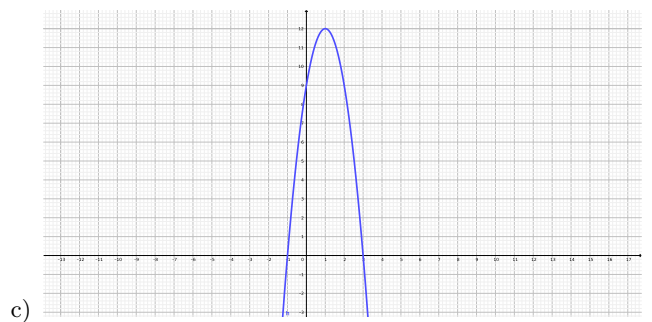
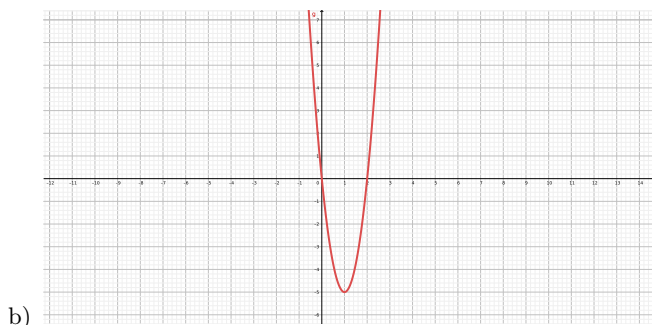
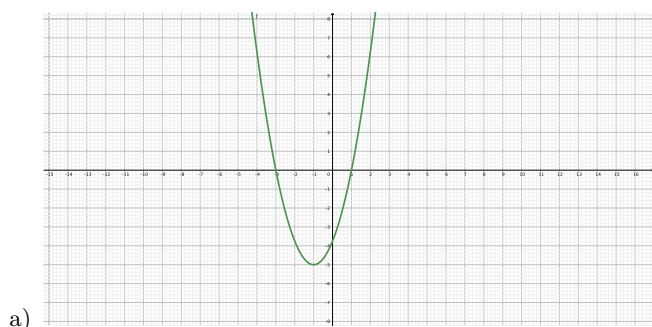
a) $f(x) = x^2 + 4x + 5$

b) $f(x) = x^2 - 3x + 3$

c) $f(x) = 5 - 6x - x^2$

d) $f(x) = 2x^2 + 8x + 10$

Exercício 9. Determine as expressões das parábolas cujos gráficos são dados abaixo:



Exercício 10. Determine o quociente e o resto na divisão de $f(x)$ por $g(x)$.

- a) $f(x) = 10x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 8x^2$ e $g(x) = 2x^3 + 4x^2 - 17x - 6$
- b) $f(x) = x^4 + 5x^3 - 20x^2 + 4$ e $g(x) = x + 1$
- c) $f(x) = x^5 + 5x^4 - x^3 - 8x$ e $g(x) = x - 3$
- d) $f(x) = x^6 + 3x^4 + x^2$ e $g(x) = x - \sqrt{5}$

Exercício 11. Fatore completamente os polinômios dados a seguir.

- a) $3x^4 + 18x^3 - 27x^2 - 42x$
- b) $10x^5 + 27x^4 - 10x^3 - 3x^2$
- c) $3x^5 + 4x^4 - 14x^3 - 2x^2 - 17x - 6$
- d) $4x^4 + 3x^2 - 1$
- (e) $9x^5 - 51x^4 + 94x^3 - 74x^2 + 25x - 3$

Exercício 12. Determine todos os valores reais de x que satisfazem as desigualdades.

- a) $x^2 - 5 < 0$
- b) $4 - x^2 > 0$
- c) $x^2 - 5x + 6 > 0$
- d) $x^3 - x^2 - 22x + 40 > 0$
- e) $2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 2 > 0$
- f) $3x^5 - 2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 7x - 2 < 0$
- g) $(x^2 + 4)(-x^2 - x - 1) < 0$

Exercício 13. Estude o sinal das funções racionais a seguir.

- a) $f(x) = \frac{x-2}{x^2+3}$
- b) $g(x) = \frac{2x^2-10x+12}{x^3+4x}$
- c) $h(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^3+x^2}$

Exercício 14. Dados os polinômios $f(x)$ e $g(x)$ com $g(x) \neq 0$ e $\partial f > \partial g$, temos que a função racional $\frac{f(x)}{g(x)}$ (imprópria) pode ser reescrita como a soma de um polinômio com uma função racional própria, cujo grau do numerador é menor que o grau do denominador. Para determinar esses polinômios, fazemos a divisão de $f(x)$ por $g(x)$ e encontramos os polinômios $q(x) \neq 0$ e $r(x)$ tais que $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$, com $r(x) = 0$ ou $\partial r < \partial g$. Agora é só substituir na função racional,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{q(x) \cdot g(x) + r(x)}{g(x)} = \frac{q(x) \cdot g(x)}{g(x)} + \frac{r(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}.$$

Utilize esse procedimento para reescrever as funções racionais seguintes como somas de polinômios com funções racionais próprias.

- a) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^4 + x^3 - 2x^2 + 4}{x^3 + 3}$
- b) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^5 + x^4 - 2x^3 - 8x}{x^2 - 2x + 1}$
- c) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^6 - 5x^4 + 2x^2}{x^3 + 4x}$

Exercício 15. Uma partícula em movimento retilíneo tem sua posição, no instante t , dada por

$$p(t) = \frac{t^3 - 5t^2 + 6t}{t^2 + 1}, \quad \text{para } t \geq 0.$$

Determine:

- a) os instantes em que $p(t) = 0$;
- b) os intervalos de tempo nos quais a partícula encontra-se à direita de zero e aqueles nos quais encontra-se à esquerda de zero;
- c) a velocidade média entre o tempo inicial 2 e o tempo final t , sabendo que a velocidade média é dada por $v_{\{t_1, t_2\}} = \frac{p(t_2) - p(t_1)}{t_2 - t_1}$, onde t_1 representa o instante inicial e t_2 o instante final;
- d) os valores de $t \geq 0$ para os quais $v_{\{2, t\}} \leq 0$ e aqueles onde $v_{\{2, t\}} > 0$;
- e) o que ocorre com $v_{\{2, t\}}$ à medida que t se aproxima de 2?

Exercício 16. Um campo será delimitado no formato de um retângulo. Determine as dimensões do campo de área máxima que poderá ser cercado utilizando 100 metros lineares de cerca.

Bibilografia

Doering, C.I; Nácul, L.B.C.; Doering, L. R.; (organizadores). Pré-Cálculo. Editora da UFRGS.